1

Complessificazione

1.1 Complessificazione di uno spazio vettoriale reale

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali e si indichi con i una radice quadrata primitiva di -1 in $\mathbb{C}$. Allo spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è associato in modo naturale uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi, indicato con

$$\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$$

e detto *complessificazione dello spazio vettoriale* $\mathbf{V}$, o *complessificato* di $\mathbf{V}$. I vettori dello spazio $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ sono per definizione gli elementi di $\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}$, che conviene indicare con una nuova notazione: l'elemento $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}$ viene indicato con

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}.$$

La struttura di spazio vettoriale complesso è definita su $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ mediante la posizione:

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) + (\mathbf{a}' + i\mathbf{b}') := (\mathbf{a} + \mathbf{a}') + i(\mathbf{b} + \mathbf{b}') \qquad \forall \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a}' + i\mathbf{b}' \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}$$

e la moltiplicazione per uno scalare $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ definita da:

$$\lambda(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (a + ib)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) := (a\mathbf{a} - b\mathbf{b}) + i(a\mathbf{b} + b\mathbf{a}).$$

Ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ si scrive in modo unico come somma $\mathbf{a}+i\mathbf{b}$, con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$. Diremo che la *componente reale* o la parte reale di $\mathbf{v} = \mathbf{a}+i\mathbf{b}$ è $Re\,\mathbf{v} = \mathbf{a} \in \mathbf{V}$ mentre la *componente immaginaria* o parte immaginaria di $\mathbf{v}$ è $Im\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \in \mathbf{V}$.

Sullo spazio $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ si definisce una applicazione detta *coniugio*:

$$\begin{gathered}\mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \\ \mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \mapsto \overline{\mathbf{v}} := \mathbf{a} - i\mathbf{b};\end{gathered}$$

Diciamo che il coniugio è definito *in modo naturale*, perché per definirlo non abbiamo operato altre scelte (di basi, etc....) oltre alla definizione di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$. Il vettore $\overline{\mathbf{v}} := \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ si dice *vettore coniugato* (o piú semplicemente *coniugato*) di $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$: applicando nuovamente il coniugio a $\overline{\mathbf{v}}$ si ritrova $\mathbf{v}$:

$$\overline{(\overline{\mathbf{v}})} = \mathbf{v};$$

l'applicazione coniugio è quindi una involuzione. Osserviamo che *l'applicazione coniugio non è lineare rispetto alla struttura di spazio vettoriale complesso di* $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ (ma è lineare rispetto alla struttura di $\mathbf{R}$-spazio vettoriale indotta dall'inclusione $\mathbf{R} \to \mathbb{C}$).

Dato un sottospazio S di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$, il sottoinsieme $\overline{S} = \{\overline{\mathbf{v}} | \mathbf{v} \in S\}$ è detto il *coniugato* di S.

Definizione 1.1.1. Un sottoinsieme S di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ si dice *reale* se $\overline{S} = S$. Altrimenti, S si dice *immaginario*.

Il coniugato $\overline{\mathbf{W}}$ di un sotto-$\mathbb{C}$-spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ è ancora un sotto-$\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Se $\mathbf{W}$ ha dimensione finita, lo spazio $\overline{\mathbf{W}}$ ha la stessa dimensione, ed una sua base si ottiene considerando i vettori coniugati di una base di $\mathbf{W}$.

Esempio 1.1.2. Dato $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}$, il sotto-$\mathbb{C}$-spazio vettoriale generato da $\mathbf{v}$ e dal suo coniugato $\overline{\mathbf{v}}$ è sicuramente reale. Tale sottospazio ha dimensione 2 se e e solo se $\mathbf{v}$ e $\overline{\mathbf{v}}$ sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che sullo spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ sia assegnato un *prodotto scalare*

$$\begin{array}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto < \mathbf{a}, \mathbf{b} >, \end{array} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}, \tag{1.1}$$

cioè una applicazione bilineare [1] e simmetrica [2]. Sullo spazio complessificato restano definite due forme bilineari sul campo complesso

$$\mathbf{V}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} :$$

a) una forma bilineare simmetrica, detta *complessificazione del prodotto scalare* (o *prodotto scalare complessificato*) e definita da:

$$\begin{aligned} < \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a}' + i\mathbf{b}' >_S &:= < \mathbf{a}, \mathbf{a}' > + i < \mathbf{a}, \mathbf{b}' > + i < \mathbf{b}, \mathbf{a}' > - < \mathbf{b}, \mathbf{b}' > \\ &= < \mathbf{a}, \mathbf{a}' > - < \mathbf{b}, \mathbf{b}' > + i\,(< \mathbf{a}, \mathbf{b}' > + < \mathbf{a}', \mathbf{b} >) \end{aligned}$$

b) una forma hermitiana antisimmetrica:

$$< \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a}' + i\mathbf{b}' >_H := < \mathbf{a}, \mathbf{a}' > + < \mathbf{b}, \mathbf{b}' > - i\,(< \mathbf{a}, \mathbf{b}' > - < \mathbf{b}, \mathbf{a}' >).$$

[1] L'applicazione (1.1) è bilineare se è lineare in entrambe le entrate :

$$\begin{array}{c} < \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}', \mathbf{b} > = \lambda < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + \mu < \mathbf{a}', \mathbf{b} >, \\ < \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{b}' > = \lambda < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + \mu < \mathbf{a}, \mathbf{b} > \end{array} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbf{V}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

[2] L'applicazione (1.1) è simmetrica se $< \mathbf{a}, \mathbf{b}' > = < \mathbf{b}, \mathbf{a} > \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$.

Concentreremo le nostre attenzioni sul prodotto scalare complessificato, che verrà denotato più semplicemente con il simbolo

$$< -, - > .$$

Mettiamo in evidenza due differenze sostanziali tra il prodotto scalare di partenza e il suo complessificato. Innanzitutto, anche se il prodotto scalare in V è definito positivo (cioè $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > \geq 0$ per ogni $\mathbf{v}$ e, inoltre, accade che $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >= 0$ se e solo se $\mathbf{v} = 0$), in $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ ci sono *vettori isotropi* per il prodotto scalare complessificato, cioè vettori non nulli $\mathbf{v}$ tali che $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >= 0$.

Inoltre, anche se il prodotto scalare in $\mathbf{V}$ è definito positivo, il prodotto scalare complessificato non permette di estendere la usuale nozione di *lunghezza* di un vettore di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$: ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ è possibile associare solo il numero complesso $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >$ che non ammette, in generale una unica radice quadrata. Di conseguenza, la nozione di lunghezza viene modificata come segue:

Definizione 1.1.3. La *lunghezza* di un vettore complesso $\mathbf{v}$ (rispetto al prodotto scalare complessificato) è

$$\pm\sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >},$$

denotando con $\sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >}$ una qualsiasi radice quadrata. Se $\mathbf{v}$ è isotropo, cioè $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >= 0$, diciamo che $\mathbf{v}$ ha *lunghezza nulla* (o modulo nullo).

Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di lunghezza non nulla si definisce, a meno del segno, il numero complesso

$$cos(\hat{\mathbf{vw}}) = \pm\frac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{\sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >}\sqrt{< \mathbf{w}, \mathbf{w} >}}$$

che si interpreta come il *coseno dell'angolo formato dai due vettori*. Analogamente, si definisce $sen(\hat{\mathbf{vw}})$ a meno del segno, tramite la relazione

$$sen^2(\hat{\mathbf{vw}}) = 1 - cos^2(\hat{\mathbf{vw}}).$$

Definizione 1.1.4. Due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ si dicono *ortogonali* se

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0.$$

Osservazione 1.1.5. Osserviamo che il complessificato $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ può essere descritto anche mediante la biezione:

$$\begin{aligned}\psi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V}_{\mathbb{C}}\\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \mathbf{a} + i(\mathbf{b} - \mathbf{a})\end{aligned}$$

Attraverso tale biezione, il vettore $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ viene identificato con la coppia $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{a})$: i vettori con parte immaginaria nulla sono dunque identificati con le coppie $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ ($\mathbf{a} \in \mathbf{V}$) sulla diagonale.

