

### Proposizioni e tavole di verità

Una **proposizione** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il **valore di verità** della proposizione.

Un **paradosso** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "questa frase è falsa".

Una proposizione deve essere decidibile nel contesto in cui stiamo lavorando (cioè deve essere vera o, in alternativa, falsa). Non sono proposizioni le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni.

Sono proposizioni (ad esempio):

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica*
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- $3x = 5$
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo*, *Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora considerare possibili entrambe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.

Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscola, come  $p$ ,  $q$ . L'utilizzo di una lettera per simboleggiare una proposizione è utile in varie situazioni. Un primo esempio è legato alla possibilità di rappresentare in una breve tabella i possibili valori di verità, elencando tutti i casi possibili: tali tabelle sono dette **tavole (o tabelle) di verità**.

**Esempio.** (V indica Vero, F indica Falso) Se abbiamo solo la proposizione  $p$ , la tavola della verità è:

$p$
V
F

Se abbiamo due proposizioni  $p$  e  $q$ , la tavola diventa:

$p$	$q$
V	V
V	F
F	V
F	V

Inoltre, è possibile che dichiarazioni diverse (ma che hanno lo stesso significato) esprimano la stessa proposizione. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday*, *Aujourd'hui c'est dimanche* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità). Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due enunciati hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) sono detti equivalenti e diremo che essi esprimono la stessa proposizione.

Una **tautologia** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette  $l$  e  $m$  sono parallele oppure le rette  $l$  e  $m$  non sono parallele*.

Una **contraddizione** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.

### Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.

1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di  $p$  si denota con il simbolo  $\neg p$  o  $\bar{p}$ .

2. Due proposizioni  $p$  e  $q$  sono collegate con un **connettivo logico** tra i seguenti:

operazione su $p$ e $q$	simbolo	lettura del simbolo	esempio
coniunzione logica	$p \wedge q$	$p$ e $q$	<i>Guardo un film e mangio il pop-corn</i> <i>Sono richiesti l'invito e l'abito da sera</i>
disgiunzione logica	$p \vee q$	$p$ o $q$	$x < y$ o $x > y$ <i>Leggo un libro o vado al cinema</i> <i>L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.</i>
implicazione logica	$\Rightarrow$	$p$ implica $q$ se $p$ allora $q$	<i>Se ho la febbre, sono malato</i> <i>Se piove, andiamo al cinema</i>
coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	$p$ se e solo se $q$	<i>Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto</i> <i>Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali</i>

In italiano non si distingue tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.

Viceversa, riconoscendo i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una **proposizione elementare** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale, mentre gli arrivò una telefonata*. Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

### Negazione

La negazione di una proposizione  $p$  è la proposizione che è vera quando  $p$  è falsa e falsa quando  $p$  è vera. La negazione di  $p$  si denota con il simbolo  $\neg p$  o  $\bar{p}$  (che si legge *non p*).

Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

Esempi:  $p$  : mangio la mela

$\neg p$ : non mangio la mela / non è vero che mangio la mela

$q$  : dormo per terra

$\neg q$ : non dormo per terra/non è vero che dormo per terra

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza:  $\neg(\neg p)$  è equivalente a  $p$ :

$p$	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Osserva: la negazione richiede una particolare attenzione quando nella frase compaiono dei quantificatori; infatti, *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

$p$  : tutti i bambini parlano

$\neg p$ : non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla

$q$  : non vado mai in piscina

$\neg q$ : qualche volta vado in piscina

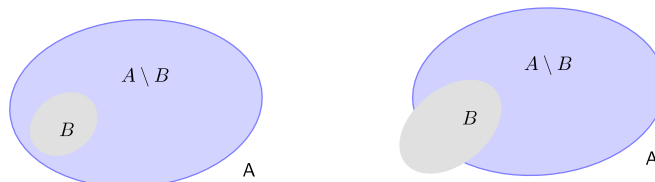
$r$  : un alunno partecipa alla gara

$\neg r$ : nessun alunno partecipa alla gara

$t$ : nessun genitore mi ha parlato

$\neg t$ : mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato

**Rappresentazione insiemistica** Possiamo rappresentare la negazione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione  $p$ : *le rose sono rosse*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme  $A$  di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme  $B$  delle rose rosse. La negazione  $\neg p$  è allora rappresentato dall'insieme complementare di  $B$  in  $A$ , denotato da  $A \setminus B$  e formato da tutti gli elementi di  $A$  che non sono in  $B$ :  $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ . La definizione di  $A \setminus B$  resta vera anche se  $B$  non è un sottoinsieme di  $A$ .



