PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2
MATEMATICA, 20/09/2011

In questo elenco, la presenza di esercizi relativi ai singoli argomenti non è correlata alla loro rilevanza, né alla ricorrenza nella prova scritta.

Ogni test viene valutato positivamente solo se vengono date tutte e sole le risposte corrette.

Le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritti come vettori righe.

Test 1. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni $x_1 + 3x_2 + 13x_3 - 2 = 0$, $2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4 = 0$.
(a) r è ortogonale ad almeno un piano isotropo;
(b) r è ortogonale ad una unica retta isotropa;
(c) r è una retta reale.

Test 2. Nello spazio affine complessificato, sia fissato un sistema di riferimento reale. Considera il piano α di equazione $(6+2i)x_1-(3+i)x_2+(9+3i)x_3+7-i = 0$.
(a) α non ha punti reali;
(b) $x_1 = -1 - 3t + 6i\,s, x_2 = -i + (2 + i)s, x_3 = 2t + s$ è una rappresentazione parametrica di α;
(c) α è parallelo ad un piano reale.

Test 3. Nel piano affine complessificato, sia fissato un sistema di riferimento reale. Considera la retta r passante per il punto $P(1, 2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (3, -2)$. Considera inoltre l'inclusione usuale del piano nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come complementare di $\{X_0 = 0\}$.
(a) Il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $8X_0-2X_1-3X_2 = 0$;
(b) r è parallela alla retta il cui completamento proiettivo ha equazione omogenea $8X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$;
(c) Ogni omotetia di centro P lascia fissa la retta r.

Test 4. Considera la proposizione:
$\mathcal{P}$: In uno spazio proiettivo di dimensione 4, due rette si intersecano in almeno un punto.
(a) $\mathcal{P}$ è vera;
(b) $\mathcal{P}$ ha carattere grafico;
(c) La proposizione duale è: In uno spazio proiettivo di dimensione 4, il sottospazio generato da due piani è contenuto in un iperpiano.

Test 5. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi([X_0, X_1, X_2]) = [2X_0 + 2X_1 - 2X_2, 2X_1, X_1 + X_2].$$

(a) la retta per $P[2, 0, 1]$ e $Q[1, 1, 1]$ è fissa per φ, ma non fissa punto per punto;
(b) φ ammette tre punti fissi non allineati;
(c) φ estende una affinità del piano affine $\{X_0 \neq 0\}$.

Test 6. In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ si considerino i punti $A[1, 1]$, $B[0, 1]$, $C[2, 1]$, $D[1, 2]$:
(a) il birapporto $(ABCD)$ è $[1, 1]$;
(b) il birapporto $(ABCD)$ è $[2, -4]$;
(c) esiste un'unica proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ in sè tale che $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$, $\varphi(C) = D$.

Test 7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare.
(a) se f è diagonalizzabile, allora $\mathbb{R}^3 = Ker\, f \oplus Im\, f$;
(b) se f è triangolabile, allora $\mathbb{R}^3 \neq Ker\, f \oplus Im\, f$;
(c) se il polinomio caratteristico di f è $t^3 - 5t^2 + t$, l'applicazione f non è iniettiva.

Test 8. Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}^4$, considera il sottospazio W generato da $\mathbf{w} = (1, 1, 0, 0)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W e l'applicazione canonica $\pi : V \to V/W$.
(a) V/W ha dimensione 3 ;
(b) i vettori $(1, 3, 2, 1)$ e $(0, 2, 2, 1)$ individuano la stessa classe in V/W;
(c) L'applicazione $f : V \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3 - x_4)$ fattorizza attraverso π.

Test 9. Nel piano affine, fissa un sistema di riferimento e considera la conica di equazione $2x^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$, al variare di $t \in \mathbb{R}$:
(a) è una iperbole;
(b) è tangente alla retta $x + y = 0$ nell'origine;
(c) ha un asintoto parallelo all'asse y.

Test 10. Nel piano proiettivo considera coordinate omogenee $[x_1, x_2, x_3]$. La conica proiettiva γ di equazione $3x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 + x_3^2 = 0$:
(a) contiene una retta di punti doppi;
(b) contiene la retta $x_2 + x_3 = 0$ come componente;
(c) è rappresentata da una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ di rango 3.

Test 11. Nello spazio affine complessificato, fissa un sistema di riferimento reale. Considera i piani α di equazione $x_1 + (1-i)x_2 + (-1+i)x_3 - 2 + i = 0$ e β di equazione $ix_1 + (2-i)x_2 + x_3 + 1 - i = 0$. Denota con r l'intersezione $\alpha \cap \beta$.

(a) il sottospazio r è una retta reale;
(b) esiste un unico piano reale contenente il sottospazio r;
(c) il sottospazio r non contiene punti reali.

Test 12. Nello spazio euclideo complessificato, fissa un sistema di riferimento reale ortonormale. Considera il piano π di equazione $x_1 + 7x_3 + 5 - i = 0$.