Il coniugio in $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ corrisponde alla trasformazione

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \times \mathbf{V} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto (\mathbf{a}, -\mathbf{b} + 2\mathbf{a}) \end{aligned}$$

che associa alla coppia $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ la coppia simmetrica $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$ rispetto all'elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ della diagonale; la coppia simmetrica $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$ è la coppia avente la stessa prima componente e tale che la semisomma appartenga alla diagonale:

$$(1/2)[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}')] = (\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

1.2 Complessificazione dello spazio

Si denoti con $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3$ lo spazio affine 3-dimensionale. Ricordiamo che un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ in $\mathbb{A}$ è una coppia $(O, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$, ove O è un punto di $\mathbb{A}$ e $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi di $\mathbb{A}$. Il punto O si dice *origine* del riferimento $\mathcal{R}$, mentre il riferimento R di $\mathcal{V}$ si dice *associato* al riferimento $\mathcal{R}$. Si ricorda che un riferimento di uno spazio vettoriale è, per definizione, una sua base ordinata. Spesso si userà il termine riferimento al posto di riferimento cartesiano.

Fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$, ad ogni punto P di $\mathbb{A}$ risulta associata una terna di numeri reali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ (detta *terna delle coordinate cartesiane o affini* di P in $\mathcal{R}$), definita dall'uguaglianza:

$$\mathbf{OP} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3.$$

La terna $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ è detta anche *terna delle coordinate* di P in $\mathcal{R}$. Più semplicemente, si dice che $\mathbf{x}$ sono le coordinate di P in $\mathcal{R}$. Ciò si esprime scrivendo

$$P(\mathbf{x}) \text{ o } P(x_1, \ldots, x_n).$$

L'origine O del riferimento $\mathcal{R}$ ha coordinate tutte nulle in $\mathcal{R}$. I punti $P_i(\mathbf{e}_i)$, dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-simo vettore unitario di $\mathbb{C}^n$, si dicono i *punti unitari* del riferimento.

Se $\mathcal{R}' = (O', R' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\})$ è un altro riferimento cartesiano di $\mathbb{A}$, le coordinate $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^t$ del punto P in $\mathcal{R}'$ sono legate alle coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ di P in $\mathcal{R}$ da una relazione della forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{1.2}$$

ove A è una matrice 3×3 invertibile a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

è un vettore numerico; la matrice $\mathbf{A}$ e il vettore $\mathbf{c}$ NON dipendono dal punto P ma solo dai due riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Scrivendo per esteso, la relazione (1.2) si scrive come

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + c_1 \\ x_2' = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + c_2 \\ x_3' = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + c_3 \end{cases} . \tag{1.3}$$

Includeremo ora lo spazio $\mathbb{A}$ in un insieme più grande, dalle proprietà in parte differenti. Consideriamo l'insieme delle coppie formate da una terna ordinata di numeri complessi e da un riferimento cartesiano dello spazio:

$$\hat{\mathbb{E}} = \{((\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathcal{R}) | (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{C}^3, \mathcal{R} \text{ riferimento di } \mathbb{E}\}$$

e definiamo su esso una relazione di equivalenza ω: due elementi $((\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathcal{R})$ e $((\xi_1', \xi_2', \xi_3'), \mathcal{R}')$ di $\hat{\mathbb{E}}$ sono in relazione tra loro se e solo se accade che

$$\begin{cases} \xi_1' = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + c_1 \\ \xi_2' = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + c_2 \\ \xi_3' = a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + c_3 \end{cases}$$

ove (1.3) sono le relazioni del cambio di riferimento tra $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Si verifica facilmente che ω è una relazione di equivalenza sull'insieme $\hat{\mathbb{E}}$. Inoltre, per un fissato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{E}$, ogni classe di equivalenza contiene una ed una sola coppia della forma $((\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathcal{R})$.

Definizione 1.2.1. Lo *spazio complessificato dello spazio* $\mathbb{E}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di $\hat{\mathbb{E}}$ rispetto alla relazione di equivalenza ω e viene indicato con

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{E}}/\omega.$$

I suoi elementi sono detti *punti complessi*, o più semplicemente *punti*, e sono le classi di equivalenza di $\hat{\mathbb{E}}$ rispetto ad ω.

Talora lo spazio $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ verrà detto anche *spazio complesso*.

Osserviamo che, fissato un riferimento $\mathcal{R}$ in $\mathbb{E}$, resta definita una inclusione di $\mathbb{E}$ in $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$: al punto $P \in \mathbb{E}$, di coordinate (x_1, x_2, x_3) in $\mathcal{R}$, viene assegnata come immagine la classe di equivalenza di $((x_1, x_2, x_3), \mathcal{R})$ in $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$. L'applicazione così definita è iniettiva, perchè $((x_1, x_2, x_3), \mathcal{R})$ e $((x_1', x_2', x_3'), \mathcal{R})$ sono in relazione se e solo se $(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$. Inoltre, questa applicazione non dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R}$ in $\mathbb{E}$: diciamo quindi che esiste una *inclusione naturale*

$$\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_{\mathbb{C}}.$$

Infatti, se $\mathcal{R}'$ in $\mathbb{E}$ è un altro riferimento, il punto P ha coordinate $\mathbf{x}$ in $\mathcal{R}$ e $\mathbf{x}'$ in $\mathcal{R}'$ legate dalla relazione (1.2), e quindi $(\mathbf{x}, \mathcal{R})\omega(\mathbf{x}', \mathcal{R}')$.

Vogliamo ora dare una definizione di riferimento cartesiano nello spazio complessificato, a partire da un riferimento di $\mathbb{E}$. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento fissato di $\mathbb{E}$. Se P è un punto complesso, nella classe di equivalenza che lo costituisce si

sceglie l'unica coppia $((\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathcal{R})$ con seconda entrata uguale a $\mathcal{R}$ e si dice che la terna $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$ forma le *coordinate* di P in $\mathcal{R}$. Osserviamo che le coordinate in $\mathcal{R}$ di un punto $P \in \mathbb{E} \subset \mathbb{E}_\mathbb{C}$ riguardato come punto complesso, sono esattamente le coordinate abituali di $P \in \mathbb{E}$ nel riferimento $\mathcal{R}$.
Dunque **un riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{E}$ permette di assegnare coordinate in modo univoco ad ogni punto dello spazio complesso** $\mathbb{E}_\mathbb{C}$.

Definizione 1.2.2. Un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, inteso come riferimento dello spazio complesso, è detto un *riferimento reale* di $\mathbb{E}_\mathbb{C}$.

Definizione 1.2.3. Una terna ordinata di numeri complessi si dirà *terna immaginaria* se i numeri che la compongono non sono tutti e tre reali. Un punto complesso è detto reale (risp., immaginario) se e solo se, in un qualsiasi riferimento reale, la terna delle sue coordinate è interamente formata da numeri reali (risp., immaginaria).

Si osservi che i coefficienti delle formule di trasformazione in un cambio di riferimento sono reali ed è quindi possibile formulare la definizione in modo più semplice da verificare: un punto complesso P è *reale* (risp., *immaginario*) se e solo se esiste un riferimento reale nel quale la terna delle coordinate di P è interamente formata da numeri reali (risp., è una terna immaginaria). I punti reali sono esattamente i punti di $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_\mathbb{C}$. Denotando con $\mathcal{I}$ l'insieme dei punti immaginari, ricaviamo che

$$\mathbb{E}_\mathbb{C} = \mathbb{E} \cup \mathcal{I}.$$

Un punto complesso è dunque un punto reale o un punto immaginario.

Le coordinate di un punto complesso in un riferimento reale vengono indifferentemente denotate con simboli quali (x_1, x_2, x_3) o (ξ_1, ξ_2, ξ_3), o simboli analoghi, senza distinguere i punti reali da quelli immaginari. Quando il sistema di riferimento è fissato, per indicare che il punto P ha coordinate (x_1, x_2, x_3) scriviamo

$$P(x_1, x_2, x_3).$$

Sia $\mathcal{R}$ un riferimento fissato di $\mathbb{E}$: le coordinate rispetto a $\mathcal{R}$ di un punto P di $\mathbb{E}$, pensato come punto complesso, sono esattamente le coordinate di P in $\mathbb{E}$ rispetto a $\mathcal{R}$.

