Esercizi svolti

Classificazione proiettiva delle coniche

Nel piano proiettivo complesso, sia fissato un sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. I cambi di riferimento permessi sono tutti e soli i cambi di riferimenti proiettivi.

Problema 7.1. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0^2 - 4X_0X_2 = 0$. *Mostrare che i punti fondamentali* $P_1[0,1,0]$ *e* $P_2[0,0,1]$ *appartengono alla conica, e discutere se essi sono punti semplici o doppi per* $\mathbf{\Gamma}$.

Soluzione. I punti P_1 e P_2 appartengono alla conica, perchè nell'equazione non compaiono i termini in X_1^2 e X_2^2 rispettivamente. Il punto P_1 è un punto doppio, perché nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ non compaiono termini in X_1. Il punto P_2 è un punto semplice per $\mathbf{\Gamma}$, perché nell'equazione della conica compare un termine in X_2.

Problema 7.2. Classificazione proiettiva di una conica di rango 1 *Si consideri la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:*

$$25X_0^2 - 20X_0X_1 + 10X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

a) Determinare l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determinare un riferimento proiettivo nel quale la conica $\mathbf{\Gamma}$ *assume l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 5 \\ -10 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ della conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, dunque la corrispondente equazione canonica proiettiva è $Y_0^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ è composta da una retta r, con molteplicità 2. L'equazione della sua componente (che coincide con il luogo dei punti doppi) è $5X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$, come si ricava facilmente da una riga della matrice $\mathbf{A}$. La retta r è la retta che passa per i punti $B_1[2,5,0]$ e $B_2[1,0,-5]$. In un qualsiasi sistema di riferimento con coordinate $[Y_0, Y_1, Y_2]$ in cui i punti B_1 e B_2 assumono coordinate $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, la retta r ha equazione $Y_0 = 0$ e quindi la conica $\mathbf{\Gamma}$ è in forma canonica. Ad esempio, il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

soddisfa le richieste. Il corrispondente riferimento è formato dai punti $[1,0,0]$, B_1, B_2 come punti fondamentali e $U[4,5,-5]$ come punto unità.

Problema 7.3. Classificazione proiettiva di una conica di rango 2 *Si consideri la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:* $2X_0^2 + 3X_0X_1 + 2X_0X_2 + 3X_1X_2 = 0$
a) Determinare l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determinare un riferimento proiettivo nel quale la conica $\mathbf{\Gamma}$ *assume l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ della conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 2, dunque l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio, il punto $Q[3, -2, -3]$.
Primo modo Il punto $[1, 0, 0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché l'elemento di prima riga e prima colonna di $\mathbf{A}$ (che coincide con $(1, 0, 0)\mathbf{A}(1, 0, 0)^t$ è $2 \neq 0$; la polare di $[1, 0, 0]$, di equazione $(1, 0, 0)\mathbf{AX} = 4X_0 + 3X_1 + 2X_2 = 0$, contiene il punto $[0, 2, -3]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0, 2, -3)\mathbf{A}(0, 2, -3)^t = -18 \neq 0$.

Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}',$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $2X'^2_0 - 18X'^2_1 = 0$.
Un cambio cercato è dunque

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}i & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

ottenuto dal precedente moltiplicando le colonne per un opportuno coefficiente, in modo tale da rendere uguali a 1 i coefficienti dei termini dell'equazione.
Secondo modo La conica $\mathbf{\Gamma}$ interseca la retta $X_0 = 0$ (che non passa per Q) nei punti $B_1[0, 1, 0]$ e $B_2[0, 0, 1]$. In un qualsiasi sistema di riferimento con coordinate $[Y_1, Y_2, Y_3]$ in cui il punto doppio Q assume coordinate $[0, 0, 1]$, l'equazione della conica $\mathbf{\Gamma}$ diventa della forma $aY_0^2 + 2bY_0Y_1 + cY_1^2 = 0$. Se chiediamo anche che, nel nuovo sistema, i punti B_1, B_2 abbiano coordinate $[1, i, 0]$, $[1, -i, 0]$ rispettivamente, si ottiene che $a + 2bi - c = 0$ e $a - 2bi - c = 0$, dunque $a = c$ e $b = 0$ e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ assume la forma $aY_0^2 + aY_1^2 = 0$, divenendo l'equazione canonica proiettiva. Il cambio di coordinate cercato avrà equazione

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u & 1 & 1 \\ v & i & -i \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \text{ con } \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 & 1 \\ v & i & -i \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, il cambio di coordinate

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 1 \\ -i/3 & i & -i \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/2 & -i/2 & -2 \\ 1/2 & i/2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

soddisfa le richieste. Il corrispondente riferimento è formato dai punti $[0, 1, 1]$, $[0, -1, 1]$, Q come punti fondamentali e $U[3, -(3 + i)/2, (-5 + i)/2]$ come punto unità; tali punti si ricavano assegnando a $\mathbf{Y}$ le coordinate dei punti fondamentali e ricavando le originarie coordinate dei punti.

Problema 7.4. Classificazione proiettiva di una conica di rango 3 *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$.
a) Determinare l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$.

b) Determinare un triangolo autopolare per $\mathbf{\Gamma}$.
c) Determinare un cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

della conica ha rango 3. Dunque l'equazione canonica proiettiva della conica è $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$.
b) Il punto $S[1, 0, 0]$ non appartiene alla conica $\mathbf{\Gamma}$. La sua polare s ha equazione $(1\ 0\ 0)\mathbf{AX} = 2X_0 - (1/2)X_2 = 0$ cioè $4X_0 - X_2 = 0$. Su s considero il punto $T[0, 1, 0]$ che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$. La polare t di T è la retta di equazione $(0\ 1\ 0)\mathbf{AX} = X_1 + X_2 = 0$. L'intersezione tra t e s è il punto $V[1, -4, 4]$, la cui polare v ha equazione $(1\ \ -4\ \ 4)\mathbf{AX} = -8\,X_2 = 0$ cioè $X_2 = 0$ (come doveva, perché v coincide con la retta per S e T). Le rette s, t, v formano un triangolo autopolare.
c) Assumendo S, T, V come punti fondamentali del riferimento, la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ diventa diagonale. Scegliendo ad esempio il cambio $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{X}}$, con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, matrice di $\mathbf{\Gamma}$ diventa

$$\tilde{\mathbf{M}}^t\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

ove i termini fuori dalla diagonale si annullano perchè ciascuno dei 3 punti appartiene alle polari degli altri due, mentre i termini sulla diagonale si ricavano calcolando

$$b_1 = (1\ 0\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,\ b_2 = (0\ 1\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,\ b_3 = (1\ -4\ \ 4)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -32.$$

Per ottenere il cambio di coordinate cercato $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$, occorre dividere la colonna j-ma di $\tilde{\mathbf{M}}$ per una radice quadrata di b_j $(j = 1, 2, 3)$, in modo che il corrispondente valore sulla diagonale diventi 1: ad esempio, si può dividere la prima colonna per $\sqrt{2}$ e la terza per $i\sqrt{32}$, lasciando immutata la seconda colonna. Si ricava

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 1 & -4/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 0 & 4/(i\sqrt{32}) \end{pmatrix}$$

Coniche nel piano proiettivo complessificto

L'inclusione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induce una inclusione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, perché due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$. In particolare, ogni riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: un tale riferimento è detto reale. Nel seguente gruppo di esercizi consideriamo **solo riferimenti reali** di $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Problema 7.5. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 - 2X_1X_2 = 0$ *e siano* r *e* s *le rette di equazioni* $r : X_0 - 2X_1 - 2X_2 = 0$ *e* $s : X_0 - X_1 - X_2 = 0$ *rispettivamente.*

a) Determinare i punti di intersezione intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ *con le rette* r, s *rispettivamente.*

b) Determinare, nel fascio di rette generato da r *e* s*, le rette tangenti a* $\mathbf{\Gamma}$.

Soluzione. a) L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, X_0 = 2X_1+2X_2$, equivalente a $X_2^2 + 2X_1X_2 + 5X_1^2 = 0, X_0 = 2X_1 + 2X_2$. Risolvendo il sistema (il polinomio quadratico ha discriminante negativo), si ricava che tale intersezione è formata da due punti complessi coniugati, di coordinate $[-4+4i, 1, -3+2i]$, $[-4-4i, 1, -3-2i]$ rispettivamente.

