

Proposizioni e tavole di verità

Una **proposizione** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il **valore di verità** della proposizione.

Un **paradosso** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "questa frase è falsa".

Una proposizione deve essere decidibile nel contesto in cui stiamo lavorando (cioè deve essere vera o, in alternativa, falsa). Non sono proposizioni le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni.

Sono proposizioni (ad esempio):

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica*
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- $3x = 5$
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo*, *Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora considerare possibili entrambe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.

Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscola, come p , q . L'utilizzo di una lettera per simboleggiare una proposizione è utile in varie situazioni. Un primo esempio è legato alla possibilità di rappresentare in una breve tabella i possibili valori di verità, elencando tutti i casi possibili: tali tabelle sono dette **tavole (o tabelle) di verità**.

Esempio. (V indica Vero, F indica Falso) Se abbiamo solo la proposizione p , la tavola della verità è:

p
V
F

Se abbiamo due proposizioni p e q , la tavola diventa:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	V

Inoltre, è possibile che dichiarazioni diverse (ma che hanno lo stesso significato) esprimano la stessa proposizione. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday*, *Aujourd'hui c'est dimanche* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità). Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due enunciati hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) sono detti equivalenti e diremo che essi esprimono la stessa proposizione.

Una **tautologia** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele*.

Una **contraddizione** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.

Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.

1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di p si denota con il simbolo $\neg p$ o \bar{p} .

2. Due proposizioni p e q sono collegate con un **connettivo logico** tra i seguenti:

operazione su p e q	simbolo	lettura del simbolo	esempio
coniunzione logica	$p \wedge q$	p e q	<i>Guardo un film e mangio il pop-corn</i> <i>Sono richiesti l'invito e l'abito da sera</i>
disgiunzione logica	$p \vee q$	p o q	$x < y$ o $x > y$ <i>Leggo un libro o vado al cinema</i> <i>L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.</i>
implicazione logica	\Rightarrow	p implica q se p allora q	<i>Se ho la febbre, sono malato</i> <i>Se piove, andiamo al cinema</i>
coimplicazione logica	\Leftrightarrow	p se e solo se q	<i>Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto</i> <i>Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali</i>

In italiano non si distingue tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.

Viceversa, riconoscendo i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una **proposizione elementare** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale, mentre gli arrivò una telefonata*. Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

Negazione

La negazione di una proposizione p è la proposizione che è vera quando p è falsa e falsa quando p è vera. La negazione di p si denota con il simbolo $\neg p$ o \bar{p} (che si legge *non p*).

Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

p	$\neg p$
V	F
F	V

Esempi: p : mangio la mela

$\neg p$: non mangio la mela / non è vero che mangio la mela

q : dormo per terra

$\neg q$: non dormo per terra/non è vero che dormo per terra

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza: $\neg(\neg p)$ è equivalente a p :

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Osserva: la negazione richiede una particolare attenzione quando nella frase compaiono dei quantificatori; infatti, *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

p : tutti i bambini parlano

$\neg p$: non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla

q : non vado mai in piscina

$\neg q$: qualche volta vado in piscina

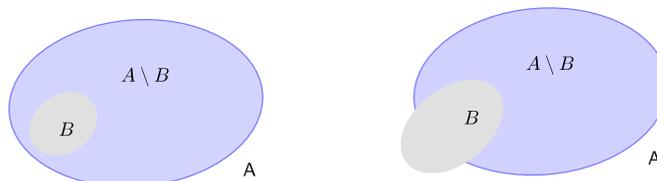
r : un alunno partecipa alla gara

$\neg r$: nessun alunno partecipa alla gara

t : nessun genitore mi ha parlato

$\neg t$: mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la negazione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione p : *le rose sono rosse*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme B delle rose rosse. La negazione $\neg p$ è allora rappresentato dall'insieme complementare di B in A , denotato da $A \setminus B$ e formato da tutti gli elementi di A che non sono in B : $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$. La definizione di $A \setminus B$ resta vera anche se B non è un sottoinsieme di A .



Congiunzione

La **congiunzione** di due proposizioni p e q è la proposizione che è vera quando entrambe p e q sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni p e q viene denotata con $p \wedge q$, che si legge p e q .

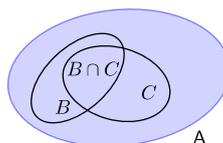
La tavola della verità di $p \wedge q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q , è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: - Determina la tavola della verità di $q \wedge p$.

- Determina la tavola della verità di $(p \wedge q) \wedge r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \wedge q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \wedge q$.
- Determina la tavola della verità di $p \wedge (\sim q)$.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione p : *le rose sono rosse*, la proposizione q : *le rose sono appassite* e la congiunzione $p \wedge q$: *le rose sono rosse e appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme B delle rose rosse e il sottoinsieme C delle rose appassite. La congiunzione $p \wedge q$ è allora rappresentata dall'insieme intersezione di B e C , denotato da $B \cap C$ e formato da tutti gli elementi di A che sono sia in B che in C : $B \cap C = \{a \in A \mid a \in B \text{ e } a \in C\}$.