Definizione 1.2.4. Il *coniugato* di un punto complesso P è per definizione il punto complesso, denotato con $\overline{P}$, le cui coordinate in un riferimento (e quindi in ogni riferimento) sono ottenute applicando il coniugio complesso, ordinatamente, ad ogni coordinata di P. Se si associa a ogni punto complesso P il suo coniugato $\overline{P}$, si ottiene una corrispondenza biunivoca dello spazio complesso $\mathbb{E}_\mathbb{C}$ in sè, detta *coniugio*:

$$\begin{array}{c} \mathbb{E}_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C} \\ P \mapsto \overline{P} \end{array}.$$

Si osservi che *un punto P coincide con il suo coniugato $\overline{P}$ se e solo il punto P è reale*:

$$P = \overline{P} \qquad \Leftrightarrow \qquad P \text{ è reale}$$

in tal caso, si dice che P è un *punto fisso* (o un punto unito) dell'applicazione coniugio. Inoltre, componendo il coniugio con sè stesso, si trova l'identità di $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$:

$$P = \overline{\overline{P}} \qquad \forall P \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}.$$

Definizione 1.2.5. Se S è un sottoinsieme di $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$, si dice *coniugato* di S l'insieme

$$\overline{S} = \{\overline{P} : P \in S\}$$

immagine di S tramite il coniugio.

Si osservi che i punti reali di S costituiscono l'intersezione $S \cap \overline{S}$.

1.3 Vettori complessi

Siano (P, Q) e (P', Q') due coppie ordinate di punti complessi; si osservi che, in ciascuna coppia, può accadere che i due punti della coppia siano entrambi reali, oppure entrambi immaginari, oppure uno reale e uno immaginario. Ciascuna coppia ordinata costituisce un *vettore complesso applicato*.

Definizione 1.3.1. La coppia ordinata (P, Q) è *equipollente* alla coppia ordinata (P', Q') se, fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$, le coordinate (p_1, p_2, p_3) di P, (q_1, q_2, q_3) di Q, (p'_1, p'_2, p'_3) di P' e (q'_1, q'_2, q'_3) di Q' in $\mathcal{R}$ soddisfano le relazioni:

$$q'_1 - p'_1 = q_1 - p_1, \qquad q'_2 - p'_2 = q_2 - p_2, \qquad q'_3 - p'_3 = q_3 - p_3.$$

Si verifica facilmente che la definizione è ben posta, perché è indipendente dalla scelta del riferimento cartesiano reale $\mathcal{R}$. Inoltre, la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbb{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ delle coppie ordinate di punti complessi.

Definizione 1.3.2. Un *vettore (libero) complesso* è una classe di equivalenza di $\mathbb{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ rispetto alla relazione di equipollenza. Il vettore $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia (P, Q) verrà denotato con il simbolo $\mathbf{PQ}$ o con $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$.

Fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$, si associano al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$ le coordinate (b_1, b_2, b_3) ottenuto prendendo, ordinatamente, le differenze delle coordinate di $Q(q_1, q_2, q_3)$ e $P(p_1, p_2, p_3)$ in $\mathcal{R}$:

$$b_1 = q_1 - p_1, b_2 = q_2 - p_2, b_3 = q_3 - p_3.$$

Si osservi che, se (1.3) sono le formule di cambiamento tra due riferimenti reali $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, allora la relazione tra le componenti (b_1, b_2, b_3) di un vettore $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$ in $\mathcal{R}$ e le componenti (b'_1, b'_2, b'_3) dello stesso vettore in $\mathcal{R}'$ sono:

$$\begin{aligned} b'_1 &= a_{11}\, b_1 + a_{12}\, b_2 + a_{13}\, b_3 \\ b'_2 &= a_{21}\, b_1 + a_{22}\, b_2 + a_{23}\, b_3 \;. \\ b'_3 &= a_{31}\, b_1 + a_{32}\, b_2 + a_{33}\, b_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'insieme dei vettori complessi liberi è dunque dotato di una struttura naturale di spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi, di dimensione 3. In ogni riferimento reale, le coordinate della somma di vettori sono la somma delle coordinate, mentre le coordinate del prodotto di un vettore per uno scalare $a \in \mathbb{C}$ sono il prodotto di a per le coordinate del vettore.

Si osservi che la struttura di spazio vettoriale definita sull'insieme dei vettori complessi liberi NON dipende dalla scelta del riferimento. In particolare, la dipendenza lineare dei vettori corrisponde perfettamente alla dipendenza lineare delle loro coordinate, in un qualsiasi riferimento.

Lo spazio vettoriale dei vettori liberi complessi si denota con

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$$

e risulta essere il complessificato dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi di $\mathbb{E}$, nelle notazioni della sezione 1 di questo capitolo. Infatti, ogni vettore in $\mathcal{V}$ individua uno ed solo vettore complesso. Inoltre, fissato un riferimento reale, un vettore complesso $\mathbf{a}$ ha componenti reali se e solo se esistono punti (reali) P e Q in $\mathbb{E}$ tali che $\mathbf{a} = \mathbf{PQ}$. Per questo motivo, i vettori in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ che possono essere rappresentati da coppie di punti di $\mathbb{E}$ prendono il nome di vettori *reali*. Si osservi che, se P e Q sono punti reali, il vettore $\mathbf{PQ}$ ha componenti reali in ogni riferimento reale; ma può succedere che sia P che Q siano immaginari e il vettore $\mathbf{PQ}$ abbia componenti reali.

Per distinguerli dai vettori complessi, i vettori liberi in $\mathcal{V}$ sono detti *vettori liberi ordinari*. Spesso, l'aggettivo *libero* viene omesso per abbreviare le frasi.

Sia fissato un riferimento $\mathcal{R}$ e si denotino con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i vettori complessi di componenti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Come per lo spazio ordinario, le *coordinate di un punto complesso* P sono (x_1, x_2, x_3) se e solo se

$$\mathbf{OP} = x_1\, \mathbf{i} + x_2\, \mathbf{j} + x_3\, \mathbf{k}$$

ove O è l'origine del riferimento.

In analogia con i vettori ordinari, due vettori complessi non nulli $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si dicono *paralleli* se esiste un numero complesso ρ tale che

$$\mathbf{a} = \rho\, \mathbf{b}$$

cioè se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$. Se (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) sono le componenti di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in un riferimento, allora i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} < 2. \tag{1.5}$$

La trasformazione coniugio si estende allo spazio dei vettori complessi:

Definizione 1.3.3. Un vettore $\overline{\mathbf{a}}$ si dice *coniugato* del vettore $\mathbf{a}$ se le componenti di $\overline{\mathbf{a}}$, in un qualsiasi riferimento reale, sono complesse coniugate delle componenti di $\mathbf{a}$.

Si osservi che, se $\mathbf{a} = \mathbf{PQ}$ per opportuni punti complessi P e Q, allora il vettore coniugato $\overline{\mathbf{a}}$ è individuato dai punti coniugati:

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{P}}\,\overline{\mathbf{Q}}.$$

Ogni vettore complesso può essere decomposto nelle sue parti reale e immaginaria.

1.4 Complessificazione della retta e del piano

In modo analogo a quanto svolto per lo spazio, si possono costruire la complessificazione della retta e del piano.
a) Complessificazione della retta
Si consideri la retta r ed il suo complessificato $r_{\mathbb{C}}$. Un punto P è reale se e solo se è reale la sua terna di coordinate rispetto ad un riferimento reale. Il punto generico della retta ha coordinata complessa non reale.
b) Complessificazione del piano
Si considerino il piano π ed il suo complessificato $\pi_{\mathbb{C}}$.

Definizione 1.4.1. Una *retta (complessa)* r di π è l'insieme dei punti P le cui coordinate $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ soddisfano una equazione della forma $ax_1+bx_2+c = 0$ per opportuni numeri complessi a, b, c, con a e b non tutti nulli. L'equazione $ax_1 + bx_2 + c = 0$ è detta equazione cartesiana della retta r.

Osserviamo che la definizione di retta è ben posta, non dipendendo dalla scelta del riferimento cartesiano utilizzato. L'equazione cartesiana è individuata da r solo a meno di multiplo per una costante complessa non nulla.