Analogamente, l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e s è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, X_0 = -X_1-X_2$, equivalente a $X_2^2 + 4X_1X_2 + 3X_1^2 = 0, X_0 = -X_1 - X_2$. Risolvendo il sistema (il polinomio quadratico ha discriminante positivo), si ricava che tale intersezione è formata da due punti complessi coniugati, di coordinate $[0, 1, -1]$, $[2/3, 1, -1/3]$ rispettivamente.

b) Poichè, in base a quanto visto nel punto a), la retta s non è tangente a $\mathbf{\Gamma}$, per risolvere l'esercizio è possibile parametrizzare il fascio di rette generato da r e s mediante l'equazione:

$$X_0 - 2X_1 - 2X_2 + t(X_0 - X_1 - X_2) = (1+t)X_0 - (2+t)X_1 - (2+t)X_2 = 0, \quad t \in \mathbb{C}$$

(cioè escludendo la retta s). L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta del fascio corrispondente al parametro t è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, (1+t)X_0-(2+t)X_1-(2+t)X_2 = 0$; per $t \neq -1$, il sistema è equivalente a $X_2^2 + \frac{6+4t}{1+t}X_1X_2 + \frac{5+3t}{1+t}X_1^2 = 0, X_0 = \frac{2+t}{1+t}(X_0+X_2)$. Sempre assumendo $t \neq -1$, l'annullarsi del discriminante del polinomio quadratico impone la condizione: $4t^2 + 16t + 16 = 4(t+2)^2 = 0$, cioè $t = -2$, corrispondente alla retta $X_0 = 0$ (che risulta quindi tangente). La retta corrispondente al valore $t = -1$ ha equazione $X_2 + X_3 = 0$ interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti, e dunque non è tangente.

Problema 7.6. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 1 *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $X_0^2 + 4X_2^2 + 4X_1X_2 = 0$.

a) Determinare l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$.

b) Determinare un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) L'esercizio è perfettamente analogo all'esercizio 7.1 svolto nel caso del piano proiettivo senza restrizione ai possibili cambi di riferimento. Infatti, la conica $\mathbf{\Gamma}$ è reale di rango 1, e dunque è una retta reale con molteplicità 2 e il cambio di coordinate proposto nell'esercizio 7.1 per metterla in forma canonica proiettiva era un cambio reale (purché si scelgano due punti reali sulla conica).

La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, e dunque è una retta doppia. La sua equazione canonica è $Y_0^2 = 0$.

b) L'equazione della componente di $\mathbf{\Gamma}$ si ricava dalla prima riga della matrice, ed è $X_0 + 2X_1 = 0$: due punti doppi distinti di $\mathbf{\Gamma}$ sono $B_1[0, 1, 0]$, $B_2[2, 0, -1]$. In un qualunque sistema di cui $[1, 0, 0]$, B_1, B_2 siano i punti fondamentali (con libertà di scegliere il punto unità) la conica è in forma canonica. Ad esempio, si può scegliere il cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 7.7. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con un unico punto reale *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$X_0^2 + 5X_1^2 + X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_2X_2 = 0.$$

a) Determinare l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determinare un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *che muti l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *nell'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ della conica ha rango 2 e quindi la conica ha per componenti due rette distinte, che possono essere complesse coniugate, oppure entrambe reali. L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta $X_2 = 0$ è una quadrica di equazione $X_0^2 + 5X_1^2 4X_0X_1 = 0$, $X_2 = 0$, formata da due punti complessi coniugati: in particolare, tale retta non passa per l'unico punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ e i due punti di intersezione appartengono a due componenti distinte di $\mathbf{\Gamma}$. Le componenti di $\mathbf{\Gamma}$ non possono dunque essere reali, perchè ogni retta reale contiene il coniugato di ogni suo punto immaginario. La conica $\mathbf{\Gamma}$ è dunque composta da due rette reali e la sua equazione canonica proiettiva reale è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio Q, le cui coordinate sono soluzione di $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Risolvendo il sistema, si trova $Q[-2, 1, -1]$. Il punto $[1, 0, 0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché

$$(1, 0, 0)\mathbf{A}(1, 0, 0)^t = 1 \neq 0;$$

la sua polare, di equazione $X_0 + 2X_1 = 0$, contiene il punto $[0, 0, 1]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0, 0, 1)\mathbf{A}(0, 0, 1)^t = 1 \neq 0$.

Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

Problema 7.8. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con infiniti punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.
a) Determinare l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale.*
b) Determinare un cambio (reale) di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *attraverso il quale la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *assuma l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La conica ha come componenti le due rette reali e distinte di equazioni $r_1 : X_1 = 0$ e $r_2 : X_0 + X_2 = 0$. In particolare, ha rango due ed ha infiniti punti reali: dunque la sua equazione canonica proiettiva è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

b) Nel riferimento cercato, le componenti di $\mathbf{\Gamma}$ devono assumere le equazioni $Y_0 - Y_1 = 0$ e $Y_0 + Y_1 = 0$ rispettivamente. Nel riferimento originario, il punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ è $Q[1, 0, -1]$, ottenuto intersecando le componenti di $\mathbf{\Gamma}$; la componente

r_1 è la retta per Q e per $P_1[1,0,0]$, mentre r_2 è la retta per Q e per $P_2[0,1,0]$. La conica $\mathbf{\Gamma}$ è in forma canonica in un qualsiasi riferimento in cui Q abbia coordinate $[0,0,1]$, P_1 abbia coordinate $[1,1,0]$ e P_2 abbia coordinate $[1,-1,0]$. Ad esempio, è possibile scegliere il cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 7.9. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con infiniti punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + 4X_2^2 + 2X_0X_1 + 6X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0.$$

a) Determinare l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determinare un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite che muti l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *nell'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ della conica ha rango 2 e quindi la conica ha per componenti due rette distinte, che possono essere complesse coniugate, oppure entrambe reali. Se le rette sono complesse coniugate, il loro unico punto reale è il punto doppio. Poichè $\mathbf{\Gamma}$ contiene il punto reale $[0,1,0]$ che è distinto dal punto doppio, la conica è composta da due rette reali e la sua equazione canonica proiettiva reale è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio Q, le cui coordinate sono soluzione di $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Risolvendo il sistema, si trova $Q[1,1,-1]$.

Il punto $[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché

$$(1,0,0)\mathbf{A}(1,0,0)^t = 2 \neq 0;$$

la sua polare, di equazione $2X_0 + X_1 + 3X_2 = 0$, contiene il punto $[0,3,-1]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0,3,-1)\mathbf{A}(0,3,-1)^t = -2 \neq 0$.

Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}',$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $2{X'}_0^2 - 2{X'}_1^2 = 0$.

Un cambio cercato è dunque

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}i & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Problema 7.10. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 3 a punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 6X_1X_2 = 0.$$

Determinare l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale e un cambio (reale) di coordinate* $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. **Primo modo** La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Osserviamo che il punto $S[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$, e dunque può essere utilizzato come vertice di un triangolo autopolare. La polare di S è la retta s di equazione $(1\,0\,0)\mathbf{A}\mathbf{X} = 2X_0 + X_1 + X_2 = 0$; si osservi che $(1\,0\,0)\mathbf{A}(1\,0\,0)^t = 2$ ha segno positivo. Sulla retta s, si consideri un punto T: ad esempio, si può scegliere $T[0,1,-1]$. La polare di T è la retta t di equazione $(0\,1\,-1)\mathbf{A}\mathbf{X} = -2X_1 + 2X_2 = 0$; si osservi che $(0\,1\,-1)\mathbf{A}(0\,1\,-1)^t = -4$ è non nullo (e dunque $T \notin \mathbf{\Gamma}$) e ha segno negativo. Si ponga V il punto di intersezione tra s e t: svolgendo i conti, si determinano le coordinate $V[0,1,1]$ che verificano la relazione $(0\,1\,1)\mathbf{A}(0\,1\,1)^t = 8 > 0$. L'equazione canonica di $\mathbf{\Gamma}$ è quindi $Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0$ e la conica è a punti reali.

Tramite il cambio $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{Y}}$, con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, i vertici del triangolo autopolare diventano punti fondamentali del rivestimento e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ diventa $\tilde{\mathbf{Y}}^t\,\tilde{\mathbf{M}}^t\,\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}\,\tilde{\mathbf{Y}} = 2\tilde{Y}_0^2 + 8\tilde{Y}_1^2 - 4\tilde{Y}_2^2 = 0$. Basta, quindi, scegliere $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Secondo modo Dopo aver controllato che $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 3, per determinarne l'equazione canonica proiettiva si può applicare il lemma 7.2.7, osservando che $a_{11} det \mathbf{A} < 0$, e quindi la conica ha punti reali.

Problema 7.11. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 3 senza punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + 4X_1^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 - 2X_1X_2 = 0.$$

a) Determinare l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale.*
b) Determinare un cambio (reale) di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$ *attraverso il quale la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *assuma l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. **Primo modo** La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Osserviamo che il punto $S[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$, e dunque può essere utilizzato come vertice di un triangolo autopolare. La polare di S è la retta s di equazione $(1\,0\,0)\mathbf{A}\mathbf{X} = 2X_0 - X_2 = 0$; si osservi che $(1\,0\,0)\mathbf{A}(1\,0\,0)^t = 2$ ha segno positivo. Sulla retta s, si consideri un punto T: ad esempio, si può scegliere $T[1,2,0]$. La polare di T è la retta t di equazione $(1\,2\,0)\mathbf{A}\mathbf{X} = 2X_0 + 4X_1 - 3X_2 = 0$; si osservi che $(1\,2\,0)\mathbf{A}(1\,2\,0)^t = 6$ è non nullo (e dunque $T \notin \mathbf{\Gamma}$) e ha segno positivo. Si ponga V il punto di intersezione tra s e t: svolgendo i conti, si determinano le coordinate $V[1,1,2]$ che verificano la relazione $(1\,1\,2)\mathbf{A}(1\,1\,2)^t = 2 > 0$. L'equazione canonica di $\mathbf{\Gamma}$ è quindi $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$ e la conica è senza punti reali.