Esercizio: Mostra che $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Disgiunzione

La **disgiunzione** di due proposizioni p e q è la proposizione che è falsa quando entrambe p e q sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tavola della verità di $p \vee q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q , è la seguente:

E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni p e q :

a) la **disgiunzione inclusiva** quando p e q possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

E' richiesto il biglietto o l'abbonamento

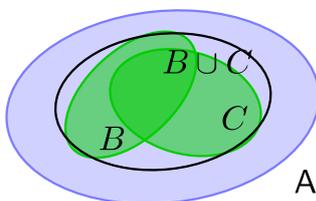
b) la **disgiunzione esclusiva** quando p e q non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con $p \dot{\vee} q$)

2 > 3 oppure 2 < 3

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione p : *le rose sono rosse*, la proposizione q : *le rose sono appassite* e la disgiunzione $p \vee q$: *le rose sono rosse o appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme B delle rose rosse e il sottoinsieme C delle rose appassite. La disgiunzione $p \vee q$ è allora rappresentata dall'insieme unione di B e C , denotato da $B \cup C$ e formato da tutti gli elementi di A che sono in B o in C :

$$B \cup C = \{a \in A \mid a \in B \text{ oppure } a \in C\}.$$

La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui $B \cap C$ risulta vuoto.



- Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \vee p$.
 - Determina la tavola della verità di $(p \vee q) \vee r$ (per tre proposizioni p, q, r).
 - Determina la tavola della verità di $\sim(p \vee q)$.
 - Determina la tavola della verità di $(\sim p) \vee q$.
 - Determina la tavola della verità di $p \vee (\sim q)$.

Equivalenza

Due proposizioni sono (*logicamente*) *equivalenti* se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

Esempio: Mostra che $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ sono equivalenti.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.

Ad esempio, possiamo pensare

p : questo angolo è acuto

q : questo angolo è ottuso

$\neg(p \vee q)$: non è vero che questo angolo è acuto o ottuso.

$\neg p \wedge \neg q$: questo angolo non è acuto e non è ottuso.

Esercizi Mostra che la congiunzione è commutativa, cioè $p \wedge q$ è equivalente a $q \wedge p$

- Mostra che la congiunzione è associativa, cioè $(p \wedge q) \wedge r$ è equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$

- Mostra che $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ sono equivalenti.

Esercizio Costruisci la tavola della verità per $(p \vee \neg q) \wedge r$.

Dobbiamo considerare tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni semplici coinvolte, e dobbiamo quindi considerare $2^3 = 8$ possibilità.

p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Proposizioni condizionali

Una **proposizione condizionale** è una proposizione della forma $p \Rightarrow q$, ove p e q siano due proposizioni. Ad esempio, se p : il rubinetto è chiuso e q : non esce acqua dal mio lavandino, otteniamo la proposizione condizionale *Se il rubinetto è chiuso, non esce acqua dal mio lavandino*.

Va osservato che non è rilevante che l'implicazione sia vera o falsa.

Esempi di una proposizione condizionale vera Se x è un numero pari, allora $x + 1$ è un numero dispari (b) Se $2 < 3$, allora $4 < 9$. (c) Se $3 < 2$, allora $9 < 4$.

Esempi di una proposizione condizionale falsa (a) Se x è un numero pari, allora $x + 2$ è un numero dispari. (b) Se $2 < 3$, allora $9 < 4$.

Esercizio: Trova la negazione della proposizione 'Se corro, allora ho sete'.

In una proposizione condizionale $p \Rightarrow q$, la proposizione p è detta **antecedente (o ipotesi)**, mentre la proposizione q è detta **conseguente (o tesi)**. Diciamo anche che p è **condizione sufficiente** per q , e che q è **condizione necessaria** per p .

La tavola della verità di una proposizione condizionale è la seguente (notare che, se l'ipotesi è falsa, si assume che l'implicazione sia vera sempre):

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ad ogni proposizione condizionale $p \Rightarrow q$ risultano associate in modo formale altre proposizioni condizionali:

$q \Rightarrow p$ l'implicazione inversa

$\neg p \Rightarrow \neg q$ l'implicazione contraria

$\neg q \Rightarrow \neg p$ l'implicazione contronominale

Esempio: Considera la proposizione condizionale 'Se due rette del piano sono ortogonali, sono incidenti'. L'implicazione inversa è 'Se due rette del piano sono incidenti, allora sono ortogonali'. L'implicazione contronominale è 'Se due rette del piano non sono incidenti, non sono ortogonali.'

Esercizio: Trova l'implicazione inversa e la contronominale di 'Se corro, allora ho sete'.

Ogni proposizione condizionale è equivalente alla sua contronominale:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Esercizio: (a) Trova una implicazione condizionale vera la cui inversa sia falsa.

- (b) $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge \neg q$.
- (c) $\neg(p \wedge q)$ è equivalente a $p \Rightarrow \neg q$.
- (d) $p \wedge (q \vee r)$ è equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
- (e) $p \vee (q \wedge r)$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Una **coimplicazione** $p \Leftrightarrow q$ è vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità. La corrispondente tavola della verità è:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esercizio: $p \Leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Le coimplicazioni sono frequenti in matematica; le definizioni sono spesso coimplicazioni.

Esempi (a) Un quadrilatero è un rettangolo se e solo se ha tutti gli angoli retti.

$$(b) \quad x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow x+3=0 \text{ or } x-4=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ or } x=4.$$

Sitografia

- <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/economia/logicainsiemistica.pdf> Prof. Garetto, Elementi di Logica,
- <https://www.youtube.com/watch?v=JczNoE43IuM> proposizioni, negazione, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=fjT7fnvtU> congiunzione, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=ljX1AHKHFku> disgiunzione inclusiva, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=ehDBkiEAx9Y> disgiunzione esclusiva, tavole della verità
- <https://www.youtube.com/watch?v=Z7P-H5iA8QY> implicazione
- <https://www.youtube.com/watch?v=QCnB4bi1ay0> doppia implicazione