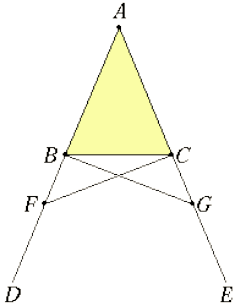


Le due proposizioni seguenti mostrano che un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

Proposizione I.5

In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.

Dimostrazione



Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC con il lato AB uguale al lato AC. Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2).

Vogliamo mostrare che gli angoli ABC e ACB sono uguali e che anche gli angoli CBD e BCE sono uguali tra loro.

Fissiamo un punto F su BD. Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3].

Congiungiamo B con G e C con F (post. I.1)

Consideriamo i triangoli AFC e ABG: essi hanno uguali i lati AF e AG, come anche i lati AC e AB. Inoltre, hanno in comune l'angolo FAG, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono dunque congruenti per LAL. In particolare FC e BG sono uguali, gli angoli FCA e GBA coincidono e gli angoli AFC e BGA coincidono.

Ora consideriamo i triangoli BFC e BGC.

Poiché AF è uguale ad AG e AB è uguale ad AC, per differenza BF è uguale a CG (NC.3).

Inoltre i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli BFC e BGC per quanto visto.

Dunque i due triangoli sono congruenti per LAL. In particolare, l'angolo CBF è uguale all'angolo BCG (che era uno dei risultati che volevamo dimostrare).

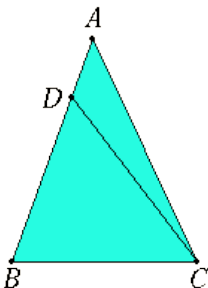
Abbiamo provato che gli angoli ABG e ACF sono uguali tra loro e gli angoli CBG e BCF sono uguali tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo ABC (ottenuto da ABG sottraendo CBG) è uguale all'angolo ACB (ottenuto da ACF sottraendo BCF) (C.N.3). QED

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione



Sia ABC un triangolo nel quale l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.

Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.).

Dunque AB è maggiore o minore di AC.

Si osservi che questa deduzione si basa su una legge non elencata nelle nozioni comuni: è detta legge di tricotomiae afferma che 'date due quantità omogenee AB e AC, allora $AB > AC$, oppure $AB = AC$ oppure $AB < AC$ '.

Supponiamo che AB sia maggiore di AC. Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3);

tracciamo il segmento DC (I. Post. I).

Consideriamo i triangoli DBC e ACB: in essi $BD = AC$ per costruzione, BC in comune, angolo in B in comune. Per LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.

Per l'assioma 9, i due triangoli hanno aree uguali. Ma il triangolo BCD è strettamente contenuto in BCA, e ha dunque un'area strettamente minore. Assurdo: quindi non è possibile che AB sia maggiore di AC.

Supponiamo che AB sia minore di AC. (completare per esercizio la dimostrazione) QED