Tramite il cambio $\mathbf{X} = \mathbf{M}'\mathbf{Y}'$, con $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, i vertici del triangolo autopolare diventano punti fondamentali del rivestimento e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ diventa $\mathbf{Y}'^t\, \mathbf{M}'^t\, \mathbf{A}\mathbf{M}'\, \mathbf{Y}' = 2Y'^2_0 + 6Y'^2_1 + 2Y'^2_2 = 0$. Basta, quindi, scegliere $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Secondo modo Dopo aver controllato che $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 3, per determinarne l'equazione canonica proiettiva si può applicare il lemma 7.2.7, osservando che det $\mathbf{A}_{00} > 0$ e $a_{22} det \mathbf{A} > 0$, e quindi la conica non ha punti reali.

Coniche affini

Nel piano affine (reale o complesso) sia fissato un sitema di riferimento con coordinate (x, y). Si consideri il completamento proiettivo con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ tali che $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ ove $X_0 \neq 0$. Negli esercizi successivi il piano proiettivo verrà pensato come il completamento proiettivo del piano affine.

Problema 7.12. *Determinare l'equazione omogenea del completamento proiettivo* $\mathbf{\Gamma}$ *della conica affine* γ *di equazione:* $2x^2 - 3y^2 + 5x - 2y + 3 = 0$.

Soluzione. L'equazione cercata di $\mathbf{\Gamma}$ è $2X_1^2 - 3X_2^2 + 5X_1X_0 - 2X_2X_0 + 3X_0^2 = 0$, ottenuta sostituendo x con X_1, y con X_2 e rendendo omogenea di secondo grado l'equazione tramite la variabile X_0.

Problema 7.13. *Determinare l'equazione affine del luogo dei punti propri della conica proiettiva* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione omogenea:* $2X_1^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_0 + 4X_2X_0 = 0$.

Soluzione. Un punto proprio ha coordinate omogenee della forma $[1, x, y]$, ove (x, y) siano le corrispondenti coordinate affini. I punti propri di $\mathbf{\Gamma}$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione (nelle variabili (x, y)) ottenuta dall'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ sostituendo X_1 con x, X_2 con y e valutando X_0 in 1. L'equazione del luogo cercato è dunque $2x + 1 + 2x\,y + 2x\, + 4y = 0$: il luogo dei punti propri di $\mathbf{\Gamma}$ è una conica affine e $\mathbf{\Gamma}$ è una conica propria.

Problema 7.14. *Discutere se le seguenti coniche proiettive sono proprie:*
a) $\mathbf{\Gamma}_1$ *di equazione:* $X_2X_0 + X_0^2 + 3X_1X_0 = 0$*;*
b) $\mathbf{\Gamma}_2$ *di equazione:* $X_1^2 + 3X_2^2 + 5X_0^2 + 2X_2X_0 = 0$.

Soluzione. a) In base alla Definizione 7.3.1, la conica $\mathbf{\Gamma}_1$ non è propria perché la sua equazione è divisibile per X_0.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}_2$ è propria perché la sua equazione non è divisibile per X_0, perché contiene termini in cui X_0 non compare.

Problema 7.15. Molteplicità dei punti fondamentali del riferimento. *Si decomponga in parti omogenee l'equazione affine di una conica affine* γ*:*

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0 = 0\,, \tag{7.19}$$

con f_i *omogenee di grado* i*. Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *il completamento proiettivo di* γ*. Provare che:*

a) γ *passa per l'origine* $O \Leftrightarrow f_0 = 0$.
b) γ *è singolare nell'origine* $O \Leftrightarrow f_1 = f_0 = 0$.

c) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *passa per* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *compare al più linearmente nell'equazione* $\Leftrightarrow$ *il coefficiente di* x^2 *in* f_2 *è nullo.*
d) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *non compare in* f.
e) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *passa per* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *compare al più linearmente nell'equazione* $\Leftrightarrow$ *il coefficiente di* y^2 *in* f_2 *è nullo.*
f) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *non compare in* f.

Soluzione. Si applica l'osservazione (7.2.1).

Problema 7.16. Punti semplici nei punti fondamentali. *Si decomponga in parti omogenee l'equazione affine di una conica affine* γ*:*

$$f(x,y) = f_2(x,y) + f_1(x,y) + f_0 = 0\,, \tag{7.20}$$

con f_i *omogenee di grado* i*. Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *il completamento proiettivo di* γ*. Provare che:*

a) L'origine O *è semplice per* $\gamma \Leftrightarrow f_0 = 0$ *ma* f_1 *non è identicamente nullo. In tal caso, l'equazione della retta tangente a* γ *in* O *è* $f_1 = 0$.
b) X_∞ *è semplice per il completamento* $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *compare linearmente, ma non con grado 2, in* f*. In tal caso, l'equazione della retta tangente a* $\mathbf{\Gamma}$ *in* X_∞ *è il coefficiente di* x *in* f.
c) Il completamento $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *non compare in* f.
d) Y_∞ *è semplice per il completamento* $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *compare linearmente, ma non con grado 2, in* f*. In tal caso, l'equazione della retta tangente a* $\mathbf{\Gamma}$ *in* Y_∞ *è il coefficiente di* y *in* f.
e) Il completamento $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *non compare in* f.

Soluzione. Si applica l'osservazione (6.2.21).

Problema 7.17. *Sia* γ *una conica affine di equazione:*

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

e sia $P(p_x, p_y)$ *un punto del piano che non sia un punto doppio per* γ*. Se la conica* γ *è a centro, si richiede che* P *non sia il centro di* γ*. Determinare l'equazione affine della polare di* P *rispetto al completamento proiettivo* $\mathbf{\Gamma}$ *di* γ.

Soluzione. La matrice di γ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$. La polare di P rispetto a γ ha equazione affine

$$(1\ p_x\ p_y)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (p_x a + p_y c + d)\,x + (p_x c + p_y b + e)\,y + (p_x d + p_y e + f) = 0.$$

Problema 7.18. *Sia* γ *la conica affine il cui completamento proiettivo sia la conica proiettiva* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:*

$$2X_1^2 - X_2^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 4X_2X_0 = 0.$$

a) Determinare i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ *e dedurre che la conica è a centro.*
b) Determinare il centro di $\mathbf{\Gamma}$.

Soluzione. a) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La conica ha due punti impropri distinti, perché $\det \mathbf{A}_{00} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. Tali punti si ottengono imponendo $X_0 = 0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ e sono quindi dati da $X_0 = 0$, $2X_1^2 - X_2^2 + 2X_1X_2 = 0$. Si ricava che i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono i punti $B_1[0, -1+\sqrt{3}, 2]$ e $B_2[0, -1-\sqrt{3}, 2]$. Osservando che la conica $\mathbf{\Gamma}$ è non degenere e ha due punti impropri distinti, si conclude che $\mathbf{\Gamma}$ è una conica a centro.

b) **Primo modo** Il centro è il punto di intersezione delle polari di una qualsiasi coppia di punti impropri distinti: ad esempio, basta intersecare le polari dei punti impropri $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$. La polare di $[0,1,0]$ è $2X_1 + X_2 = 0$ (è l'equazione corrispondente alla seconda riga di $\mathbf{A}$) e la polare di $[0,0,1]$ è $X_1 - X_2 + 2X_0 = 0$ (corrispondente alla terza riga di $\mathbf{A}$). Intersecando le due polari si ricavano le coordinate del centro $C[-3, 2, -4]$; le coordinate affini del centro è $C(-2/3, -4/3)$.
Secondo modo Poiché nel punto a) sono stati calcolati i punti impropri B_1 e B_2 di $\mathbf{\Gamma}$, è possibile calcolare le coordinate del centro come punto di intersezione delle polari di B_1 e B_2. La polare di B_1 ha equazione $(2\sqrt{3}+2)X_1 + (-3+\sqrt{3})X_2 + 4X_0 = 0$, mentre la polare di B_2 ha equazione $(-2\sqrt{3}+2)X_1 + (-3-\sqrt{3})X_2 + 4X_0 = 0$. Intersecando le due polari si ricavano le coordinate del centro $C[-3, 2, -4]$, le cui coordinate affini sono $C(-2/3, -4/3)$.

Problema 7.19. Centro di una conica a centro$\mathbf{\Gamma}$*a) Determina il centro della conica affine a centro $\mathbf{\Gamma}$ di equazione: $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$.*
b) Usa il metodo utilizzato nel punto precedente per calcolare le coordinate affini del centro della conica di equazione $x^2 + 3y^2 - 2xy + 4y + 2 = 0$.