Definizione 1.4.2. Sia fissato un riferimento cartesiano reale $\mathcal{R} = (O, R)$ nel piano complessificato. Sia r la retta di equazione cartesiana $ax_1 + bx_2 + c = 0$. La *giacitura* della retta r è l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ le cui componenti (l, m) nel riferimento R di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ soddisfano l'equazione:

$$a\,l + b\,m = 0.$$

Un vettore complesso è parallelo alla retta r se e solo se appartiene alla giacitura di r. Ogni vettore non nullo che appartiene alla giacitura di r si dice *vettore direttore* di r, mentre le sue componenti sono dette *numeri direttori* di r.

Si osservi che la definizione di giacitura è ben posta e non dipende dalla scelta del riferimento cartesiano.

Dimostrare, per esercizio, che un vettore libero appartiene alla giacitura di una retta r se e solo se ammette un rappresentante $\mathbf{PQ}$ con $P, Q \in r$: dunque, *la giacitura di una retta r è lo spazio vettoriale dei vettori liberi* $\mathbf{PQ}$, *con* $P, Q \in r$.

Si consideri fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\pi_{\mathbb{C}}$. Se $\mathbf{v}$ è un vettore direttore di una retta r e $P(p_1, p_2) \in r$ è un punto complesso, allora ogni punto $X(x_1, x_2)$ della retta è della forma

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + t\,l \\ x_2 &= p_2 + t\,m \end{aligned} \tag{1.6}$$

ove (l, m) sono le componenti di $\mathbf{v}$ nel riferimento assegnato e $t \in \mathbb{C}$ è un opportuno numero complesso. Viceversa, ogni punto avente coordinate della forma (1.6) appartiene alla retta. Le equazioni (1.6) sono dette *equazioni parametriche della retta*, e possono esser scritte in forma vettoriale:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{C}$$

Si osservi, in particolare, che i punti di una retta sono parametrizzati da un parametro complesso.

Osservazione 1.4.3. Per definizione, una retta r di $\pi_{\mathbb{C}}$ è *reale* se $r = \overline{r}$. Si osservi che ogni retta reale ha infiniti punti reali, ma contiene, sempre, anche punti immaginari. Se $P \neq \overline{P}$, la retta $< P, \overline{P} >$ è una retta reale.

Osservazione 1.4.4. Una retta r è reale se e solo se, in un qualunque riferimento reale, r ammette una equazione cartesiana a coefficienti reali. In un riferimento reale, sia $ax + by + c = 0$ l'equazione di una retta r. La retta $\overline{r}$ è allora definita dall'equazione $\overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c} = 0$. La retta r è reale se e solo se la terna (a, b, c) dei coefficienti è proporzionale (con coefficiente di proporzionalità complesso non nullo) ad una terna di numeri reali, cioè:

$$r = \overline{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = 1.$$

Ora basta osservare che

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} (a + \overline{a}) & (b + \overline{b}) & (c + \overline{c}) \\ (a - \overline{a}) & (b - \overline{b}) & (c - \overline{c}) \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} Re(a) & Re(b) & Re(c) \\ Im(a) & Im(b) & Im(c) \end{pmatrix}.$$

Se tale rango è 1, significa che la terna (a, b, c) è proporzianale (con coefficiente di proporzionalità un numero complesso non nullo) ad una terna reale.

Osservazione 1.4.5. Se una retta r non è reale, cioè $r \neq \overline{r}$, allora l'intersezione $r \cap \overline{r}$ è vuota o è data da un punto P: nel primo caso le due rette sono parallele, prive di punti reali e la loro direzione è reale; nel secondo caso, il punto P di intersezione è necessariamente reale, ma le direzioni di r e $\overline{r}$ non sono reali.

Per provarlo, manteniamo le notazioni dell'osservazione precedente e supponiamo che la retta non sia reale, cioè $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 2$. Se $rg\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} = 2$, allora il sistema delle equazioni cartesiane di r e $\bar{r}$ è un sistema di Cramer, e le due rette si intersecano in un punto P. Altrimenti, il sistema non è compatibile, e le rette r e $\bar{r}$ sono parallele e distinte. In quest'ultimo caso, si ha che $rg\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} = 1$; ragionando come nell'osservazione precedente, si ricava che la coppia (a, b) è proporzionale ad una coppia di numeri reali, con coefficiente di proporzionalità un numero complesso non nullo. La retta ammette dunque un vettore direttore con componenti reali.

Esempio 1.4.6. Sia fissato un riferimento reale.

1) Sia r la retta di equazione $2(i + 1)x + (3i + 3)y + 5i + 5 = 0$. Dividendo per il coefficiente di x, ottengo l'equazione reale $x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} = 0$; dunque la retta r è reale.
2) Si consideri la retta r di equazione $7x - iy + 2 = 0$; la retta $\bar{r}$ ha dunque equazione $7x + iy + 2 = 0$. La retta r non è reale: mettendo infatti a sistema le equazioni di r e $\bar{r}$ si ottiene un sistema di Cramer. Considerando la differenza delle equazioni di r e $\bar{r}$ si vede subito che il loro punto di intersezione è $P(-\frac{2}{7}, 0)$; P è l'unico punto reale di r, visto cha r è parallela al vettore non reale $(i, 7)$.
3) Le rette $r : 3x + 2y - i = 0$ e $\bar{r} : 3x + 2y + i = 0$ sono parallele entrambe alla direzione reale $(-2, 3)$ e non hanno punti reali.

Raccogliendole osservazioni precedenti, si ricava la seguente proposizione:

Proposizione 1.4.7. *Una retta è reale se e solo se contiene un punto reale P e ha un vettore direttore reale.*

1.5 Sottospazi della complessificazione dello spazio affine 3-dimensionale

Sia $\mathbb{A}$ lo spazio euclideo di dimensione 3 reale e sia $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ la sua complessificazione, nella quale si consideri fissato un riferimento reale.

Definizione 1.5.1. Un *piano (complesso)* π di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ è l'insieme dei punti P le cui coordinate $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ soddisfano una equazione della forma $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ per opportuni numeri complessi a, b, c, d, con a, b e c non tutti nulli. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ è detta equazione cartesiana del piano π.

Osserviamo che la definizione di piano è ben posta, non dipendendo dalla scelta del riferimento cartesiano utilizzato. Fissato il riferimento, l'equazione cartesiana è individuata dal piano solo a meno di multiplo per una costante complessa non nulla.

Definizione 1.5.2. Sia fissato un riferimento cartesiano reale $\mathcal{R} = (O, R)$ nello spazio complesso. Sia π il piano di equazione cartesiana $ax_1+bx_2+cx_3+d = 0$. La *giacitura* del piano π è l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ le cui componenti (l, m, n) nel riferimento R di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ soddisfano l'equazione:

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0. \tag{1.7}$$

La giacitura di un piano forma un sottospazio vettoriale di dimensione complessa 2 dello spazio vettoriale dei vettori complessi liberi $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. Un vettore complesso è *parallelo al piano* π se e solo se appartiene alla giacitura di π.

Si osservi che la definizione di giacitura è ben posta e non dipende dalla scelta del riferimento cartesiano. Dimostrare, per esercizio, che un vettore libero appartiene alla giacitura di un piano π se e solo se ammette un rappresentante $\mathbf{PQ}$ con $P, Q \in \pi$: dunque, *la giacitura di un piano π è lo spazio vettoriale dei vettori liberi* $\mathbf{PQ}$*, con $P, Q \in \pi$.*

Si consideri fissato un riferimento reale $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$. Se $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sono un riferimento della giacitura di π e $P(p_1, p_2, p_3) \in \pi$ è un punto complesso, allora ogni punto $X(x_1, x_2, x_3)$ del piano è della forma

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t\,v_1 + s\,w_1 \\ x_2 = p_2 + t\,v_2 + s\,w_2 \\ x_3 = p_3 + t\,v_3 + s\,w_3 \end{cases} \tag{1.8}$$

ove (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) sono, rispettivamente, le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nel riferimento assegnato e $t, s \in \mathbb{C}$ sono opportuni numeri complessi. Viceversa, ogni punto avente coordinate della forma (1.8) appartiene al piano. Le equazioni (1.8) sono dette *equazioni parametriche del piano*, e possono essere scritte in forma vettoriale:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \qquad t, s \in \mathbb{C}$$

Si osservi, in particolare, che i punti di un piano sono parametrizzati da (almeno) due parametri complessi.

Diciamo che i punti $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ sono complanari se esiste un piano che li contiene tutti.