### Congiunzione

La **congiunzione** di due proposizioni  $p$  e  $q$  è la proposizione che è vera quando entrambe  $p$  e  $q$  sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni  $p$  e  $q$  viene denotata con  $p \wedge q$ , che si legge  $p$  e  $q$ .

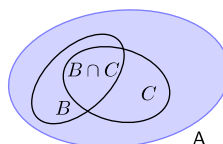
La tavola della verità di  $p \wedge q$ , in base al valore di verità delle proposizioni  $p$  e  $q$ , è la seguente:

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: - Determina la tavola della verità di  $q \wedge p$ .

- Determina la tavola della verità di  $(p \wedge q) \wedge r$  (per tre proposizioni  $p, q, r$ ).
- Determina la tavola della verità di  $\sim(p \wedge q)$ .
- Determina la tavola della verità di  $(\sim p) \wedge q$ .
- Determina la tavola della verità di  $p \wedge (\sim q)$ .

**Rappresentazione insiemistica** Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione  $p$ : *le rose sono rosse*, la proposizione  $q$ : *le rose sono appassite* e la congiunzione  $p \wedge q$ : *le rose sono rosse e appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme  $A$  di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme  $B$  delle rose rosse e il sottoinsieme  $C$  delle rose appassite. La congiunzione  $p \wedge q$  è allora rappresentata dall'insieme intersezione di  $B$  e  $C$ , denotato da  $B \cap C$  e formato da tutti gli elementi di  $A$  che sono sia in  $B$  che in  $C$ :  $B \cap C = \{a \in A \mid a \in B \text{ e } a \in C\}$ .



Esercizio: Mostra che  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

**Disgiunzione**

La **disgiunzione** di due proposizioni  $p$  e  $q$  è la proposizione che è falsa quando entrambe  $p$  e  $q$  sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tavola della verità di  $p \vee q$ , in base al valore di verità delle proposizioni  $p$  e  $q$ , è la seguente:

E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni  $p$  e  $q$ :

a) la **disgiunzione inclusiva** quando  $p$  e  $q$  possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

*E' richiesto il biglietto o l'abbonamento*

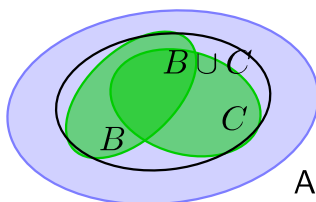
b) la **disgiunzione esclusiva** quando  $p$  e  $q$  non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con  $p \dot{\vee} q$ )

*2 > 3 oppure 2 < 3*

**Rappresentazione insiemistica** Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione  $p$ : *le rose sono rosse*, la proposizione  $q$ : *le rose sono appassite* e la disgiunzione  $p \vee q$ : *le rose sono rosse o appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme  $A$  di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme  $B$  delle rose rosse e il sottoinsieme  $C$  delle rose appassite. La disgiunzione  $p \vee q$  è allora rappresentata dall'insieme unione di  $B$  e  $C$ , denotato da  $B \cup C$  e formato da tutti gli elementi di  $A$  che sono in  $B$  o in  $C$ :

$$B \cup C = \{a \in A \mid a \in B \text{ oppure } a \in C\}.$$

La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui  $B \cap C$  risulta vuoto.



- Esercizi: - Determina la tavola della verità di  $q \vee p$ .  
 - Determina la tavola della verità di  $(p \vee q) \vee r$  (per tre proposizioni  $p, q, r$ ).  
 - Determina la tavola della verità di  $\sim(p \vee q)$ .  
 - Determina la tavola della verità di  $(\sim p) \vee q$ .  
 - Determina la tavola della verità di  $p \vee (\sim q)$ .

**Equivalenza**

Due proposizioni sono (*logicamente*) *equivalenti* se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

**Esempio:** Mostra che  $\neg(p \vee q)$  e  $\neg p \wedge \neg q$  sono equivalenti.

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.

Ad esempio, possiamo pensare

$p$ : questo angolo è acuto

$q$ : questo angolo è ottuso

$\neg(p \vee q)$  : non è vero che questo angolo è acuto o ottuso.

$\neg p \wedge \neg q$  : questo angolo non è acuto e non è ottuso.

