

- 1) Sia X il quoziente di \mathbf{R} per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } |x| = |y| > 1.$$

Discutere se X è connesso, se è compatto e se è di Hausdorff.

- 2) Sia $X = (0, 1)$, con topologia indotta dalla topologia euclidea di \mathbf{R} . Mostra che la compattificazione di Alexandroff $(X \times X)^*$ di $X \times X$ non è omeomorfa al prodotto $X^* \times X^*$, ove con X^* si denoti la compattificazione di Alexandroff di X .

- 3) Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea in \mathbf{R}^3 .

a) Determinare il gruppo fondamentale di X e di $X \setminus \{p\}$ al variare di $p \in X$.

b) Discutere se $\{(x, y, 1) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è retracts di deformazione di X e se è retracts di X .

c) Discutere se $Y = X \cup \{(x, 0, 1) \in \mathbf{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale, prendendo l'origine come punto base.