Soluzione. a) La matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$, ove $\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$. Il centro della conica è il polo della retta all'infinito e si ottiene intersecando le polari delle direzioni x_∞ e y_∞ degli assi coordinati. La polare di x_∞ è la retta $(0\ 1\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = ax + cy + d = 0$, mentre la polare di y_∞ è la retta $(0\ 0\ 1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = cx + by + e = 0$.

b) La matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Poichè $\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$, la conica $\mathbf{\Gamma}$ è una conica a centro. Il centro della conica è il polo della retta all'infinito e si ottiene intersecando le polari delle direzioni x_∞ e y_∞ degli assi coordinati. La polare di x_∞ è la retta $(0\ 1\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = x - y = 0$, mentre la polare di y_∞ è la retta $(0\ 0\ 1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = -x + 3y + 2 = 0$. Il centro ha come coordinate la soluzione del sistema $x-y=0, -x+3y+2=0$, e dunque e' il punto $C(-1,-1)$.

Problema 7.20. *Determinare gli asintoti della conica affine γ di equazione:*

$$10x^2-7y^2+9xy+y+1=0.$$

Soluzione. **Primo modo** Immergendo il piano affine nel piano proiettivo, con le consuete notazioni, il completamento proiettivo di γ è la conica proiettiva $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $10X_1^2-7X_2^2+9X_1X_2+X_2X_0+X_0^2=0$. I punti impropri $[0,X_1,X_2]$ di $\mathbf{\Gamma}$ si calcolano risolvendo l'equazione $10X_1^2-7X_2^2+9X_1X_2=0$ ottenuta imponendo $X_0=0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$: tali punti impropri sono $B_1[0,1,2]$ e $B_2[0,7,-5]$. Poiché $\mathbf{\Gamma}$ ha due punti impropri, gli asintoti esistono e sono le polari dei punti impropri; la polare di B_1 ha equazione omogenea $38X_1-19X_2+2X_0=0$, mentre la polare di B_2 ha equazione omogenea $95X_1+123X_2-5X_0=0$. Tornando in coordinate affini, gli asintoti sono le rette di equazione cartesiana $38x-19y+2=0$ e $95x+123y-5=0$, rispettivamente.
Secondo modo Gli asintoti sono le rette affini che non intersecano γ.

Problema 7.21. *a) Sia γ una conica di equazione: $ax^2+bx+c=0$. Mostrare che la conica è degenere e composta da rette parallelle all'asse y.*
b) Se γ' è una conica composta da rette parallele all'asse y, è vero che nella sua equazione non compaiono termini in y?

Soluzione. a) L'equazione della conica è data da un polinomio complesso di secondo grado in una variabile, che dunque si fattorizza in fattori lineari $ax^2+bx+c=a(x-d)(x-e)$: la conica γ è riducibile. Le componenti hanno equazione della forma $x-d=0$ e sono rette parallele all'asse y (sia che le componenti siano distinte o no).
b) Le rette parallele all'asse y hanno equazione della forma $x-d=0$: il prodotto di due equazioni di questa forma è un polinomio di secondo grado privo di termini in y, come si voleva.

Classificazione affine delle coniche nel piano complesso

Negli esercizi successivi, si considera l'inclusione del piano affine nel proiettivo dato da $(x,y)\mapsto[x,y,1]$ e denotiamo le coordinate omogenee con $[X_1,X_2,X_3]$.

Problema 7.22. Classificazione affine di una conica di rango 1 nel piano affine complesso *Sia γ la conica affine di equazione:*

$$4\,x^2+9\,y^2-12\,xy+4x-6y+1=0.$$

Determinare la forma canonica affine di γ ed un cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

tramite il quale l'equazione di γ diventi l'equazione canonica affine.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ di γ ha rango 1; la conica γ è dunque composto dalla retta, contata con molteplicità 2, di equazione $2x - 3y + 1 = 0$ (ricavata ad esempio dalla terza riga della matrice).

L'equazione canonica affine di γ è pertanto data da $x^2 = 0$.

Il calcolo di un sistema di coordinate nel quale γ assume la forma canonica è simile a quello svolto nell'Esercizio Svolto 7.2 nel caso di una conica proiettiva, purché la trasformazione di coordinate scelta sia una affinità. Si considera il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ di γ e si determina il suo punto improprio $B_1[0,3,2]$; si sceglie ora un altro punto di $\mathbf{\Gamma}$, ad esempio $B_2[0,-2,1]$. In un qualsiasi sistema di coordinate omogenee $[\mathbf{X}']$ in cui B_1 abbia coordinate $[0,0,1]$ e B_2 abbia coordinate $[1,0,0]$, la retta che è componente di γ è rappresentata dall'equazione $X'_1 = 0$. Nel corrispondente sistema di coordinate affini, la conica γ è rappresentata dall'equazione canonica. Ad esempio, è possibile scegliere, in coordinate omogenee, il cambio $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$ ove $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: a tale cambio, corrisponde il cambio di coordinate affini

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 7.23. Classificazione affine di una conica di rango 2 nel piano affine complesso *Sia γ la conica di equazione: $x^2-y^2-2x-6y-8=0$. Determinare l'equazione canonica affine di γ ed un cambio di coordinate*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

tramite il quale l'equazione di γ diventi l'equazione canonica affine.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ di γ ha rango 2; la conica γ è dunque composto da due rette distinte. Poiché $\det \mathbf{A}_{33} \neq 0$, la conica ha due punti impropri distinti, e dunque è formata da una coppia di rette affini incidenti. L'equazione canonica affine di γ è pertanto data da $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 0$.

Il calcolo di un sistema di coordinate nel quale γ assume la forma canonica è simile a quello svolto nell'Esercizio Svolto 7.3 nel caso di una conica proiettiva, purché la trasformazione di coordinate scelta sia una affinità. Si considera il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ di γ. Il punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ è $B_3[1,-3,1]$.

Primo modo Il punto $[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$; la sua polare ha equazione $x_1 - x_3 = 0$ e punto improprio $[0,1,0]$. Osserviamo che $(0,1,0)\mathbf{A}(0,1,0)^t = -1$. Tramite il cambio di coordinate omogenee definito da $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$, la conica $\mathbf{\Gamma}$ viene rappresentata dall'equazione $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = 0$. Il corrispondente cambio di coordinate affini $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, soddisfa le richieste dell'enunciato.

Secondo modo Si determinano i suoi punti impropri $B_1[1,1,0]$ e $B_2[1,-1,0]$. In un sistema di coordinate omogenee $[\tilde{\mathbf{x}}]$ in cui B_1, B_2 e B_3 abbiano coordinate $[1,i,0]$, $[1,-i,0]$, $[0,0,1]$ rispettivamente, le componenti di γ sono rappresentate dalle equazioni $\tilde{x}_1+i\tilde{x}_2=0$ e $\tilde{x}_1-i\tilde{x}_2=0$. Nel corrispondente sistema di coordinate affini, la conica γ è rappresentata dall'equazione canonica $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=0$. Ad esempio, è possibile scegliere, in coordinate omogenee, il cambio $\mathbf{x}=\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ ove $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$: a tale cambio, corrisponde il cambio di coordinate affini

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\qquad\text{con } \tilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

Le componenti di γ sono $x+y+2=0$ e $x-y-4=0$.

Problema 7.24. Classificazione affine di una conica di rango 2 nel piano affine complesso *Sia γ la conica di equazione:*

$$9x^2+4y^2-12xy+12x-8y-5=0.$$

Determinare l'equazione canonica affine di γ ed un cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\tilde{\mathbf{M}}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

tramite il quale l'equazione di γ diventi l'equazione canonica affine.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9&-6&6\\-6&4&-4\\6&-4&-5\end{pmatrix}$ di γ ha rango 2; la conica γ è dunque composto da due rette distinte. Poiché $\det\mathbf{A}_{33}=0$, il completamento proiettivo di γ ha un unico punto improprio, e dunque è formata da una coppia di rette parallele. L'equazione canonica affine di γ è pertanto data da $\tilde{x}^2+1=0$.

Il punto improprio di γ ha coordinate omogenee $Q[2,3,0]$ e coincide con il punto doppio.

Primo modo Il punto $[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e $(1,0,0)\mathbf{A}(1,0,0)^t=9$; la polare di $[1,0,0]$ ha equazione $9x_1-6x_2+6x_3=0$ e passa per il punto doppio Q, che è il suo punto improprio. Un altro punto della polare è $[0,1,-1]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0,1,-1)\mathbf{A}(0,1,-1)^t=7\neq0$. Tramite il cambio di coordinate omogenee definito da $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&2&0\\0&3&\frac{1}{\sqrt{7}}\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{7}}\end{pmatrix}\tilde{\mathbf{x}}$, la conica $\mathbf{\Gamma}$ viene rappresentata dall'equazione $\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_3^2=0$. Il corrispondente cambio di coordinate affini $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{7}}{3}&-2\sqrt{7}\\0&-3\sqrt{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, con $\tilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{7}}{3}&-2\sqrt{7}\\0&-3\sqrt{7}\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, soddisfa le richieste dell'enunciato.

