L'algoritmo di divisione (nella scrittura decimale posizionale)

La procedura proposta è liberamente tratta da Maria Montessori, Psicoaritmetica, Opera Nazionale Montessori.

Come prerequisito, si assume la conoscenza delle tabelline (oppure si prevede di disporre di una tavola pitagorica). Si assume anche la comprensione del significato della divisione, e ci si limita allo studio del metodo di calcolo. Gli esempi riportati sono abbastanza elaborati: in classe, si introdurranno prima esempi analoghi, ma meno complessi. Inizialmente si lavora solo distribuendo il materiale: la scrittura algebrica comparirà solo come trascrizione del lavoro con il materiale e, in seguito, come sostituzione del materiale. L'utilizzo del materiale è finalizzato alla comprensione dell'algoritmo, e quindi solleciteremo i bambini ad abbandonarlo, per concentrarsi sulla trattazione algebrica della divisione.

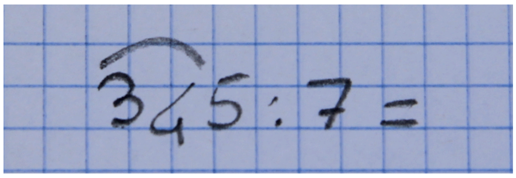
La divisione in colonna (divisore a 1 cifra)

Utilizziamo il materiale multibase, o dei ritagli di carta (su fogli con quadretto di 1 cm, prepariamo vari quadrati grandi come un quadretto per rappresentare le unità, rettangoli 1x10 per rappresentare le decine e quadrati 10x10 per rappresentare le centinaia). Il materiale sarà trattato come se fosse prezioso, in modo che sia desiderabile riceverne una quota maggiore.

Vogliamo calcolare 345 : 7. Rappresentiamo 345 con il materiale (3 quadrati, 4 aste, 5 quadretti sciolti). Lavoriamo con il materiale sulla cattedra, in modo che tutti possano vedere e disponiamo 7 segnaposto (essi rappresentano i destinatari: 7 vassoi, o 7 pupazzi o 7 figurine) e distribuiamo il materiale formando un mucchietto vicino ad ogni segnaposto (o in ciascun vassoio). Contemporaneamente, scriviamo alla lavagna 345 : 7 = .

Chiediamo ai bambini se distribuire per primi i quadretti o i pezzi più grandi. Facilmente i bambini indicheranno che conviene distribuire per primi i quadrati delle centinaia. Abbiamo tre pezzi da 100 da distribuire ai sette destinatari: non ne abbiamo abbastanza da darne un pezzo da 100 per ciascuno. Che fare? Rinunciamo a distribuirli? I bambini concluderanno che è possibile scambiare ogni pezzo da cento con 10 pezzi da 10, e distribuire le decine.

Dai 3 pezzi da cento otteniamo 30 decine che, unite alle 4 decine che avevamo già, danno 34 decine. Nella divisione alla lavagna, distinguiamo con un archetto le prime due cifre 34 del dividendo, per indicare la quantità considerata.



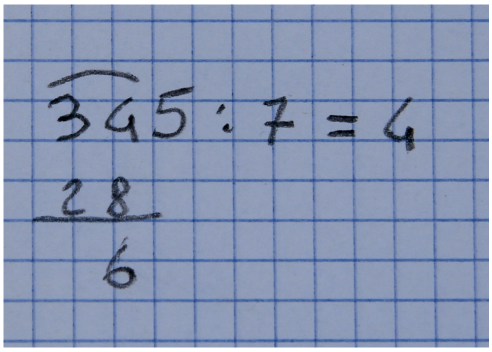
Quanti pezzi da 10 possiamo dare ai cavalieri? servono 7 decine per poterne dare una ciascuno, 14 = 7 × 2 per darne due ciascuno e così via proseguendo con la tabellina del 7:

7, 14, 21, 28

e qui ci fermiamo perché il successivo è 35, che è maggiore di 34, e non ne abbiamo abbastanza. Concludiamo che, al massimo, possiamo dare 4 decine ciascuno.