Osservazione 1.5.3. Se π è un piano, l'insieme coniugato $\overline{\pi}$ è ancora un piano, detto *piano coniugato*. Fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, sia $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ l'equazione di un piano π. Allora il piano coniugato $\overline{\pi}$ ha equazione $\overline{a}x_1 + \overline{b}x_2 + \overline{c}x_3 + \overline{d} = 0$

Osservazione 1.5.4. Un piano π di equazione cartesiana $a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d = 0$ è reale se e solo se $\pi = \overline{\pi}$, cioè se e solo se

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = 1,$$

cioè *se e solo se ammette una equazione cartesiana a coefficienti reali.* In tal caso, per determinare esplicitamente una equazione reale è sufficiente prendere l'equazione $Re(a)\, x_1 + Re(b)\, x_2 + Re(c)\, x_3 + Re(d) = 0$, ottenuta come semisomma dell'equazione iniziale e della sua coniugata. Alternativamente, si divide l'equazione per una costante, in modo che uno dei suoi coefficienti diventi 1.

Per studiare la relazione tra un piano e il suo coniugato, introduciamo la nozione di retta, perfettamente simile a quella già nota:

Definizione 1.5.5. Una *retta* r è l'insieme dei punti di intersezione tra due piani complessi distinti α e β, qualora tale insieme risulti non vuoto. La *giacitura* di r è il sottospazio di dimensione complessa 1, formato dai vettori complessi liberi paralleli sia ad α che a β. Un vettore che genera la giacitura di r viene detto *vettore direttore* di r e le sue componenti in un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ sono detti *numeri direttori*.

Si osservi che tale definizione corrisponde a quella di retta in un piano complessificato.

Osservazione 1.5.6. Se due piani distinti α e β hanno rispettivamente equazione cartesiana $a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d = 0$ e $a'\, x_1 + b'\, x_2 + c'\, x_3 + d' = 0$, la loro intersezione è una retta (cioè è non vuota) se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

In tal caso, un vettore direttore $\mathbf{v}$ della retta intersezione si ricava facilmente considerando i minori di ordine con segno della matrice:

$$\mathbf{v} = \left(det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right).$$

Osservazione 1.5.7. Si consideri fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$. Se $\mathbf{v}$ è un vettore direttore di una retta r e $P(p_1, p_2, p_3) \in r$ è un punto complesso, allora ogni punto $X(x_1, x_2, x_3)$ della retta è della forma

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t\, l \\ x_2 = p_2 + t\, m \\ x_3 = p_3 + t\, n \end{cases} \tag{1.9}$$

ove (l, m, n) sono le componenti di $\mathbf{v}$ nel riferimento assegnato e $t \in \mathbb{C}$ è un opportuno numero complesso. Viceversa, ogni punto avente coordinate della forma (1.9) appartiene alla retta. Le equazioni(1.9) sono dette *equazioni parametriche della retta*, e possono esser scritte in forma vettoriale:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{C}$$

Si osservi, in particolare, che i punti di una retta sono parametrizzati da un parametro complesso.

Diciamo che i punti $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ sono *allineati* se esiste una retta che li contiene tutti.

Osservazione 1.5.8. Se i numeri direttori l, m, n sono non nulli, la retta parametrizzata dall'equazione (1.9) è descritta dalle *equazioni nella forma dei rapporti uguali* :

$$\frac{x_1 - p_1}{l} = \frac{x_2 - p_2}{m} = \frac{x_3 - p_3}{n},$$

equivalenti, ad esempio alla coppia di equazioni cartesiane $\frac{x_1-p_1}{l} - \frac{x_2-p_2}{m} = 0$, $\frac{x_1-p_1}{l} - \frac{x_3-p_3}{n} = 0$

Osservazione 1.5.9. L'insieme coniugato $\overline{r}$ di una retta r è ancora una retta, detta *retta coniugata*. Le equazioni cartesiane di $\overline{r}$ si ottengono da quelle di r coniugando i coefficienti. Un vettore direttore di $\overline{r}$ si ottiene prendendo il coniugato di un vettore direttore di r.

Torniamo allo studio della posizione relativa tra un piano π e il suo coniugato. Se $\pi \neq \overline{\pi}$, si dice che il *piano π è immaginario.* In tal caso, si verificano due possibilità, a seconda che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = 2 \text{ oppure } 1;$$

nel primo caso, $\pi \cap \overline{\pi}$ è una retta reale e la giacitura di π non è reale, mentre nel secondo caso $\pi \cap \overline{\pi} = \emptyset$ cosicché i piani π e $\overline{\pi}$ sono paralleli tra loro, e la loro giacitura è un sottospazio reale.

Osservazione 1.5.10. Una retta r è reale se e solo se $r = \overline{r}$, o, equivalentemente, se essa ammette un sistema di equazioni reali

$$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ a'\,x_1 + b'\,x_2 + c'\,x_3 + d' = 0 \end{cases}.$$

Per determinare un tale sistema di equazioni per una retta r assegnata, si consideri un punto $P \in r$. Anche $\overline{P}$ risulta appartenere a r, che è reale, come anche il punto medio M tra P e $\overline{P}$. Dunque, M è un punto reale di r. Se il punto P non è reale, la direzione di r è individuata dal vettore $P - \overline{P}$; denotate con $P(\alpha, \beta, \gamma)$ le coordinate di P e con $\overline{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ le coordinate di $\overline{P}$, le componenti del vettore $P - \overline{P}$ sono date da:

$$P - \overline{P} = (\alpha - \overline{\alpha}, \beta - \overline{\beta}, \gamma - \overline{\gamma}) = (2i\,Im(\alpha), 2i\,Im(\beta), 2i\,Im(\gamma)).$$

Dunque la retta r contiene il punto reale M ed è parallela al vettore reale $(Im(\alpha), Im(\beta), Im(\gamma))$; ora è facile determinarne equazioni reali, utilizzando il teorema degli orlati.
Se, invece, il punto P di partenza era reale, si considera un nuovo punto $Q \in r$: se anche tale punto è reale, allora $P - Q$ è già un vettore reale non nullo parallelo a r. Se invece Q non è reale, ci si riconduce al caso precedente.

Osservazione 1.5.11. Supponiamo ora che la retta r non sia reale, cioè $r \neq \overline{r}$; le rette r e $\overline{r}$ sono o complanari o sghembe. Se r e $\overline{r}$ sono complanari, diciamo che la retta r è di *prima specie*; in tal caso, se le due rette sono incidenti, il punto di incidenza è necessariamente un punto reale, e la loro giacitura non è reale; se, invece, r e $\overline{r}$ sono parallele, esse non hanno punti reali, ma la loro giacitura è reale. Nel secondo caso, invece, r e $\overline{r}$ sono sghembe e diciamo che la retta r è di *seconda specie*: esse sono prive di punti reali e le loro giaciture non sono reali. In particolare, una retta non reale è priva di punti reali, oppure ne contiene uno solo.

Riassumendo quanto abbiamo dimostrato:

Proposizione 1.5.12. *Un piano (risp., una retta) dello spazio complesso è reale se e solo se contiene un punto reale e la sua giacitura è reale.*

Esempio 1.5.13. Sia fissato un riferimento reale in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$.