Secondo modo Due punti propri di $\mathbf{\Gamma}$, non appartenenti alla stessa componente, si ottengono ad esempio intersecando con l'asse $x=0$: si ricavano in tal modo i punti $B_2[0,5,2]$ e $B_3[0,-1,2]$. In un sistema di coordinate omogenee $[\tilde{\mathbf{x}}]$ in cui B_1, B_2 e B_3 abbiano coordinate $[0,1,0]$, $[i,0,1]$, $[-i,0,1]$ rispettivamente, le componenti di γ

sono rappresentate dalle equazioni $\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_3 = 0$ e $\tilde{x}_1 - i\tilde{x}_3 = 0$. Nel corrispondente sistema di coordinate affini, la conica γ è rappresentata dall'equazione canonica $\tilde{x}^2 + 1 = 0$. Ad esempio, è possibile scegliere, in coordinate omogenee, il cambio $\mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ ove $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3i & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: a tale cambio, corrisponde il cambio di coordinate affini

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}i & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}i & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti di γ sono $3x - 2y + 5 = 0$ e $3x - 2y - 1 = 0$.

Problema 7.25. Classificazione affine di una conica non degenere nel piano affine complesso *a) Discutere se le seguenti coniche affini sono parabole o coniche a centro:*

γ_1 di equazione: $x^2 + 10y^2 - 7xy + y + 1 = 0$;

γ_2 di equazione: $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - 1 = 0$.

b) Determinare i punti impropri delle coniche $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ definite in a).

c) Per ciascuna delle due coniche, determinare un cambio di coordinate affini $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ tramite il quale l'equazione della conica diventi l'equazione canonica affine.

Soluzione. a) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}_1$ di γ_1 ha equazione omogenea:

$$x_1^2 + 10x_2^2 - 7x_1x_2 + x_3^2 + x_2x_3 = 0,$$

mentre il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}_2$ di γ_2 ha equazione $x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2 = 0$.

Entrambe le coniche sono proprie ed hanno rango 3 e possiamo applicare l'osservazione 7.12.2. La sottomatrice $\mathbf{A}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -7/2 \\ -7/2 & 10 \end{pmatrix}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 0 \\ -7/2 & 10 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{\Gamma}_1$ ha determinante non nullo, e dunque la conica $\mathbf{\Gamma}_1$ è a centro.

La sottomatrice $\mathbf{B}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ottenuta cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna della matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{\Gamma}_2$ ha determinante nullo, e dunque la conica $\mathbf{\Gamma}_2$ è una parabola.

b) Dal punto a) sappiamo che $\mathbf{\Gamma}_1$ ha due punti impropri tra loro distinti. I punti impropri di $\mathbf{\Gamma}_1$ si ottengono imponendo $x_3 = 0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}_1$: essi sono i punti $[x_1, x_2, 0]$ tali che $x_1^2 + 10x_2^2 - 7x_1x_2 = 0$. Risolvendo tale equazione quadratica, si trova che i punti sono $[2, 1, 0]$ e $[5, 1, 0]$.

Dal punto a) sappiamo che $\mathbf{\Gamma}_2$ ha un unico punto improprio: tale punto è doppio per la quadrica ottenuta intersecando $\mathbf{\Gamma}_2$ con la retta impropria; le sue coordinate si ottengono dunque come soluzione del sistema che ha per coefficienti la prima riga di $\mathbf{B}_{33}$: $x_1 + 2x_2 = 0$. Si ricava che l'unico punto improprio di $\mathbf{\Gamma}_2$ è $[2, -1, 0]$. Alternativamente, si poteva risolvere l'equazione $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 = 0$ ottenuta imponendo $x_3 = 0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}_2$.

c) Studiamo la conica γ_1, la cui equazione canonica affine è $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1 = 0$.

Primo modo Cerchiamo un triangolo autopolare per γ_1 tale che i primi due punti fondamentali siano punti impropri. Osserviamo che il punto $S_1[1, 0, 0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}_1$. La polare r_1 di S_1 ha equazione $2x_1 - 7x_2 = 0$ e punto improprio $T_1[7, 2, 0]$ che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}_1$ (perchè $(7, 2, 0)\mathbf{A}(7, 2, 0)^t = -9 \neq 0$) e viene preso come vertice del triangolo autopolare. La polare t_1 di T_1 ha equazione $-9x_2 + 2x_3 = 0$ e interseca la retta r_1 nel punto V_1 di coordinate $[7, 2, 9]$ (che è il centro di $\mathbf{\Gamma}_1$). Osserviamo che $(1, 0, 0)\mathbf{A}(1, 0, 0)^t = 1$ e $(7, 2, 9)\mathbf{A}(7, 2, 9)^t = 90$. Il cambio di coordinate omogenee definito da $\mathbf{x} = \mathbf{M}'\mathbf{x}'$ ove $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ trasforma l'equazione di $\mathbf{\Gamma}_1$ nell'equazione ${x'}_1^2 - 9{x'_2}^2 + 90{x'}_3^2 = 0$ e quindi la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3}i & \frac{7}{\sqrt{90}} \\ 0 & \frac{2}{3}i & \frac{2}{\sqrt{90}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ mette $\mathbf{\Gamma}_1$ in forma canonica proiettiva. A tale cambio, corrisponde il cambio di coordinate affini

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & \frac{7\sqrt{10}}{3}i \\ 0 & \frac{2\sqrt{10}}{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{con } \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & \frac{7\sqrt{10}}{3}i \\ 0 & \frac{2\sqrt{10}}{3}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

che è il cambio cercato.

Secondo modo Il centro di γ_1 è l'intersezione delle polari dei punti impropri fondamentali; dalle equazioni $2X_1 - 7X_2 = 0$ e $-7X_1 + 20X_2 + X_3 = 0$ si ricava che le coordinate omogenee del centro sono $[7, 2, 9]$. Un sistema di coordinate nel quale il centro abbia coordinate $[0, 0, 1]$, mentre i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}_1$ abbiano coordinate $[1, i, 0]$ e $[1, -i, 0]$ rispettivamente, è definito dal cambio $\mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3}i & \frac{7}{3\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{3}i & \frac{2}{3\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$. Il legame con la trasformazione affine richiesta è come nel primo svolgimento suggerito.

Studiamo ora la conica γ_2, la cui equazione canonica affine è $\tilde{y}^2 = \tilde{x}$. Procediamo come nell'Osservazione 7.12.6. In un riferimento affine in cui la parabola γ_2 è rappresentata dall'equazione canonica affine il punto improprio della conica coincide con il punto improprio dell'asse $\tilde{x}$, l'origine coincide con l'intersezione dell'asse $\tilde{x}$ con la conica γ, l'asse $\tilde{y}$ è la tangente a γ nell'origine.

Nel sistema di riferimento originario, il punto improprio di γ ha coordinate omogenee $[2, -1, 0]$, ed una retta che passa per esso è, ad esempio la polare del punto $[1, 0, 0]$, di equazione affine $x + 2y + 1 = 0$. Tale retta interseca γ nel punto $(0, -1/2)$, la cui polare (che coincide con la retta tangente) ha come punto improprio $[1, 0, 0]$, per la proprietà di reciprocità. Osserviamo che $(1, 0, 0)\mathbf{B}(1, 0, 0)^t = 1$, $(2, -1, 0)\mathbf{B}(0, -1/2, 1)^t = 2$ Il cambio di coordinate omogenee definito da $\mathbf{x} = \mathbf{M}'\mathbf{x}'$ ove $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ trasforma l'equazione di $\mathbf{\Gamma}_2$ nell'equazione ${x'_2}^2 + 4{x'}_1{x'}_3^2 = 0$. e quindi la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$ mette $\mathbf{\Gamma}_2$ in forma ${x'_2}^2 - {x'}_1{x'}_3^2 = 0$. A tale cambio, corrisponde il cambio di coordinate affini

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{con } \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

che è il cambio cercato.

Coniche nel piano affine reale

Si studiano coniche affini reali nel piano reale complessificato. Si assume che il riferimento cartesiano sia reale e i cambi di riferimento ammessi siano reali. Qualora si utile, si considera l'inclusione del piano affine nel proiettivo, tramite l'applicazione $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$ e denotando le coordinate omogenee con $[X_1, X_2, X_3]$.

Problema 7.26. *Sia γ la conica di equazione: $3x^2 - 2y^2 - 5xy - 8x - 19y - 35 = 0$.*
a) Determinare le componenti di γ e discutere se sono reali.
b) Determinare l'equazione canonica affine di γ.

Soluzione. a) La conica γ ha rango 2 ed è quindi composta da due rette distinte. Poichè la sottomatrice $\mathbf{A}_{33}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{19}{2} \\ -4 & -\frac{19}{2} & -35 \end{pmatrix}$ di γ ha determinante strettamente negativo, i punti impropri di γ sono una coppia distinta di punti reali. La conica γ è pertanto composta da due rette reali tra loro non parallele. Svolgendo i conti (ad esempio determinando il punto doppio di γ e l'equazione delle rette che congiungono il punto doppio con ciascuno dei punti impropri di γ), si determinano le equazioni delle componenti di γ che sono, rispettivamente, $3x + y + 7 = 0$ e $x - 2y - 5 = 0$.
b) Poichè γ ha rango 2 e componenti reali, l'equazione canonica è $y_1^2 - y_2^2 = 0$.