Poiché 28 = 4 × 7, diciamo che il 7 sta 4 volte nel 34, con il resto di 6. Distribuiamo 4 decine ad ogni cavaliere e controlliamo che ci restino 6 decine.

Alla lavagna, scriviamo 4 dalla parte del risultato; calcoliamo il prodotto 4 × 7 = 28 e lo trascriviamo sotto le cifre 34 segnate prima. Abbiamo usato le 28 decine per distribuirle ai cavalieri: per sapere quante ne restano dobbiamo fare la sottrazione. Tiriamo una piccola riga e facciamo la sottrazione in colonna, e di nuovo troviamo che ci avanzano 6 decine.



A questo punto, come continuare la divisione? Non possiamo dare una decina a ciascuno, ma possiamo scambiare ogni decina con 10 quadretti separati. Dalle 6 decine otteniamo 60 quadretti, ai quali vanno aggiunti i 5 che avevamo già, per un totale di 65.

Per segnalare che utilizziamo anche le unità, alla lavagna poniamo un archetto rovesciato sopra il cinque e ricopiamo la cifra 5 all'altezza del 6 che indicava le decine rimaste: diciamo che "abbassiamo il cinque". Abbiamo 65 unità.

$$\begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 : 7 = 4 \\ \underline{2} & \underline{8} & \\ & 6 & 5 \end{array}$$

Quante ne possiamo dare a ciascuno dei 7 bambini? Di nuovo, consideriamo la numerazione per 7

7 14 21 28 35 42 49 54 63

fermandoci a 63 perché il numero successivo sarebbe 70, che è maggiore di 65.
Poiché 63 = 7 × 9, possiamo dare a ciascun cavaliere 9 unità e diciamo che il 7 sta 9 volte nel 65.
Quante unità restano? Ne avevamo 65 e ne abbiamo utilizzate 63; quindi ne restano 65-63 =2.

Alla lavagna, aggiungiamo la cifra 9 nel risultato; poi calcoliamo 9 × 7 = 63, che riportiamo sotto il numero 65, e operiamo la sottrazione. Il risultato è 49 e il resto è 2, come avevamo ricavato con il materiale.

$$\begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \quad : 7 = 4 \\ \underline{2} & \underline{8} & \\ & 6 & 5 \\ & \underline{6} & \underline{3} \\ & & 2 \end{array}$$

Possiamo commentare assieme che non è necessario ripercorrere la numerazione per 7 ogni volta: la numerazione serve per calcolare la divisione; quindi, diventa inutile se abbiamo intuito la risposta. Quando il divisore è a due cifre, raramente si opera la numerazione, ma si tende piuttosto a fornire una stima del risultato e a verificarne la correttezza: per facilitare il lavoro successivo, mettiamo bene in evidenza che la cifra da aggiungere al risultato, moltiplicata per il divisore, deve dare un numero più piccolo della quantità che stiamo dividendo in quel momento (siano esse centinaia, decine o unità) e deve essere la cifra maggiore possibile con questa proprietà.
Anche il prodotto e la sottrazione per calcolare il resto diventano inutili se abbiamo già capito quale sia il resto.