1) **Retta reale per un punto immaginario** *Per un punto immaginario passa una unica retta reale.* Ad esempio, sia $P(i, -2i, 3+4i)$. Una retta reale r che passi per P deve contenere anche $\overline{P}$. Ma allora r coincide con la retta per P e $\overline{P}$, che è reale perché passa per il punto medio $M(0,0,3)$ di P e $\overline{P}$, che è reale, ed ha giacitura reale, generata dal vettore $\mathbf{P\overline{P}} = (0,0,6)$. La retta ottenuta è reale in base alla Proposizione 1.5.12.
2) **Equazioni reali per una retta reale** Sia assegnata la retta r di equazioni: $x_1 - 1 - i = \frac{x_2 - 2i}{2} = x_3 - 2 + i$. La retta r è reale perché contiene sia il punto $A(1+i, 2i, 2-i)$ che il suo coniugato $\overline{A}(1-i, -2i, 2+i)$. Per determinare un sistema di equazioni reali per r, considero il punto medio $M(1,0,2)$ di A e $\overline{A}$, e, come numeri direttori, $A - \overline{A}$ o, equivalentemente, $(1,2,1)$. Le equazioni reali si trovano imponendo che
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 - 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1;$$
dunque r ha equazioni $2x_1 - 2 - x_2 = 0, x_1 + x_3 - 3 = 0$.
3) **Rette reali in un piano** Per la Proposizione 1.5.12, *ogni piano reale α contiene infinite rette reali* (basta intesecarlo con un qualsiasi altro piano reale non parallelo ad α). *Un piano immaginario α contiene al più una retta reale*: se $\alpha \cap \overline{\alpha}$ non è una retta (cioè se α e $\overline{\alpha}$ sono paralleli), allora α non contiene rette reali. Se, invece, $\alpha \cap \overline{\alpha}$ è una retta r, allora la retta r è reale ed è l'unica retta reale contenuta nel piano α.
Ad esempio, sia α il piano di equazione $3ix_1 + 2x_2 + (4+2i)x_3 + i = 0$. Il piano coniugato $\overline{\alpha}$ ha equazione $-3ix_1 + 2x_2 + (4-2i)x_3 - i = 0$. Poiché
$$rg\begin{pmatrix} 3i & 2 & 4+2i \\ -3i & 2 & 4-2i \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$
i piani α e $\overline{\alpha}$ si intersecano lungo una retta reale r, che è l'unica retta reale contenuta in α. Per cercare equazioni reali di r basta separare le parti reale e immaginaria dell'equazione di α: la retta r ha equazioni cartesiane reali $2x_2 + 4x_3 = 0, 3x_1 + 2x_3 + 1 = 0$.

4) **Equazioni reali di una retta intersezione tra un piano e il coniugato** Per scrivere le equazioni reali di una retta reale di equazioni:

$$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ \overline{a}\,x_1 + \overline{b}\,x_2 + \overline{c}\,x_3 + \overline{d} = 0 \end{cases}$$

Basta utilizzare le seguenti equazioni reali:

$$\begin{cases} Re(a)\,x_1 + Re(b)\,x_2 + Re(c)\,x_3 + Re(d) = 0 \\ Im(a)\,x_1 + Im(b)\,x_2 + Im(c)\,x_3 + Im(d) = 0 \end{cases}$$

Ad esempio, è possibile applicare questa procedura nell'esempio

$$r : \begin{cases} (1+2i)\,x_1 + (2-i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 + 1 = 0 \\ (1-2i)\,x_1 + (2+i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 + 1 = 0 \end{cases},$$

ottenendo le equazioni reali:

$$r : \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 + 1 = 0 \\ -2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 = 0 \end{cases}.$$

5) **Equazioni reali di una retta reale assegnata tramite equazioni cartesiane** Si considerino i piani α di equazione $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0$ e e β di equazione $a'\,x_1 + b'\,x_2 + c'\,x_3 + d' = 0$, e si supponga che l'intersezione $\alpha \cap \beta$ sia una retta r. Si vuole stabilire se la retta $r = \alpha \cap \beta$ sia reale:

$$r : \begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ a'\,x_1 + b'\,x_2 + c'\,x_3 + d' = 0 \end{cases}$$

La condizione affinché r sia reale è che $r \subset \overline{\alpha}$ e $r \subset \overline{\beta}$, cioè che

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ a' & b' & c' & d' \\ \overline{a'} & \overline{b'} & \overline{c'} & \overline{d'} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} Re(a) & Re(b) & Re(c) & Re(d) \\ Im(a) & Im(b) & Im(c) & Im(d) \\ Re(a') & Re(b') & Re(c') & Re(d') \\ Im(a') & Im(b') & Im(c') & Im(d') \end{pmatrix} = 2$$

In tal caso, per ottenere equazioni reali per la retta r, basta utilizzare due righe indipendenti dell'ultima matrice scritta come matrice completa del sistema di equazioni.
Se il piano α è immaginario, per affermare che r è reale è sufficiente mostrare che $r \subset \overline{\alpha}$, cioè è sufficiente mostrare che

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

perché, in tal caso, la retta r coincide con l'intersezione $\alpha \cap \overline{\alpha}$. In tal caso, si rientra nel caso dell'esempio precedente ed è possibile utilizzare le seguenti equazioni reali di r:

$$\begin{cases} Re(a)\,x_1 + Re(b)\,x_2 + Re(c)\,x_3 + Re(d) = 0 \\ Im(a)\,x_1 + Im(b)\,x_2 + Im(c)\,x_3 + Im(d) = 0 \end{cases}$$

Analogo ragionamento puó essere adottato se il piano β è immaginario.
Se sia α che β sono reali, anche r è reale, e per trovarne equazioni reali è sufficiente determinare una equazione rale per ciascuno dei due piani.

6) **Una retta reale** Siano α di equazione $(1-i)\,x_1+(2-i)\,x_2-(1+2i)\,x_3=-1$ e β di equazione $(i+1)\,x_1+(1+2i)\,x_2+(2-i)\,x_3=-i$ due piani assegnati. Sotto l'ipotesi che $r=\alpha\cap\beta$ sia una retta, si vuole stabilire se la retta $r=\alpha\cap\beta$ sia reale.
Il piano coniugato di α è $\overline{\alpha}:(1+i)\,x_1+(2+i)\,x_2+(1-2i)\,x_3+1=0$. Poiché il piano α non è reale, la retta r è reale se e solo se $r\subset\overline{\alpha}$, cioè se e solo se $\overline{\alpha}$ appartiene al fascio di piani per r. Dunque:

$$r \text{ è reale} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\begin{pmatrix}(1-i) & (2-i) & (-1-2i) & 1\\ (i+1) & (1+2i) & (2-i) & i\\ (1+i) & (2+i) & (1-2i) & 1\end{pmatrix}=2.$$

Ora,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1-i & 2-i & -1-2i & 1\\ i+1 & 1+2i & 2-i & i\\ 1+i & 2+i & 1-2i & 1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ i+1 & 1+2i & 2-i & i\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=2$$

Dunque la retta r è reale.
Per determinare equazioni reali per la retta r, basta osservare dalle matrici precedenti che i piani α e $\overline{\alpha}$ sono distinti: dunque $r=\alpha\cap\overline{\alpha}$ e per trovare equazioni reali di r basta separare parte reale e parte immaginaria nei coefficienti dell'equazione di α, come nel punto precedente, ottenendo $r: x+2y-z+1=0, x+y+2z=0$.
7) **Una retta non reale** Siano α e β i piani di equazione, rispettivamente, $(1-i)\,x_1+(2-i)\,x_2+(1+2i)\,x_3=-1$ e $(i+1)\,x_1+(1+2i)\,x_2+(2-i)\,x_3=-i$. Si vuole stabilire se la retta $r=\alpha\cap\beta$ sia reale.
Il piano coniugato di α è $\overline{\alpha}:(1+i)\,x_1+(2+i)\,x_2+(1-2i)\,x_3+1=0$. Poiché il piano α non è reale, la retta r è reale se e solo se $r\subset\overline{\alpha}$, cioè se e solo se $\overline{\alpha}$ appartiene al fascio di piani per r. Dunque:

$$r \text{ è reale} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\begin{pmatrix}(1-i) & (2-i) & (1+2i) & 1\\ (i+1) & (1+2i) & (2-i) & i\\ (1+i) & (2+i) & (1-2i) & 1\end{pmatrix}=2.$$

Ora,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1-i & 2-i & 1+2i & 1\\ i+1 & 1+2i & 2-i & i\\ 1+i & 2+i & 1-2i & 1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ i+1 & 1+2i & 2-i & i\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=$$
$$=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ i & 2i & 4-i & i\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 4i+2 & 0\\ -1 & -2 & 4i+1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=3.$$

Dunque la retta r non è reale.
8) **Condizione di complanarità tra una retta e la coniugata** La condizione affinché le rette

$$r=\begin{cases}a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d=0\\ a'\,x_1+b'\,x_2+c'\,x_3+d'=0\end{cases}\quad \text{e } \overline{r}=\begin{cases}\overline{a}\,x_1+\overline{b}\,x_2+\overline{c}\,x_3+\overline{d}=0\\ \overline{a'}\,x_1+\overline{b'}\,x_2+\overline{c'}\,x_3+\overline{d'}=0\end{cases}$$

siano complanari è che

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ \overline{a'} & \overline{b'} & \overline{c'} & \overline{d'} \end{pmatrix} = 0.$$

Ciò accade se r è reale o di prima specie.