Problema 7.27. *Sia γ la conica di equazione: $5x^2 + y^2 - 4xy + 12x - 6y + 9 = 0$.*
a) Determinare le componenti di γ e discutere se sono reali.
b) Determinare l'equazione canonica affine di γ.

Soluzione. a) La conica γ ha rango 2 ed è quindi composta da due rette distinte. Poichè la sottomatrice $\mathbf{A}_{33}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ di γ ha determinante strettamente positivo, i punti impropri di γ sono una coppia distinta di punti complessi coniugati. La conica γ è pertanto composta da due rette complesse coniugate tra loro non parallele. Svolgendo i conti (ad esempio determinando il punto doppio $(0, -3)$ di γ e l'equazione delle rette che congiungono il punto doppio con ciascuno dei punti impropri di γ), si determinano le equazioni delle componenti di γ che sono, rispettivamente, $(2 + i)x - y + (3 - 2i) = 0$ e $(2 - i)x - y + (3 + 2i) = 0$.
b) Poichè γ ha rango 2 e componenti complesse coniugate non reali, l'equazione canonica è $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 0$.

Problema 7.28. *Sia γ la conica di equazione: $26x^2 + 13y^2 - 34xy + 5 = 0$. Determinare i punti impropri del completamento proiettivo di γ nel piano proiettivo complessificato e determinare l'equazione canonica affine di γ.*

Soluzione. La conica γ ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 26 & -17 & 0 \\ -17 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ di rango 3, ed è una ellisse perchè det $\mathbf{A}_{33} > 0$ (e in particolare è una conica a centro): la conica ha dunque due punti impropri, complessi coniugati. I punti impropri $[x_1, x_2, 0]$ di γ sono rappresentati dall'equazione data dalla parte quadratica dell'equazione di γ: $26x_1^2 + 13x_2^2 - 34x_1x_2 = 0$ Fattorizzando tale equazione, si ricavano i fattori $(5+i)x-(3+2i)y$ e $(5-i)x-(3-2i)y$; i punti impropri di γ sono $[3+2i, 5+i, 0]$, $[3-2i, 5-i, 0]$.

Poichè γ ha rango 3, è possibile applicare il Lemma 7.2.7 per discutere se γ ha punti reali: poichè $a_11det\mathbf{A} > 0$ e det $\mathbf{A}_{33} > 0$, si conclude che γ non ha punti reali, ed è quindi una ellisse immaginaria, di equazione canonica affine $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1 = 0$.

Problema 7.29. *Sia γ la conica di equazione:* $6x^2 - 2y^2 - xy + 2x - 3y + 2 = 0$.
a) Verificare che γ è una iperbole.
b) Determinare i punti impropri di γ.

Soluzione. a) La conica γ è non degenere perchè la sua matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 3, ed è una iperbole perchè det $\mathbf{A}_{33} = -\frac{49}{4} < 0$ (e in particolare è una conica a centro).
b) I punti impropri $[X_1, X_2, 0]$ di γ sono rappresentati dall'equazione data dalla parte quadratica dell'equazione di γ: $6X_1^2 - 2X_2^2 - X_1X_2 = 0$ Fattorizzando tale equazione, si ricava che i punti impropri sono $[1, -2, 0]$, $[2, 3, 0]$: insieme all'informazione che γ sia non degenere, il fatto che i punti impropri siano una coppia distinti di punti reali dimostra nuovamente che γ è una iperbole.

Proprietà metriche:coniche nel piano euclideo

Si studiano coniche affini reali nel piano euclideo complessificato. Si assume che il riferimento cartesiano sia monometrico ortonormale e i cambi di riferimento ammessi sono esclusivamente i movimenti rigidi (reali). Qualora serva, si pensa il piano euclideo incluso nel suo completamento proiettivo, tramite l'applicazione $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$ e denotando le coordinate omogenee con $[X_1, X_2, X_3]$.

Problema 7.30. Equazione canonica metrica di una ellisse a punti reali *Sia γ la conica di equazione:* $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x = 0$.
a) Determinare l'equazione canonica metrica di γ, evidenziandone i semiassi.
b) Determinare il cambiamento ortonormale di coordinate necessario affinché γ assuma tale equazione.

Soluzione. a) La conica γ è non degenere perchè la sua matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3, ed è una ellisse perchè det $\mathbf{A}_{33} = 8 > 0$ (e in particolare è una conica a centro). La conica γ è una ellisse a punti reali in base al Lemma 7.2.7, essendo $a_{11}det\mathbf{A} = -18 < 0$. Possiamo quindi cercare i coefficienti della forma canonica metrica seguendo l'Esempio 7.13.6, ii). In un sistema di riferimento ortonormale in cui gli assi cartesiani siano assi di simmetria ortogonale per la conica, l'equazione assume la forma $a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c = 0$, ove a e b sono gli autovalori di A_{33}, mentre $a\,b\,c = det\mathbf{A}$. Dunque $a\,b = det\,\mathbf{A}_{33} = 8$, $a + b = tr\mathbf{A}_{33} = 6$, $c = det\mathbf{A}/ab = -6/8 = -3/4$. Svolgendo i conti, si osserva che è possibile scegliere $a = 2$, $b = 4$. L'equazione di γ diventa $2\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 - 3/4 = 0$: si conclude che l'equazione canonica metrica è $(8/3)\tilde{x}^2 + (16/3)\tilde{y}^2 - 1 = 0$, o , più precisamente

$$\frac{1}{3/8}\tilde{x}^2 + \frac{1}{3/16}\tilde{y}^2 - 1 = 0$$

e la conica γ è una ellisse a punti reali di semiassi $\sqrt{\frac{3}{8}}$ e $\sqrt{\frac{3}{16}}$.

b) L'autospazio di autovalore 2 relativo alla matrice $\mathbf{A}_{33}$ è generato dall'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{2}$ e fornisce i numeri direttori di un asse di simmetria ortogonale per la conica; i numeri direttori dell'altro asse di simmetria ortogonale sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{2}$ e che può essere ricavato come generatore dell'autospazio di autovalore 4 o, più semplicemente, come ortogonale del precedente. La rotazione di centro l'origine di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

definisce un sistema di coordinate (x', y') nel quale gli assi cartesiani $x' = 0$ e $y' = 0$ sono paralleli agli assi di simmetria ortogonale per γ. Operando la sostituzione, si verifica che, in tali coordinate, la conica γ è rappresentata dall'equazione

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = \\ = 2x'^2 + 4y'^2 + 2x' + 2y' = 0, \end{aligned}$$

nella quale non compare il termine in $x'y'$, e i coefficienti dei termini in x'^2 e y'^2 sono gli autovalori di A_{33}.

Per determinare un sistema di coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ nel quale la conica è rappresentata dall'equazione canonica, è sufficiente modificare l'origine del sistema di coordinate, che deve essere posta nel centro di γ. Per determinare il cambio di coordinate, è possibile procedere come segue, utilizzando il metodo detto "metodo del completamento dei quadrati": la trasformazione cercata è della forma $x' = \tilde{x} + c_1$, $y' = \tilde{y} + c_2$, grazie alla quale si annullino i termini lineari nell'equazione di γ:

$$\begin{aligned} 2(\tilde{x} + c_1)^2 + 4(\tilde{y} + c_2)^2 + 2(\tilde{x} + c_1) + 2(\tilde{y} + c_2) = \\ = 2\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 + (2 + 4c_1)\tilde{x} + (2 + 8c_2)\tilde{y} + (2c_1^2 + 4c_2^2 + 2c_1 + 2c_2) = 0 \end{aligned}$$

L'annullarsi del coefficiente del termine in $\tilde{x}$ fornisce l'equazione $2 + 4c_1 = 0$, dalla quale si ricava $c_1 = -(1/2)$. L'annullarsi del coefficiente del termine in $\tilde{y}$ fornisce l'equazione $2 + 8c_2 = 0$, dalla quale si ricava $c_2 = -(1/4)$.