Divisore a due cifre

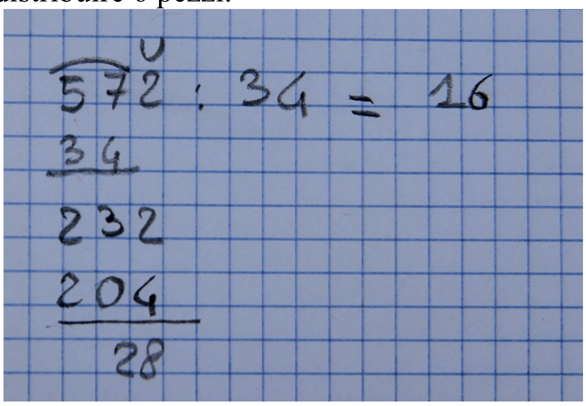
Calcoliamo 572 : 34. Commentiamo che non c'è spazio sulla scrivania per 34 segnaposti, e quindi occorre organizzare la distribuzione in modo differente. Organizziamo i bambini in squadre da 10; formeremo così 3 squadre e resteranno 4 bambini. Per rappresentare i bambini utilizziamo gli stessi segnaposti utilizzati in precedenza, mentre per rappresentare ciascuna squadra da 10 prendiamo nuovi segnaposti. Ad esempio, se i segnaposti erano figurine, per le squadre possiamo usare mazzetti di 10 figurine legate da un elastico; anche un foglietto colorato con la scritta 10 può andare bene. In ogni squadra, eleggiamo un caposquadra.
Ora, sulla cattedra, abbiamo 3 segnaposti per le squadre e 4 per i bambini singoli.
Come operare la ripartizione? Se diamo un quadretto a ciascun bambino singolo, ad ogni squadra ne vanno dati 10 (cioè una decina); se diamo una decina a ciascun bambino singolo, ogni squadra deve avere 10 decine, cioè un quadrato da 100. Dobbiamo quindi lavorare con due tipologie di pezzi: uno più grande da dare alle squadre e quello subito più piccolo da dare ai bambini singoli.
Iniziamo la distribuzione: abbiamo 5 centinaia, 7 decine e due unità. Come prima, cominciamo distribuendo le centinaia: non possiamo dare un centinaio a ciascun bambino, perché non abbiamo i pezzi più grandi per le squadre. D'altra parte, abbiamo detto che dobbiamo usare pezzi di tipo diverso: proviamo quindi con centinaia e decine. Ci preoccupiamo inizialmente del materiale da distribuire alle squadre (che ne necessitano una quantità maggiore). Diamo un pezzo da cento ad ogni squadra; in corrispondenza, consegniamo un pezzo da 10 ad ogni bambino singolo. Ne

abbiamo abbastanza per tutti? Sì, perché i pezzi da cento sono 5 e le squadre 3, mentre i pezzi da 10 sono 7 e i bambini 4: ci servono 3 pezzi da 100 e 4 da 10, per un totale di 34 decine. Non possiamo distribuire un secondo pezzo perché non abbiamo abbastanza centinaia.
Dopo la distribuzione ci avanzano 2 centinaia e 3 decine, cioè 23 decine.
Riportiamo alla lavagna i passaggi operati: scriviamo l'operazione "572 : 34 =", raccogliamo con un archetto le cifre 57 che stiamo considerando e chiediamo "quante volte 34 sta nel 57?". Commentiamo che 34 sta nel 57 una sola volta, perché 34 × 2 = 68 supera 57. Dunque scriviamo 1 dalla parte del risultato. Per controllare quanto materiale abbiamo già distribuito, moltiplichiamo 1 per il divisore 34, ottenendo 34; dunque abbiamo usato 34 decine e scriviamo questo numero sotto il numero 57 delle decine che avevamo. Operiamo la sottrazione 57–34 = 23 per calcolare quante decine sono rimaste. Per proseguire la divisione, abbassiamo la cifra 2 delle unità.

5 7 2 : 3 4 = 1
3 4
2 3 2

Torniamo al materiale per proseguire la divisione e facciamo intervenire anche le 2 unità; abbiamo 23 decine e 2 unità (cioè 232 unità). Poiché le squadre sono 3 e abbiamo 23 decine, potremmo dare 7 decine per ciascuno. Calcoliamo il prodotto 7 × 34 = 238 e lo scartiamo perché è maggiore 232. Non ci possiamo permettere di distribuire 7 pezzi e proviamo quindi con 6; calcoliamo dunque 6 × 34 = 204, che è minore di 232. Possiamo quindi distribuire 6 pezzi.

Alla lavagna, aggiungiamo la cifra 6 al risultato; poi, per calcolare il resto, riportiamo il risultato 204 delle unità utilizzate e calcoliamo la differenza 232 – 204 = 28. Dunque, il risultato è 16, con resto di 28. Notiamo che il resto deve sempre essere minore del divisore, perché altrimenti avremmo potuto distribuire altri quadretti.



