

Una teoria assiomatica per la geometria piana

1.1 Introduzione ad una teoria assiomatica materiale

Una teoria assiomatica (o, sistema assiomatico) comprende il seguente insieme di informazioni

1. Un elenco di **termini primitivi**, cioè un elenco di parole per le quali non viene fornita una descrizione precisa, ma solo una spiegazione. Le parole in questo elenco vengono utilizzate nella teoria successiva come se fossero noti e condivisi da tutti.

2. Un elenco di **assiomi** (detti anche **postulati**): sono enunciati che illustrano le proprietà dei termini primitivi e le loro relazioni. Tali enunciati vengono considerati veri.

3. Un elenco di **regole logiche**: queste sono le uniche regole da utilizzare.

A partire da questi dati, è possibile introdurre altri termini (ma solo se definiti con precisione) e altri enunciati (ma solo se essi possono essere dimostrati utilizzando solo le regole logiche specificate e gli assiomi):

4. Le **definizioni**: un elenco di parole (che può essere allungato a piacere) di termini che vengono univocamente precisati, utilizzando i termini primitivi, gli assiomi o le definizioni introdotte in precedenza. Sono parole che spesso vengono introdotte per comodità, per rendere più corti ed efficaci gli enunciati.

5. I **teoremi**, cioè enunciati per i quali è possibile dimostrare che sono veri usando solo i termini primitivi, gli assiomi, le regole logiche. Naturalmente, è possibile utilizzare nella dimostrazione anche teoremi già dimostrati in precedenza.

Per precisione, bisognerebbe inserire nella struttura assiomatica anche la lingua nella quale ci esprimiamo. Inoltre, utilizzeremo spesso, senza dichiararlo, i numeri reali, parte della teoria degli insiemi, la logica aristotelica.

Eventuali raffigurazioni possono essere utilizzate solo come supporto, e non costituiscono una dimostrazione.

Un sistema assiomatico è **consistente (o coerente)** se non contengono contraddizioni (cioè non ci sono enunciati che sono veri e falsi contemporaneamente, in essi).

Un **modello** di un sistema assiomatico si ottiene assegnando ai termini primitivi un significato, in modo che valgano gli assiomi. Esistono modelli concreti (ottenuti utilizzando oggetti e relazioni concreti) e modelli astratti. Se, è possibile trovare un modello concreto per un sistema assiomatico, allora il sistema è consistente.

Un sistema assiomatico è **completo** se, comunque fissato un enunciato, è possibile dimostrare che esso è vero o è falso. Il sistema assiomatico dell'aritmetica non è completo (Gödel).

In un sistema assiomatico, un assioma è **indipendente** dagli altri se non può essere dedotto come un teorema utilizzando solo gli altri assiomi.

Due modelli di uno stesso sistema assiomatico sono **isomorfi** se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi, tale che conservi tutte le relazioni.

1.2 Un esempio di teoria assiomatica: Elementi di Euclide - Libro I

Il libro I degli Elementi di Euclide costituisce una presentazione assiomatico-deduttiva della geometria del piano (non del tutto completa).

In esso sono presentate 23 definizioni (nelle quali non vengono distinti termini primitivi e definizioni nel senso moderno del termine), alcune regole della logica aristotelica e cinque postulati.

A partire da essi, Euclide discute teoremi di geometria piana relativi principalmente ai triangoli. Una osservazione successiva e recente ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi. Inoltre, non è accertato che la versione riportata sia quella autentica di Euclide, o includa revisioni successive e interventi di altri autori. Le parti riportate **contengono variazioni** rispetto a traduzioni corrette, nel tentativo di avvicinare la terminologia a quella attualmente in uso, e di segnalare i termini cui ora vengono attribuiti significati differenti.

Definizioni

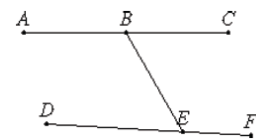
- 1) Un **punto** è ciò che non ha parti
- 2) Una **linea** è una lunghezza senza larghezza
- 3) Gli **estremi** di una linea sono punti

- 4) Una **linea retta** è una linea che giace dritta con i punti su se stessa
- 5) Una **superficie** ha solo lunghezza e larghezza
- 6) Le estremità di una superficie sono linee
- 7) Una **superficie piana** è una superficie che giace dritta con le linee rette su se stessa
- 8) Un **angolo** piano è l'inclinazione fra due linee in un piano che si incontrano e non giacciono sulla stessa linea retta
- 9) e quando le linee che si incontrano sono rette l'angolo è detto rettilineo
- 10) Quando una linea retta messa su una linea retta fa i due angoli adiacenti uguali, ognuno di quegli angoli è **retto** e la linea retta che sta sull'altra è detta **perpendicolare**
- 11) Un angolo ottuso è un angolo più grande di un angolo retto
- 12) Un angolo acuto è un angolo più piccolo di un angolo retto
- 13) Un **contorno** è l'estremità di qualcosa
- 14) Una **figura** è ciò che è contenuta da un contorno
- 15) Un **cerchio** è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette che vanno su essa da un punto interno alla figura sono uguali tra di loro
- 16) e il punto è detto **centro** del cerchio
- 17) Un **diametro** del cerchio è una linea retta tracciata dal centro e che termina in entrambe le direzioni sulla circonferenza del cerchio, e questa linea retta biseca il cerchio
- 18) Un **semicerchio** è la figura contenuta dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e il centro del semicerchio è lo stesso del centro del cerchio
- 19) Figure rettilinee sono quelle contenute da linee rette, figure trilaterali (**triangoli**) sono quelle contenute da tre, quadrilaterali da quattro, e multilaterali quelle contenute da più di quattro linee rette
- 20) Delle figure trilaterali, un **triangolo equilatero** è quello che ha tre lati uguali, un triangolo isoscele è quello che ha due lati uguali e un triangolo scaleno è quello che ha i tre lati diseguali
- 21) inoltre delle figure trilaterali un **triangolo rettangolo** è quello che ha un angolo retto, un **triangolo ottusangolo** quello che ha un angolo ottuso e un **triangolo acutangolo** uno che ha i tre angoli acuti
- 22) Delle figure quadrilaterali, un **quadrato** è quello che ha sia i lati uguali che gli angoli retti, un **rettangolo** quello che ha gli angoli retti ma non i lati tutti uguali, un **rombo** è quello equilatero ma non con gli angoli retti, un **trapezio** quello che ha i lati e gli angoli opposti uguali a due a due ma non è equilatero e non ha angoli retti.
- 23) linee rette parallele sono linee rette che, essendo nello stesso piano e prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano in nessuna delle due direzioni

Postulati.

- 1) Disegnare una linea retta tra due punti
- 2) Prolungare una linea retta
- 3) Disegnare una circonferenza con dato raggio e dato centro
- 4) Tutti gli angoli retti sono uguali
- 5) Se una linea retta che cade su due linee rette forma angoli interni dalla stessa parte minori di due angoli retti, allora le due rette, se prolungate indefinitamente, si incontreranno dalla parte in cui gli angoli interni sono minori di due angoli retti

Se dunque la somma degli angoli ABE e BED e' minore di due angoli retti, le rette AC e DF, prolungate dalla parte di A e D, si incontreranno.



Nozioni comuni (o regole di logica)

- 1) Cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro
- 2) Cose uguali sommate a cose uguali danno somme uguali
- 3) Cose uguali sottratte a cose uguali danno differenze uguali
- 4) Cose coincidenti sono uguali
- 5) L'intero è maggiore della sua parte