Il cambiamento di coordinate tramite il quale γ è rappresentata dall'equazione canonica è dunque dato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} - \frac{1}{2} \\ \tilde{y} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Problema 7.31. Equazione canonica metrica di una iperbole. *Sia γ la conica di equazione: $-2x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 6y + 1 = 0$. Determinare l'equazione canonica metrica di γ ed il cambiamento di coordinate necessario affinché γ assuma tale equazione.*

Soluzione. La conica γ è non degenere perchè la sua matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3, ed è una iperbole perchè $\det \mathbf{A}_{33} = -6 < 0$ (e in particolare è una conica a centro). Possiamo quindi cercare i coefficienti della forma canonica metrica seguendo l'Esempio 7.13.6, iii). In un sistema di riferimento ortonormale in cui gli assi cartesiani siano assi di simmetria ortogonale per la conica, l'equazione assume la forma $a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c = 0$, ove a e b sono gli autovalori di A_{33}, mentre $a\,b\,c = det\mathbf{A}$. Dunque $a\,b = det\,\mathbf{A}_{33} = -6$, $a + b = tr\mathbf{A}_{33} = -1$, $c = det\mathbf{A}/ab = -1/(-6) = 1/6$. Svolgendo i conti, si osserva che è possibile scegliere $a = 2$, $b = -3$. L'equazione di γ diventa $2\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 + 1/6 = 0$: si conclude che l'equazione canonica metrica è $-12\tilde{x}^2 + 18\tilde{y}^2 - 1 = 0$, o , più precisamente

$$\frac{1}{1/18}\tilde{x}^2 - \frac{1}{1/12}\tilde{y}^2 - 1 = 0,$$

(scambiando $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ in modo che il coefficiente negativo compaia nel termine in $\tilde{y}^2$ e l'asse $\tilde{x}$ sia l'asse trasverso).

Cerchiamo ora il cambio di riferimento. L'autospazio di autovalore -3 relativo alla matrice $\mathbf{A}_{33}$ è generato dall'autovettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{5}$ e fornisce i numeri direttori di un asse di simmetria ortogonale per la conica; i numeri direttori dell'altro asse di simmetria ortogonale sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{5}$ e che può essere ricavato come generatore dell'autospazio di autovalore 2 o, più semplicemente, come ortogonale del precedente (e orientato in modo tale che l'orientazione indotta dai due autovettori sia positiva). La rotazione di centro l'origine di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

definisce un sistema di coordinate (x', y') nel quale gli assi cartesiani $x' = 0$ e $y' = 0$ sono sono paralleli agli assi di simmetria ortogonale per γ. Operando la sostituzione, si verifica che, in tali coordinate, la conica γ è rappresentata dall'equazione

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + \\ +2\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) - 6\left(\frac{-x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 1 = \\ = -3x'^2 + 2y'^2 + 2\sqrt{5}\,x' - 2\sqrt{5}y' + 1 = 0, \end{aligned}$$

nella quale non compare il termine in $x'y'$, i coefficienti dei termini in x'^2 e y'^2 sono gli autovalori di A_{33}, il termine noto è rimasto invariato.

Per determinare un sistema di coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ nel quale la conica è rappresentata dall'equazione canonica, è sufficiente modificare l'origine del sistema di coordinate, che deve essere posta nel centro di γ. Per determinare il cambio di coordinate, è possibile procedere come segue, utilizzando il metodo detto "metodo del completamento dei quadrati": la trasformazione cercata è della forma $x' = \tilde{x} + c_1$, $y' = \tilde{y} + c_2$, grazie alla quale si annullino i termini lineari nell'equazione di γ:

$$-3(\tilde{x} + c_1)^2 + 2(\tilde{y} + c_2)^2 + 2\sqrt{5}(\tilde{x} + c_1) - 2\sqrt{5}(\tilde{y} + c_2) + 1 = 0$$

$$-3\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + (2\sqrt{5} - 6c_1)\tilde{x} + (-2\sqrt{5} + 4c_2)\tilde{y} - 3c_1^2 + 2c_2^2 + 2\sqrt{5}(c_1 - c_2) + 1 = 0$$

L'annullarsi del coefficiente del termine in $\tilde{x}$ fornisce l'equazione $2\sqrt{5} - 6c_1 = 0$, dalla quale si ricava $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$. L'annullarsi del coefficiente del termine in $\tilde{y}$ fornisce l'equazione $-2\sqrt{5} + 4c_2 = 0$, dalla quale si ricava $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Il cambiamento di coordinate tramite il quale γ è rappresentata dall'equazione canonica è dunque dato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} + \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \tilde{y} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Problema 7.32. Equazione canonica metrica di una parabola. *Sia γ la parabola di equazione: $4x^2 + y^2 - 4xy + 4y = 0$.*
a) Determinare l'equazione canonica metrica di γ ed il cambiamento di coordinate necessario affinché γ assuma tale equazione.
b) Determinare l'asse e il vertice di γ.

Soluzione. a) La conica γ è non degenere perchè la sua matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3, ed è una parabola perchè det $\mathbf{A}_{33} = 0$. Possiamo quindi cercare i coefficienti della forma canonica metrica seguendo l'Esempio 7.13.5. In un sistema di riferimento ortonormale in cui gli assi cartesiani siano l'asse di simmetria ortogonale per la conica e la retta tangente nel vertice, l'equazione assume la forma $a\tilde{y}^2 - 2p\tilde{x} = 0$, ove a è l'autovalore non nullo di A_{33}, mentre $a\,p^2 = -det\mathbf{A}$. Dunque $a = trA_{33} = 5$ $p^2 = -det\mathbf{A}/a = 16/5$. Svolgendo i conti, si osserva che è possibile scegliere $p = 4/\sqrt{5}$. L'equazione di γ diventa $5\tilde{y}^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\tilde{x} = 0$: si conclude che l'equazione canonica metrica è

$$\tilde{y}^2 - \frac{8}{5\sqrt{5}}\tilde{x} = 0.$$

L'autospazio di autovalore 0 relativo alla matrice $\mathbf{A}_{33}$ è generato dall'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{5}$ e fornisce i numeri direttori dell'asse di simmetria ortogonale per la conica; i numeri direttori della tangente nel vertice sono dati dal vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che ha norma $\sqrt{5}$ e che può essere ricavato come generatore dell'autospazio di autovalore 5 o, più semplicemente, come ortogonale del precedente (e orientato in modo tale che l'orientazione indotta dai due autovettori sia positiva). La rotazione di centro l'origine di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

definisce un sistema di coordinate (x', y') nel quale l'asse $x' = 0$ è parallelo all'asse di simmetria ortogonale per γ e $y' = 0$ è parallelo alla tangente nel vertice. Operando la sostituzione, si verifica che, in tali coordinate, la conica γ è rappresentata dall'equazione

$$4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) =$$
$$= 5y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' = 0,$$

nella quale non compaiono i termini in $x'y'$ e in x'^2, il coefficiente del termine in y'^2 è l'autovalore non nullo di A_{33}, il termine noto è rimasto invariato.

Osserviamo che il coefficiente del termine in x' è positivo: operiamo dunque un ribaltamento $x'' = -x'$, $y'' = y'$: la conica γ è rappresentata dall'equazione $5y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' = 0$.

Per determinare un sistema di coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ nel quale la conica è rappresentata dall'equazione canonica, è sufficiente modificare l'origine del sistema di coordinate, che deve essere posta nel vertice di γ. Per determinare il cambio di coordinate, è possibile procedere come segue, utilizzando il metodo detto "metodo del completamento dei quadrati": la trasformazione cercata è della forma $x'' = \tilde{x}+c_1$, $y'' = \tilde{y}+c_2$, grazie alla quale si annullino il termine lineare in $\tilde{y}$ e il termine noto nell'equazione di γ:

$$5(\tilde{y}+c_2)^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}(\tilde{x}+c_1) + \frac{4}{\sqrt{5}}(\tilde{y}+c_2) =$$
$$= 5\tilde{y}^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,\tilde{x} + (\frac{4}{\sqrt{5}} + 10c_2)\tilde{y} + 5c_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}c_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}c_2 = 0$$

L'annullarsi del coefficiente del termine lineare in $\tilde{y}$ fornisce l'equazione $\frac{4}{\sqrt{5}}+10c_2 = 0$, dalla quale si ricava $c_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5^2}$. L'annullarsi del coefficiente del termine noto fornisce l'equazione $5c_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}c_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}c_2 = 0$; sostituendo il valore ottenuto per c_2, l'equazione diventa: $\frac{4}{5^2} - \frac{8}{\sqrt{5}}c_1 - \frac{8}{5^2} = 0$, dalla quale si ricava $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5^2 \cdot 2}$. Il cambiamento di coordinate tramite il quale γ è rappresentata dall'equazione canonica è dunque dato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} + \frac{\sqrt{5}}{5^2 \cdot 2} \\ \tilde{y} - \frac{2\sqrt{5}}{5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{50} \\ -\frac{1}{25} \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

b) Il vertice di γ è l'origine del sistema di coordinate che nel quale γ è rappresentata dall'equazione canonica metrica. Le equazioni (7.21) del cambio di coordinate forniscono (per $\tilde{x} = 0 = \tilde{y}$) le coordinate del vertice $(\frac{9}{50}, -\frac{1}{25})$. L'asse di simmetria è, per quanto osservato, parallelo alla retta $2x - y = 0$; imponendi il passaggio per il vertice, si trova che l'asse di simmetria ha equazione $2x - y - 2/5 = 0$.

Si veda il Problema Guida 7.35 per un esempio di calcolo diretto di vertice e asse, senza utilizzare il cambio di coordinate che pone γ in forma canonica.