(a) il piano π contiene almeno due rette reali distinte;
(b) il piano π contiene un unico fascio di rette isotrope;
(c) esiste un piano isotropo ortogonale a π e passante l'origine.

Test 13. Considera l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, definito da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_2, -x_1 - x_2 + 2x_3)$.

(a) 3 è autovalore per l'endomorfismo f;
(b) f è diagonalizzabile e il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ è contenuto in una base di autovettori per f;
(c) in $\mathbb{R}^3$ c'è un unico sottospazio f-stabile di dimensione 2 sul quale la restrizione di f coincide con una omotetia.

Test 14. Sia f un automorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale di dimensione finita n. È sempre vero che:

(a) l'endomorfismo f^{-1} è diagonalizzabile;
(b) ogni autovettore per f è anche autovettore per f^{-1};
(c) f e f^{-1} non hanno autovalori in comune.

Test 15. L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

(a) è diagonalizzabile;
(b) ammette 1 come autovalore di molteplicità algebrica 2;
(c) ammette una base ortogonale di autovettori;
(d) ha il vettore $(-1, 1, 0)$ come autovettore.

Test 16. Nello spazio euclideo complessificato, fissa un sistema di riferimento reale ortonormale. Considera il punto $P(2-i, 3i, 1)$ e il piano α di equazione $ix_1 + (1+i)x_2 + (2-i)x_3 + 1 = 0$.

(a) esiste un unico sottospazio lineare reale contenente P;
(b) esiste una unica retta isotropa passante per P e parallela ad α;
(c) il piano α contiene punti reali.

Test 17. Nello spazio euclideo complessificato, fissa un sistema di riferimento reale ortonormale. Considera la retta r di equazioni $x_1 - ix_3 + 3 - i = 0$, $2ix_2 + x_3 + 1 = 0$.

(a) la retta r è parallela al piano di equazione $x_1 + 3ix_2 + x_3 = 0$;
(b) la retta r non è parallela alla retta coniugata;
(c) esiste almeno una retta isotropa ortogonale a r e passante l'origine.

Test 18. Considera l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 - 6x_2, x_2, -2x_3).$$

(a) -2 è autovalore per l'endomorfismo f;
(b) f è diagonalizzabile e il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ è contenuto in una base di autovettori per f;
(c) in $\mathbb{R}^3$ c'è un unico sottospazio f-stabile di dimensione 2 sul quale la restrizione di f coincide con una omotetia.

Test 19. Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile di ordine n. È sempre vero che:

(a) la matrice trasposta A^t è diagonalizzabile;
(b) ogni autovettore per A è anche autovettore per A^t;
(c) A e A^t non hanno autovalori in comune.

Test 20. La rotazione di $\pi/4$ in senso orario attorno al punto $(1, 1)$:

(a) è una isometria;
(b) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1 - \sqrt{2}$;
(c) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1$;
(d) ha una retta di punti fissi.

Test 21. Si consideri il triangolo D_t di vertici i punti del piano $A = (0, 0), B = (1, -1)$ e $C_t = (1 - t, 2t + 2)$, dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) per ogni numero reale positivo a esiste un solo valore di t per cui l'area di D_t vale a;
(b) per ogni numero reale positivo a esistono esattamente due valori distinti di t per cui l'area di D_t vale a e sono $t = \pm 2a - 1$;
(c) per ogni numero reale positivo a esistono infiniti valori di t tali che il perimetro di D_t valga a;
(d) per ogni numero reale positivo a esistono al più due valori di t tali che il perimetro di D_t valga a.

Test 22. Quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ai tre piani dello spazio aventi equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - 3x_2 - x_3 = 0:$$

(a) i tre piani sono paralleli;
(b) i tre piani sono paralleli ad una stessa retta;
(c) i tre piani appartengono ad una stella impropria;
(d) l'intersezione dei tre piani è vuota;
(e) il terzo piano è ortogonale alla retta intersezione dei primi due.

Test 23. La conica di equazione $x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$:

(a) è una iperbole col centro nel punto $(-\frac{1}{3}, 2)$;
(b) è una iperbole col centro nel punto $(-2, -\frac{1}{3})$;
(c) è una ellissi col centro nel punto $(-1, -\frac{1}{3})$;
(d) ammette due asintoti che sono rette reali.

Test 24. Date due rette r e s distinte e non parallele del piano euclideo e un punto P non appartenente ad alcuna di esse:

(a) c'è sempre una circonferenza di centro P tangente a r e a s;
(b) non c'è mai una circonferenza di centro P tangente a r e a s;
(c) c' è una circonferenza di centro P tangente a r e a s solo se la simmetria ortogonale rispetto alla retta che congiunge P con il punto di intersezione di r e s muta r in s.

