Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corsi di Laurea in Ingegneria Energetica, Gestionale e Meccanica - Lettere P-Z

Esame di Geometria (Prof. F. Tovena) 2013

**Argomenti**: autovettori e autovalori di una matrice quadrata e di un endomorfismo, autospazi, molteplicita' algebrica e geometrica di un autovalore, criterio di diagonalizzabilita' di un endomorfismo.

1) *Considera l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *definito da:*

$$f(x, y, z) = (x, 2x - 2y - 2z, 2x - 3y - z).$$

*a) Determina, se è possibile, una base* $R$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che la matrice* $D = M_R(f)$ *di* $f$ *nel riferimento* $R$ *sia diagonale.*

*b) Sia* $A$ *la matrice che rappresenta* $f$ *rispetto alla base canonica di* $\mathbf{R}^3$*. Determinare una matrice invertibile* $P$ *tale che,* $D = P^{-1}\, A\, P$*.*

**Soluzione:** a) La matrice $A$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$p_f(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,(-\lambda-4).$$

Dunque $f$ ha due autovalori: $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica uguale a 2, e $\lambda_2 = -4$, di molteplicità algebrica uguale a 1. In particolare, il polinomio caratteristico di $f$ si scompone come prodotto di fattori lineari in $\mathbf{R}$. Affinché $f$ sia diagonalizzabile, occorre mostrare che molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore. Sicuramente ciò accade per $\lambda_2 = -4$, perché la sua molteplicità algebrica è 1. La molteplicità geometrica $g(f, 1)$ di $\lambda_1 = 1$ è per definizione uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente $V(f, 1) = ker(f - \omega_1)$ ed è quindi uguale a $3 - rg(A - I)$. Ora

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2 ed è uguale alla sua molteplicità algebrica. Dunque $f$ è diagonalizzabile.

Una base $R$ rispetto alla quale la matrice associata a $f$ sia diagonale è una qualunque base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per $f$. Per determinare una tale base $R$, determiniamo separatamente una base per ciascun autospazio: la base $R$ sarà l'unione delle basi degli autospazi. Cerchiamo quindi una base dell'autospazio $V(f, 1)$ relativo all'autovalore 1 ed una di $V(f, -4)$, relativa all'autosalone -4, poi ne prendiamo l'unione. Lo spazio $V(f, 1)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente all'equazione $2x_1 - 3x_2 - 2x3 = 0$. Dunque

$$V(f,1) = \{(3h+2k, 2h, 2k) | h, k \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_1} = (3,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$.

L'autospazio $V(f,-4)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A+4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema $x_1 = 0, x_2 = x_3$. Dunque

$$V(f,-4) = \{(0,h,h) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_3} = (0,1,1)$. La base $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ soddisfa le richieste e

$$M_R(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Sia $C$ la matrice le cui colonne sono formate dalle coordinate dei vettori del riferimento scelto $R$:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, $C$ è la matrice associata all'identità di $\mathbf{R}^3$, ove si consideri il riferimento $R$ nel dominio, e la base canonica nel codominio: se $\mathbf{v} = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, si ha che $C\,\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. D'altra parte, se si scrive $f(\mathbf{v}) = y_1'\mathbf{v}_1 + y_2'\mathbf{v}_2 + y_3'\mathbf{v}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, valgono le relazioni: $\mathbf{y}' = D\,\mathbf{x}'$, $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$, $C\,\mathbf{y}' = \mathbf{y}$. Ne segue che $C\,\mathbf{y}' = A\,C\,\mathbf{x}'$ e $D = C^{-1}\,A\,C$. Dunque, la matrice $P = C$ soddisfa le richieste.

2) *Considera la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Determina gli autospazi di $B$ ed una loro base. Discuti se $B$ è diagonalizzabile su* $\mathbf{R}$.

**Soluzione** Il polinomio caratteristico $p_B(\lambda)$ di $B$ è:

$$det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-4-\lambda) det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^2(4+\lambda)^2$$

Gli autovalori di $B$ sono dunque $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$ ed entrambi hanno molteplicità algebrica 2.

L'autospazio $V(B,2)$ relativo all'autovalore 2 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} V(B,2) &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1=-x_2, x_3=0, x_4=0\} = \\ &= \{(h,-h,0,0)|h \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a 1, mentre la molteplicità algebrica è 2: dunque la matrice $B$ non è diagonalizzabile.

L'autospazio $V(B,-4)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$V(B,-4) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1=x_3=x_4=0\} = \{(0,0,h,0)|h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore $-4$ è pari a 1 e la matrice $B$ non è diagonalizzabile.

**Esercizi da svolgere.**

1) Considera l'endomorfismo $f$ di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(x,y,z) = (3x+y+2z, -4x-2y-2z, 2x+2y)$.

   a) Determina gli autovalori di $f$ e gli autospazi corrispondenti.

   b) Discuti se $f$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

2) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

3) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale $h$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinare le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di $h$).

b) Per quali valori di $h$ gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per quali valori di $h$ la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e qual è una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$?

4) Determina gli autovalori ed una base di ciascun autospazio dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 4x - 2y - 4z, 4x - 4y - 2z).$$

5) Determina il polinomio caratteristico della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Siano fissate le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Verifica che $A_1$ e $A_2$ hanno entrambe polinomio caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^2$.

b) Determina, per ciascuna matrice, gli autovalori e i relativi autospazi.

c) Le matrici sono simili tra loro?

d) Calcola la matrice $\mathbf{A}_1^n$ per ogni $n \geq 0$.