Problema 7.33. *Sia γ la conica di equazione: $x^2+y^2-2x+6y+5=0$.*
a) Verificare che γ è una circonferenza, determinandone il centro e il raggio.
b) Verificare che γ è una conica a centro e che il centro di simmetria secondo la definizione 7.4.1 coincide con il centro della circonferenza.
c) Verificare che il punto $P(1,-2)$ è interno alla circonferenza e disegnarne la polare.
d) Determinare una coppia di assi di simmetria per γ tra loro ortogonali.

Soluzione. a) Ricordando quanto illustrato nel paragrafo 3.3 o controllando il passaggio per i punti ciclici, si riconosce facilmente che la conica assegnata è una circonferenza di centro $C(1,-3)$ e raggio $\sqrt{5}$.
b) La conica γ è non degenere (perchè la sua matrice ha rango 3) e a centro (perchè ha due distinti punti impropri). Le coordinate del centro si ottengono intersecando le polari di una qualsiasi coppia di punti impropri tra loro distinti; intersecando le polari dei punti impropri fondamentali, si ottengono le equazioni: $x-1=0, y+3=0$, dalle quali si ricavano le coordinate $(1,-3)$ del centro della conica, che coincidono con quelle del centro C della circonferenza, determinate nel punto precedente.
c) Le rette per il punto P hanno equazione parametrica della forma $x=1+tl, y=-2+tm$ con $t\in\mathbb{R}$, $(l,m)\in\mathbb{R}^2$, $(l,m)\neq(0,0)$. Intersecando una tale retta con γ, si ottiene l'equazione

$$(1+tl)^2+(-2+tm)^2-2(1+tl)+6(-2+tm)+5=(l^2+m^2)t^2+(2m)t-4=0,$$

che è sempre di secondo grado in t e ha discriminante strettamente positivo $4m^2+16(l^2+m^2)>0$. L'intersezione è dunque sempre data da due punti reali, e il punto P è dunque interno.
d) È sufficiente determinare due rette ortogonali passanti per il centro: ad esempio, $x-1=0$ e $y-3=0$.

Problema 7.34. Assi di simmetria di una conica a centro *Sia γ la conica di equazione: $3x^2+2y^2+2x\,y+3=0$. Verificare che γ è una conica a centro e determinarne gli assi di simmetria.*

Soluzione. La conica ha matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$: la conica è dunque non degenere ed è una ellisse perchè $\det\mathbf{A}_{33}=5>0$. Poichè γ non è una circonferenza, ha una coppia di assi di simmetria, le cui direzioni, in base al lemma 7.5.4, sono date dagli autovettori di $\mathbf{A}_{33}$. Poichè $\operatorname{tr}\mathbf{A}_{33}=5$, gli autovalori di $\mathbf{A}_{33}$ sono $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Primo modo Per quanto osservato, gli assi sono paralleli, rispettivamente, alle rette $\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+y=0$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+y=0$. Le coordinate del centro della conica si trovano intersecando le polari delle direzioni degli assi cartesiani: dalle equazioni $3x+y=0$, $x+2y+1=0$ si deduce che il centro ha coordinate $(1/5,-3/5)$. Poichè gli assi devono passare per il centro della conica, si ricava che gli assi sono $\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+y+\frac{5-\sqrt{5}}{10}=0$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+y+\frac{5+\sqrt{5}}{10}=0$.

Secondo modo L'autospazio di autovalore $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ rispetto a $\mathbf{A}_{33}$ è generato da $(1,-\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, corrispondente al punto improprio $[1,-\frac{1+\sqrt{5}}{2},0]$ che ha, come retta polare, la retta di equazione $\frac{5-\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}y-1-\sqrt{5}=0$.

L'autospazio di autovalore $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ rispetto a $\mathbf{A}_{33}$ è generato da $(1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2})$, corrispondente al punto improprio $[1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0]$ che ha, come retta polare, la retta di equazione $\frac{5+\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}y + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0$.

Le coordinate $(1/5, -3/5)$ del centro si determinano intersecando gli assi, o intersecando le polari delle direzioni degli assi cartesiani.

Problema 7.35. Asse di simmetria e vertice di una parabola *Sia γ la conica di equazione: $x^2 + 9y^2 + 6xy + 2x + 1 = 0$. Mostrare che γ è una parabola, e determinarne il vertice e l'equazione cartesiana dell'asse di simmetria.*

Soluzione. La conica γ è non degenere perchè la sua matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3, ed è una parabola perchè $\det \mathbf{A}_{33} = 0$. In base al Lemma 7.5.1, l'asse di simmetria ha per direzione il punto improprio del completamento proiettivo di γ ed è parallelo alla retta di equazione $x + 3y = 0$. La retta tangente a γ nel suo vertice, essendo ortogonale all'asse, ha equazione della forma $3x - y + k = 0$. Il valore di k può essere determinato imponendo che la retta sia tangente: l'intersezione tra la retta e γ deve essere costituita da un unico punto, con molteplicità 2. L'intersezione è data da

$$\begin{cases} 3x - y + k = 0 \\ x^2 + 9y^2 + 6xy + 2x + 1 = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo la relazione $y = 3x + k$ nell'equazione della conica, si ricava l'equazione $x^2 + 9(3x + k)^2 + 6x(3x + k) + 2x + 1 = 100x^2 + (60k + 2)x + 9k^2 + 1 = 0$; la retta è tangente se tale equazione, nell'incognita x, ammette una unica soluzione, cioè ha discriminante nullo:

$$240k - 396 = 0.$$

Il valore di k per il quale la retta è tangente è dunque $k = -99/60$: $3x - y - 99/60 = 0$. Il vertice è il punto di intersezione con γ: calcolando l'intersezione per il valore ottenuto di k si ottengono le coordinate del vertice: $(97/200, 189/150)$.

L'asse di simmetria ha equazione della forma $x + 3y + t = 0$: imponendo il passaggio per il vertice, si ricava che l'equazione dell'asse di simmetria è: $x + 3y - 41/100 = 0$.

Esercizi

7.1. Determinare la matrice e il rango delle coniche rappresentate da una delle seguenti equazioni:
a) $2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1x_3 + 3x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$;
b) $9x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 18x_1x_3 + 12\,x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$;
c) $3x_1^2 - x_2^2 = 0$;
d) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4\,x_2x_3 + 4x_3^2 = 0$.

7.2. Al variare del parametro reale t, determinare il rango della conica di equazione $tx_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2tx_1x_3 + x_3^2 = 0$.

7.3. Si consideri la conica $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $2X_3X_1 + 4X_1X_2 + X_2^2 = 0$.

i) Determinare il rango di $\mathbf{\Gamma}$ e i suoi punti doppi.
ii) Osservare che i punti $P_1[1,0,0]$ e $P_2[0,0,1]$ sono semplici per $\mathbf{\Gamma}$ e determinare la rispettiva retta tangente a $\mathbf{\Gamma}$.
iii) Dire se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile.

7.4. Determinare l'equazione della conica costituita dalla retta per i punti $[2,1,1]$ e $[-1,2,2]$ contata con molteplicità 2.

Coniche affini

7.5. Dire se le seguenti coniche sono parabole o coniche a centro; in quest'ultimo caso, determinare esplicitamente il centro.
i) $x^2+2xy+y^2+x-y+1=0$
ii) $x^2+2xy-3x+2y+1=0$.

Coniche del piano euclideo

7.6. Determinare l'equazione canonica affine e metrica della conica definita da una delle equazioni seguenti:
a) $18x^2+8y^2+24xy+18+36x+24y=0$;
b) $20x^2+2y^2-4xy+10+20x-8y=0$;
c) $2x^2-y^2-xy+x-y=0$.

7.7. Determinare l'equazione della retta tangente la conica $x^2+y^2+2x-3y=0$ di $\mathbf{A}^2$ nell'origine.

7.8. Determinare gli assi di simmetria e il centro della conica Q di equazione $2x^2+4y^2-x+2y=0$. Determinare inoltre il cambio di coordinate che muta l'equazione di Q nella sua forma canonica metrica.

7.9. Determinare l'asse di simmetria ed il vertice della parabola di equazione $4x^2-4xy+y^2+4y=0$.

7.10. Determinare la forma canonica metrica e affine delle coniche di equazione, rispettivamente:
i) $x^2-9y^2+2x=0$;
ii) $3x^2-y^2+2xy+3=0$;
iii) $3x^2+3y^2+2xy+2\sqrt{2}x=0$.
iv) $3x^2-3y^2+8xy-6x-8y=0$. iperbole$-5\tilde{x}^2+5\tilde{y}^2=3$Determinare inoltre un cambiamento di coordinate che permette di ottenere la forma canonica metrica .

7.11. Trasformare la conica affine di equazione $2x^2-xy+4y^2-x+5y+9=0$ mediante l'affinità di equazioni $\tilde{x}=3x+5y$, $\tilde{y}=4x-y+5$.

7.12. Dire se esiste una affinità che muta le seguenti coppie di coniche l'una nell'altra:
a) $xy=0$, $x^2+y^2=1$;
b) $x^2+y^2-x-y+5=0$, $x^2+y^2=1$;
c) $x^2+y^2-2y-4=0$, $x^2+y^2=5$.