9) **Una retta di prima specie** Ad esempio, se

$$r = \begin{cases} (1+i)\,x_1 + 2\,x_2 - (1-i)\,x_3 - 1 = 0 \\ 2ix_1 + (1+i)\,x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

occorre studiare

$$\det \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i-1 & -1 \\ 2i & 1+i & 0 & -1 \\ 1-i & 2 & -i-1 & -1 \\ -2i & 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

La retta r è dunque complanare con la sua coniugata. Piú precisamente, la retta r non è reale perché la matrice dei coefficienti ha rango 3, e quindi r è di prima specie ed interseca propriamente la coniugata.

Il piano α che contenga r e $\overline{r}$ è necessariamente reale, perché contiene il punto reale $P = r \cap \overline{r}$ ed ha giacitura reale (generata dal vettore direttore di r e dal suo coniugato). Si vogliono determinare equazioni reali per α.

Primo modo: Si consideri l'equazione del fascio di piani per r, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$$\lambda[(1+i)\,x_1 + 2\,x_2 - (1-i)\,x_3 - 1] + \mu[2ix_1 + (1+i)\,x_2 - 1] =$$
$$\{(1+i)\lambda + 2i\mu\}\,x_1 + \{2\lambda + (1+i)\mu\}\,x_2 + (-1+i)\lambda\,x_3 - \lambda - \mu = 0 \quad .$$

Si scelga un punto $Q \in r$: ad esempio il punto $Q(0, (1-i)/2, (1-i)/2)$. Poiché r non è reale e Q è immaginario, sicuramente $\overline{Q} \in \overline{r}$ ma $\overline{Q} \notin r$. Imponendo il passaggio per $\overline{Q} = (0, (1+i)/2, (1+i)/2)$ nel fascio di piani di asse r, si ricavano la condizione $\lambda + \mu = 0$ da cui, per $\lambda = 1, \mu = -1$, una equazione del piano cercato: $(1-i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 = 0$. Dividendo per $(1-i)$, o procedendo come nell'Osservazione 1.5.4, si ricava l'equazione reale di α: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Secondo modo: Controllo se r e $\overline{r}$ sono parallele. Inizio determinando i numeri direttori di r, studiando i minori della matrice

$$\begin{pmatrix} i+1 & 2 & i-1 \\ 2i & 1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricavo che i numeri direttori di r sono $(-1, i+1, i)$ e i numeri direttori di $\overline{r}$ sono $(-1, 1-i, -i)$: le due rette coniugate non sono quindi tra loro parallele, perché i loro numeri direttori non sono proporzionali.

Le rette r e $\overline{r}$ si intersecano dunque in un punto reale P, le cui coordinate si trovano facilmente separando le parti reale e immaginaria delle equazioni di r e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 1 = 0 \end{cases} .$$

Risulta $P(-1/2, 1, 1/2)$. So che il piano α passa per P e la sua giacitura è generata dai numeri direttori di r e $\overline{r}$. Il piano α ha dunque equazione cartesiana della forma $x_1 + x_2 - x_3 + d = 0$ e il coefficiente d viene calcolato imponendo il passaggio per il punto P (quindi $d = 0$). L'equazione cartesiana del piano α è $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

10) **Una retta di seconda specie** Se

$$r : \begin{cases} (1+i)\, x_1 + 2\, x_2 - (1-i)\, x_3 - 1 = 0 \\ 2ix_1 + (1-i)\, x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

per determinare di quale specie è r occorre studiare

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i-1 & -1 \\ 2i & 1-i & 0 & -1 \\ 1-i & 2 & -i-1 & -1 \\ -2i & 1+i & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq O.$$

Le rette coniugate non sono complanari e r è di seconda specie.

11) Se r è una retta di seconda specie e P è un punto reale, allora esiste una unica retta s reale per P complanare con r e complanare con $\overline{r}$. La retta s è l'intersezione tra l'unico piano α per r e per P ed il suo coniugato $\overline{\alpha}$ (che contiene P e $\overline{r}$). Si osservi che $\alpha \cap \overline{\alpha}$ è necessariamente non vuoto, perché contiene P, e dunque è una retta reale, che risulta essere incidente sia r che $\overline{r}$.
Per $P(1, 0, 0)$ e $r : (1+i)\, x_1 + 2\, x_2 - (1-i)\, x_3 - 1 = 0, 2ix_1 + (1-i)\, x_2 - 1 = 0$ come nel punto precedente, risulta $s : (1+i)x_1 + 3(1+i)x_2 + (-3+i)x_3 - 1 - i = 0$, $(1-i)x_1 + 3(1-i)x_2 + (-3-i)x_3 - 1 + i = 0$.

1.6 Complessificazione di uno spazio euclideo: estensione del prodotto scalare

Si consideri la complessificazione $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ di uno spazio affine euclideo $\mathbb{E}$. Ricordiamo che, nello spazio euclideo $\mathbb{E}$, è definito il prodotto scalare tra vettori liberi. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori liberi in $\mathcal{V}$, denotiamo con $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >$ il loro prodotto scalare e manteniamo la stessa definizione per il prodotto scalare indotto su $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, che ne è il complessificato.

Definizione 1.6.1. Due vettori complessi non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono *ortogonali* se

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0.$$

Se (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) sono le componenti di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in un riferimento reale ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo, allora

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3;$$

in particolare, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono ortogonali se e solo se

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = 0.$$

Due vettori reali non possono essere contemporaneamente paralleli e ortogonali.

Presi due punti P e $Q \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$, la *distanza* tra P e Q è per definizione il modulo del vettore $\mathbf{PQ}$, definito da:

$$|\mathbf{PQ}| = \pm\sqrt{< \mathbf{PQ}, \mathbf{PQ} >}$$

ove il simbolo $\pm$ può essere omesso se si interpreta la radice quadrata in senso complesso. Tale posizione è ben posta, ma non coincide con quella usuale nel caso di vettori reali.

Definizione 1.6.2. Se $|\mathbf{PQ}| = 0$, cioè se il vettore $\mathbf{PQ}$ è isotropo, diciamo che i *punti* P e Q sono *a distanza nulla*, e la retta per P e Q è detta retta isotropa: una retta si dice *isotropa* se è parallela ad un vettore isotropo.

Si verifica facilmente che, in tal caso, ogni coppia di punti della retta ha distanza nulla (cf. esercizio svolto 1.20).

Si ricordi che, per le proprietà del prodotto scalare complessificato, esistono sempre una coppia di punti distinti P e $Q \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ a distanza nulla.

a) Complessificazione del piano euclideo

Supponiamo che il piano π sia euclideo. E' possibile introdurre in $\pi_{\mathbb{C}}$ un riferimento reale ortogonale $(O, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Presi due punti $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$, la distanza tra P e Q è per definizione il modulo del vettore $\mathbf{PQ}$; se il vettore $\mathbf{PQ}$ è isotropo, i punti P e Q sono a distanza nulla, e la retta per P e Q è detta retta isotropa: una retta si dice *isotropa* se è parallela ad un vettore isotropo; nel piano, una retta isotropa è una qualsiasi retta parallela a $(1, i)$ o $(1, -i)$. Esistono dunque due fasci impropri di rette isotrope: il fascio dato dalle equazioni $-ix_1 + x_2 + c = 0$ e il fascio dato dalle equazioni $ix_1 + x_2 + c = 0$. In particolare, per ogni punto reale P passano due rette isotrope; esse costituiscono il luogo dei punti a distanza nulla da P, cioè la circonferenza di centro P e raggio 0. Se $P(p_1, p_2)$ è un punto, le rette isotrope per P hanno equazione $(x_1 - p) + i(x_2 - q) = 0$ e $(x_1 - p) - i(x_2 - q) = 0$ rispettivamente. La circonferenza di centro P e raggio 0 è data dalla loro unione $(x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2 = 0$.

b) Complessificazione dello spazio euclideo 3-dimensionale

Sia fissato un sistema monometrico ortonormale reale. Una retta i cui numeri direttori sono (λ, μ, ν) è isotropa se e solo se $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$. L'insieme dei vettori che soddisfano l'equazione $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0$ è detto *cono isotropo.* Un piano π di equazione $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ contiene una retta isotropa se e solo se esistono (λ,μ,ν) tali che:

$$\begin{cases} a\,\lambda+b\,\mu+c\,\nu=0 \\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2=0 \end{cases}$$