Test 25. La matrice

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro reale x:

(a) è definita positiva per ogni valore del parametro x;
(b) non è mai definita positiva;
(c) è definita positiva se $x > 0$;
(d) è definita positiva nell'unione degli intervalli $(2k\pi, (2k + \frac{1}{4})\pi)$ al variare di $k \in \mathbb{N}$;
(e) ha sempre almeno due autovalori distinti per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Test 26. Si consideri il parallelepipedo P di vertici l'origine e i tre punti $A = (2, 3, 1)$, $B = (3, 1, 0)$, $C = (0, 0, x)$, dove $x \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Il volume di P vale $7x$;
(b) il volume di P è uguale al prodotto vettoriale dei vettori $(2, 3, 1)$ e $(3, 1, 0)$;
(c) la retta contenente lo spigolo AB di P è ortogonale al piano di equazione $2x_2 - x_1 + x_3 = 0$;
(c) la retta contenente lo spigolo AC di P interseca il piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$ tranne che per $x = -1$ e tale intersezione descrive su π una retta al variare di x;
(d) la retta contenente lo spigolo AC di P interseca il piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$ tranne che per $x = 1$ e tale intersezione descrive su π una conica al variare di x.

Test 27. Considera la conica γ di equazione $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x = 0$ nel piano affine.

(a) γ è non degenere;
(b) La retta $x - y + 1 = 0$ ha per polo il punto $(1, 1)$;
(c) I vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ individuano una coppia di direzioni coniugate.

Test 28. Considera la conica γ di equazione $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x = 0$ nel piano affine.

(a) γ è una iperbole;
(b) γ è una ellisse;
(c) γ è una ellisse di centro $(2, 1)$.

Test 29. Considera la conica γ di equazione $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x = 0$ nel piano affine.

(a) La retta di equazione $x - y = 0$ è un diametro;
(b) La retta $y = 0$ interseca γ in due punti distinti;
(c) La tangente a γ in $(0, 0)$ è la retta $x = 0$;
(d) γ ha un asintoto parallelo all'asse y.

Test 30. Nello spazio complessificato, il piano π di equazione $2x - iy + 2iz = 2$:

(a) non ha punti reali;
(b) interseca il piano coniugato in una retta;
(c) è isotropo;
(d) è parallelo ad almeno un vettore isotropo.

Test 31. Considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, 3x_2, -2x_1 - 2x_2 + 3x_3).$$

(a) Lo spettro di f contiene 3;
(b) f è diagonalizzabile.
(c) La molteplicità geometrica di 3 è uguale a 2.

Test 32. L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2, x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

(a) ammette 3 autovalori distinti;
(b) ammette il sottospazio W di equazione $x_2 = 0$ come sottospazio f-invariante;
(c) ammette il vettore $(-1, 1, 1)$ come autovettore.

Test 33. Sia f un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

(a) se U e W sono sottospazi f-invarianti con $U \cap W = \emptyset$, allora $V = U \oplus W$;
(b) per ogni naturale r con $1 \leq r \leq n$, esiste un sottospazio Z di V che abbia dimensione r e sia invariante per f.
(c) f è triangolabile.

Test 34. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, sia W il sottospazio generato dal vettore $\vec{w}_0 = (1, 2, -1)$ e siano assegnati i vettori $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$. Denotiamo con $\pi : \mathbb{R}^3 \to Z = V/W$ lo spazio quoziente.

(a) le classi $[\vec{v}_1]$ e $[\vec{v}_2]$ formano una base di Z;
(b) l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2$, può essere scritta come composizione $f = g \circ \pi$ per una opportuna applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(c) $[\vec{v}_1] = [(1, 1, 1)]$ in Z.

Test 35. Considera la proposizione "In uno spazio proiettivo di dimensione 4, una retta e un punto, che non si appartiene ad essa, sono sempre contenuti in un iperpiano". La proposizione duale è:

(a) In uno spazio proiettivo di dimensione 4, una retta ed un iperpiano che non contiene la retta si intersecano esattamente in un punto.
(b) In uno spazio proiettivo di dimensione 4, una retta ed un iperpiano che non contiene la retta hanno sempre un punto in comune.
(c) In uno spazio proiettivo di dimensione 4, un sottospazio di codimensione 2 ed un iperpiano che non lo contiene, hanno sempre un punto in comune.

Test 36. Nel piano proiettivo, considera i punti $A[1, 0, 2]$, $B[1, -1, 1]$, $C[1, 0, 1]$.

(a) I punti A, B e C sono allineati.
(b) Esiste una unica proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$, $\varphi(C) = C$.
(c) I punti A, B e C sono indipendenti.

Test 37. Nella retta proiettiva, considera i punti $A[1, 2]$, $B[1, 3]$, $C[1, -2]$, $D[0, 1]$.

(a) Il birapporto $(ABCD)$ è uguale a $[4, 5]$.
(b) Il birapporto $(ABCD)$ è uguale a $[5, 4]$.
(c) Una proiettività non identica $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$, ha esattamente due punti fissi.