Dunque 572 = 16 × 34 + 28

Calcoliamo ora 732: 34.
Rappresentiamo 732 con il materiale, e 34 con i segnaposti delle 3 squadre e dei 4 bambini.
Abbiamo 7 centinaia, e quindi potremmo dare 2 centinaia ad ogni squadra, ma le tre decine non sono sufficienti per darne una ad ogni bambino; riflettendo meglio, però, alle squadre sono sufficienti 2 × 3 = 6 centinaia e ce ne avanza ancora una: se la dividiamo in 10 decine, abbiamo 13 decine, grazie alle quali possiamo dare 2 decine ad ogni bambino singolo. Infatti, 2 × 34 = 68 è minore di 73. Ci avanzano 73 – 68 = 5 decine. Proseguiamo la divisione e ricaviamo che il risultato è 16 con resto 18, cioè 732 = 21 × 34 + 18.

7 3 2 : 3 4 = 2 1
6 8
5 2
3 4
1 8

Questo esempio insegna che, ad ogni passo, la domanda 'quanti oggetti posso dare alle squadre' fornisce una stima della cifra che va riportata nel risultato (che è sicuramente uguale o minore); non è detto che questa sia già la risposta: lo devo verificare e, se questa cifra è eccessiva, procedo abbassandola di uno e verifico nuovamente. Continuo ad abbassarne il valore, finchè il suo prodotto con il divisore non supera più il materiale in distribuzione.
Il controllo se la cifra è esatta può essere fatta in due modi differenti.
Calcoliamo ad esempio 732: 14. Ora abbiamo una unica squadra. Considero le 7 centinaia e le 3 decine e inizio distribuendo questo materiale.
primo modo: Se consegno 7 centinaia alla squadra, avrei bisogno di 7 × 4 = 28 decine da dare ai bambini singoli. Ma ho solo 3 decine, e non sono sufficienti. Provo con 6: se consegnassi 6 centinaia alla squadra, mi avanzerebbero 1 centinaio e 3 decine, cioè 13 decine; ma avrei bisogno di 6 × 4 = 24 decine (nota: potevo calcolare questo numero anche come 28 – 4) decine. Provo con 5: se consegnassi 5 centinaia alla squadra, e mi resterebbero 2 centinaia e 3 decine, cioè 23 decine. Poiché avrei bisogno di 5 × 4 = 20 decine, le decine sarebbero sufficienti: procedo quindi consegnando 5 centinaia alla squadra e cinque decine a ciascun bambino. Mi avanzano 23 – 20 = 3 decine.
secondo modo: Se consegno 7 centinaia alla squadra, avrei bisogno in tutto di 7 × 14 = 98 decine da dare ai bambini singoli. Ma ho solo 73 decine, e non sono sufficienti. Provo con 6: se consegnassi 6 centinaia alla squadra, avrei bisogno complessivamente di 6 × 14 = 84 decine (potevo ottenere questo numero anche come 98 – 14). Provo con 5: se consegnassi 5 centinaia alla squadra, avrei bisogno complessivamente di 5 × 14 = 70 decine, e le decine sarebbero sufficienti: procedo quindi consegnando 5 centinaia alla squadra e cinque decine a ciascun bambino singolo. Mi avanzano 73–70 = 3 decine.

Proseguiamo la divisione.

$$\begin{array}{lll}
7 & 3 & 2 : 1\,4 = 5\,2 \\
\underline{7} & \underline{0} & \\
 & 3 & 2 \\
 & \underline{2} & \underline{8} \\
 & & 4
\end{array}$$

Quando i calcoli coinvolgono numeri grandi, e il materiale è stato abbandonato, spesso si ricorre al secondo metodo. Per aiutare la gestione algebrica, si possono colorare diversamente le cifre in base al valore assunto nella scrittura posizionale.