UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Primo esonero di GEOMETRIA 3 (Prof. F. Tovena) 13 dicembre 2011
Giustificare le risposte con chiarezza.

1) Siano X uno spazio topologico, A e B suoi sottoinsiemi non vuoti propri. Mostra che:

a) se A è aperto, allora $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

b) se A aperto e B è denso in X, allora $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.

c) Se A e B sono connessi e $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.

2) Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei reali. Denotiamo con $\mathcal{C}$ la topologia cofinita su $\mathbf{R}$, con $\mathcal{T}_s$ la topologia generata dalle semirette aperte illimitate a sinistra. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, considera l'applicazione $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = x^n$.

a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, discuti se l'applicazione $f_n : (\mathbf{R}, \mathcal{C}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{C})$ è continua se in dominio e codominio consideriamo la topologia cofinita $\mathcal{C}$.

b) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, discuti la continuità di $f_n : (\mathbf{R}, \mathcal{C}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$ (rispettivamente, di $f_n : (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{C})$).

c) Mostra che per ogni punto P di $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$, la chiusura di $\{P\}$ non è compatta.

d) Considera il prodotto $X = (\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \times (\mathbf{R}, \mathcal{C})$. Controlla se il sottospazio $S = \{(x, y) | x = y\}$ di X è omeomorfo a $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$.

3) Sia $\mathbf{R}_{\geq}$ l'insieme dei reali non negativi. Considera la famiglia $\mathcal{B} = \{[0, n), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$.

a) Mostra che $\mathcal{B}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbf{R}_{\geq}$.

b) Discuti se $(\mathbf{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ è metrizzabile, se è connesso, se è compatto.

c) Determina il derivato di $S_1 = \{\frac{3}{4}\}$ e di $S_2 = \{\frac{7}{4}\}$