

Esercizi su Matrici e determinante.

Argomenti: Trasposta di una matrice. Determinante. Inversa di una matrice.

- 1) Determina la matrice trasposta, per ciascuna delle matrici seguenti.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 12 & 48 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 2) Determina la matrice inversa per ciascuna delle seguenti matrici.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\det A_3 = 10; A_1^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \det A_2 = 24; A_2^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 2 & -9 & 6 \end{pmatrix}; \det A_3 = 10;$$

$$A_3^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ -1 & 11 & -4 \\ -1 & -9 & 6 \end{pmatrix}.)$$

- 3) Per ciascuna matrice, controllare se è invertibile e, in caso positivo, determinarne l'inversa. Determina la matrice inversa per ciascuna delle seguenti matrici.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 4) Calcola il determinante della matrice A utilizzando lo sviluppo di Laplace. Poi calcolalo nuovamente utilizzando la riduzione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} [\det = 6]$$

- 5) Calcola il determinante della matrice B utilizzando la riduzione della matrice.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione (le procedure corrette sono molte):

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4.$$