**Esercizi** Mostra che la congiunzione è commutativa, cioè  $p \wedge q$  è equivalente a  $q \wedge p$

- Mostra che la congiunzione è associativa, cioè  $(p \wedge q) \wedge r$  è equivalente a  $p \wedge (q \wedge r)$

- Mostra che  $\neg(p \wedge q)$  e  $\neg p \vee \neg q$  sono equivalenti.

**Esercizio** Costruisci la tavola della verità per  $(p \vee \neg q) \wedge r$ .

Dobbiamo considerare tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni semplici coinvolte, e dobbiamo quindi considerare  $2^3 = 8$  possibilità.

$p$	$q$	$r$	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

**Proposizioni condizionali**

Una **proposizione condizionale** è una proposizione della forma  $p \Rightarrow q$ , ove  $p$  e  $q$  siano due proposizioni. Ad esempio, se  $p$ : il rubinetto è chiuso e  $q$ : non esce acqua dal mio lavandino, otteniamo la proposizione condizionale *Se il rubinetto è chiuso, non esce acqua dal mio lavandino*.

Va osservato che non è rilevante che l'implicazione sia vera o falsa.

**Esempi di una proposizione condizionale vera** Se  $x$  è un numero pari, allora  $x + 1$  è un numero dispari (b) Se  $2 < 3$ , allora  $4 < 9$ . (c) Se  $3 < 2$ , allora  $9 < 4$ .

**Esempi di una proposizione condizionale falsa** (a) Se  $x$  è un numero pari, allora  $x + 2$  è un numero dispari. (b) Se  $2 < 3$ , allora  $9 < 4$ .

**Esercizio:** Trova la negazione della proposizione 'Se corro, allora ho sete'.

In una proposizione condizionale  $p \Rightarrow q$ , la proposizione  $p$  è detta **antecedente (o ipotesi)**, mentre la proposizione  $q$  è detta **conseguente (o tesi)**. Diciamo anche che  $p$  è **condizione sufficiente** per  $q$ , e che  $q$  è **condizione necessaria** per  $p$ .

La tavola della verità di una proposizione condizionale è la seguente (notare che, se l'ipotesi è falsa, si assume che l'implicazione sia vera sempre):

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ad ogni proposizione condizionale  $p \Rightarrow q$  risultano associate in modo formale altre proposizioni condizionali:

$q \Rightarrow p$  l'implicazione inversa

$\neg p \Rightarrow \neg q$  l'implicazione contraria

$\neg q \Rightarrow \neg p$  l'implicazione contronominale

**Esempio:** Considera la proposizione condizionale 'Se due rette del piano sono ortogonali, sono incidenti'.  
L'implicazione inversa è 'Se due rette del piano sono incidenti, allora sono ortogonali'. L'implicazione contronominale è 'Se due rette del piano non sono incidenti, non sono ortogonali.'

**Esercizio:** Trova l'implicazione inversa e la contronominale di 'Se corro, allora ho sete'.

Ogni proposizione condizionale è equivalente alla sua contronominale:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

**Esercizio:** (a) Trova una implicazione condizionale vera la cui inversa sia falsa.

- (b)  $\neg(p \Rightarrow q)$  è equivalente a  $p \wedge \neg q$ .
- (c)  $\neg(p \wedge q)$  è equivalente a  $p \Rightarrow \neg q$ .
- (d)  $p \wedge (q \vee r)$  è equivalente a  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .
- (e)  $p \vee (q \wedge r)$  è equivalente a  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ .

Una **coimplicazione**  $p \Leftrightarrow q$  è vera se e solo se  $p$  e  $q$  hanno lo stesso valore di verità. La corrispondente tavola della verità è:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Esercizio:**  $p \Leftrightarrow q$  è equivalente a  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ .

Le coimplicazioni sono frequenti in matematica; le definizioni sono spesso coimplicazioni.

**Esempi** (a) Un quadrilatero è un rettangolo se e solo se ha tutti gli angoli retti.

$$(b) \quad x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow x+3=0 \text{ or } x-4=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ or } x=4.$$

### Sitografia

- <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/economia/logicainsiemistica.pdf> Prof. Garetto, Elementi di Logica,
- <https://www.youtube.com/watch?v=JczNoE43IuM> proposizioni, negazione, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=fjT7fnvtU> congiunzione, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=ljX1AHKHFku> disgiunzione inclusiva, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=ehDBkiEAx9Y> disgiunzione esclusiva, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=Z7P-H5iA8QY> implicazione
- <https://www.youtube.com/watch?v=QCnB4bi1ay0> doppia implicazione