4.16 Esercizi svolti sula forma canonica di Jordan

Sia assegnata la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che il polinomio caratteristico di B è $p(\lambda) = (1-\lambda)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan ed una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}BM$.

Soluzione a) Cerco innanzitutto la forma canonica di B, cosa che è possibile perché lo spettro di B è reale. L'unico autovalore di B è 1, e la matrice

$$C = B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2: dunque nella forma canonica ci sono due blocchi di Jordan. La forma canonica sarà dunque una delle seguenti:

$$\begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove la scelta ricadrà sulla prima se l'ordine di nilpotenza di C è 3, o sulla seconda se l'ordine di nilpotenza di C è 2. Poiché

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, l'ordine di nilpotenza di C non può essere 2, e deve dunque essere 3. Ricordiamo che, per una matrice nilpotente, l'indice di nilpotenza è uguale all'ordine massimo di un suo blocco di Jordan. Dunque, la forma canonica cercata è data da

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix}.$$

b) Cerco la matrice di passaggio M. Il riferimento R nel quale l'endomorfismo f_B associato a B viene rappresentato dalla matrice di Jordan J è della forma $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 = f_C^2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 = f_C\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2$, per una scelta opportuna dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Si controlla facilmente che $Ker(C) =< (3,2,3,0),(3,2,0,-3) >$. Poiché l'ordine di nilpotenza di C è 3, sicuramente il vettore cercato $\mathbf{v}_2 = f_C^2\mathbf{u}_2$ appartiene a Ker C e dunque $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, C \cap \mathrm{Im}\, f_C^2$. Per quanto visto, dim Im $f_C^2 = 1$, e dunque Ker $C \cap \mathrm{Im}\, f_C^2$ deve avere dimensione 1 (ha almeno dimensione 1 perché J ha un blocco di ordine 3):

$$\mathrm{Ker}\, C \supset \mathrm{Ker}\, C \cap \mathrm{Im}\, f_C^2 \supset \{\overline{0}\}.$$

Essendo $\mathrm{Im}\, f_C^2 =< (0,0,-1,-1) >$, prendo $\mathbf{v}_2 = (0,0,-1,-1)$. Ma le coordinate di $\mathbf{v}_2$ sono uguali alla prima colonna di C^2 e quindi $\mathbf{v}_2 = f_C^2(\mathbf{e}_2)$. Ora completo $\mathbf{v}_2$ ad una base di $\mathrm{Ker}\, C$, prendendo, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = (3,2,3,0)$. Il riferimento cercato è dato da $\mathbf{v}_1 = (3,2,3,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,-1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = f_C(\mathbf{e}_1) = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1$ e la matrice M è data da:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$