In un opportuno riferimento, è possibile supporre che $a\neq 0$ e ricavare che $\lambda=-\frac{b\mu+\nu c}{a}$. Sostituendo tale relazione nell'equazione del cono isotropo si ottiene che:

$$\begin{aligned} (\frac{b\mu+\nu c}{a})^2+\mu^2+\nu^2=0 \\ b^2\,\mu^2+c^2\,\nu^2+2b\,c\,\mu\,\nu+a^2\,\mu^2+a^2\,\nu^2=0 \\ (a^2+b^2)\,\mu^2+2b\,c\,\mu\,\nu+(a^2+c^2)\,\nu^2=0 \end{aligned}$$

Il discriminante dell'equazione di secondo grado così ottenuta è:

$$\Delta=b^2\,c^2-(a^2+b^2)(a^2+c^2)=a^2\,(a^2+b^2+c^2);$$

in particolare, si hanno due soluzioni distinte se $a^2+b^2+c^2\neq 0$, mentre si ha una unica soluzione altrimenti. Un piano di equazione $a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d=0$ tale che $a^2+b^2+c^2=0$ si dice *piano isotropo* e contiene un solo fascio di rette isotrope.

Osservazione 1.6.3. a) Ogni piano reale contiene due fasci di rette isotrope.
b) Per una retta isotropa passa un unico piano isotropo. (si dimostra in modo analogo)
c) Più in generale: *se* $\mathbf{v}$ *è un vettore isotropo non nullo in* $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$*, ogni vettore isotropo e ortogonale a* $\mathbf{v}$ *è necessariamente un multiplo di* $\mathbf{v}$.

Esempio 1.6.4. Sia fissato un riferimento reale in $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$.

1) Verificare che la retta $r=\begin{cases} 4x_1-3\,x_2+3=0 \\ x_1+3\,x_2-3i\,x_3+3=0 \end{cases}$ è isotropa e determinare l'unico piano isotropo che contiene r.
Calcolando il prodotto vettoriale dei vettori ortogonali ai due piani, osserviamo che un vettore parallelo alla retta r è $\mathbf{v}=(3i,4i,5)$. La retta r è isotropa perchè $-9-16+25=0$. Il piano isotropo che contiene r, avrà equazione $a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d=0$, con (a,b,c) isotropo, non nullo e ortogonale a $\mathbf{v}$. Per l'osservazione precedente, posso supporre $(a,b,c)=(3i,4i,5)$. Ora è sufficiente determinare d tale che il piano contenga r, imponendo ad esempio il passaggio del piano per un punto P di r. In particolare, è possibile scegliere $P(3/4,0,-i3/4)$ e ricavare l'equazione $3i\,x_1+4i\,x_2+5\,x_3-i3/2=0$.
2) Trovare le rette isotrope nel piano $3x_1+2x_2+x_3=0$ passanti per l'origine.
I coefficienti direttori (λ,μ,ν) delle rette cercate r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 3\lambda+2\mu+\nu=0 \\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2=0 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \nu = -(3\lambda + 2\mu) \\ \lambda^2 + \mu^2 + (3\lambda + 2\mu)^2 = 10\,\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2 = 0 \end{cases} .$$

È possibile assumere $\mu \neq 0$, perchè siamo interessati a soluzioni non nulle del sistema; in particolare, si può richiedere che $\mu = 1$, perché i coefficienti direttori sono individuati a meno di proporzionalità per una costante non nulla. Occorre dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \nu = -(3\lambda + 2) \\ 10\,\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \end{cases} ,$$

che ammette per soluzioni indipendenti i vettori $\mathbf{u}_1 = (\frac{-3+i\sqrt{41}}{10}, 1, \frac{29-i3\sqrt{41}}{10})$ e $\mathbf{u}_2 = (\frac{-3-i\sqrt{41}}{10}, 1, \frac{29+i3\sqrt{41}}{10})$. Poiché il piano $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ contiene l'origine, le rette isotrope in esso contenute e passanti per l'origine sono le rette di equazioni parametriche vettoriali: $\mathbf{x} = t\,\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x} = t\,\mathbf{u}_2$, rispettivamente.

Esercizi svolti

Si consideri lo spazio affine tridimensionale complessificato, nel quale sia fissato un riferimento reale.

Problema 1.1. *Determinare le coordinate del vettore libero* $\mathbf{v}$ *individuato dalla coppia ordinata* (A, B)*, ove* $A(3+i, 2, i-1)$ *e* $B(1+i, 3, 6i)$*. Determinare, inoltre, le componenti del vettore coniugato* $\overline{\mathbf{v}}$*. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di* $\mathbf{v}$*.*

Soluzione. Come indicato nel paragrafo 1.3, il vettore complesso $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$ ha componenti $(1 + i - (3 + i), 3 - 2, 6i - (i - 1)) = (-2, 1, 1 + 5i)$ e il coniugato $\overline{\mathbf{v}}$ ha componenti $(-2, 1, 1 - 5i)$. La parte reale $Re\,\mathbf{v}$ ha componenti $(-2, 1, 1)$, mentre la parte immaginaria $Im\,\mathbf{v}$ ha componenti $(0, 0, 5)$.

Problema 1.2. *Si consideri l'inclusione naturale* ι *dell'insieme* $\mathcal{V}$ *dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme* $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ *dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata* (A, D)*, ove* $A(2+3i, 7+4i, 2-i)$ *e* $D(7+3i, 6+4i, 4-i)$*, rappresenta un vettore appartenente all'immagine di* ι*?*

Soluzione. $\mathbf{AD}$ ha componenti $(7 + 3i - (2 + 3i), 6 + 4i - (7 + 4i), 4 - i - (2 - i)) = (5, -1, 2)$; poichè tali componenti sono reali, $\mathbf{AD}$ appartiene all'immagine di ι: ad esempio, è l'immagine del vettore libero ordinario di estremi O e $P(5, -1, 2)$.

Problema 1.3. *Controllare se sono allineati i punti* $A(3+i, 2, i-1)$*,* $B(1+i, 3, 6i)$*,* $C(14i - 1, 26 - 12i, 25i - 8)$*.*

Soluzione. I tre punti sono allineati se e solo se i vettori $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{AC}$ sono paralleli. Il vettore $\mathbf{AB}$ ha componenti $(-2, 1, 7)$, mentre il vettore $\mathbf{AC}$ ha componenti $(-2+13i, 24-12i, -8+19i)$. Osserviamo che i due vettori non sono paralleli, perché le componenti non sono proporzionali (con fattore di proporzionalità in $\mathbb{C}$); infatti, se fosse $\lambda\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, uguagliando le prime componenti si avrebbe $\lambda = (-2 + 13i)/2$, mentre, uguagliando le seconde componenti, $\lambda = 24 - 12i$. Poiché tali richieste sono incompatibili, concludiamo che i tre punti non sono allineati.

Problema 1.4. *Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta passante per* $A(3 - i, 2 + i, i)$ *e* $B(1 + i, 3i, 6)$*.*

Soluzione. I due punti sono distinti, e quindi individuano una unica retta. Come in (1.9), poiché il vettore $\mathbf{AB}$ ha componenti $(-2 + 2i, -2 + 2i, 6 - i)$, equazioni parametriche per la retta sono date da $x_1 = 3-i+t(-2+2i)$, $x_2 = 2+i+t(-2+2i)$, $x_3 = i + t(6 - i)$, al variare di $t \in \mathbb{C}$. Equazioni cartesiane si trovano o eliminando il parametro t dalle e quazioni parametriche, o procedendo come nell'Osservazione 1.5.8 e imponendo che $\frac{x_1-(3-i)}{-2+2i} = \frac{x_2-(2+i)}{-2+2i}$, $\frac{x_1-(3-i)}{-2+2i} = \frac{x_3-i}{6-i}$.

Problema 1.5. *a) I punti* $A(1, 2, 3)$*,* $B(4 + i, 7 - i, 3 + i)$*,* $C(5 + i, 7 - 2i, 3 + i)$ *e* $D(3, 2 - 2i, 3)$ *sono complanari?*
b) Determinare una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano α *passante per* A*,* B*,* D*. Tale piano è unico?*

Soluzione. a) I quattro punti sono complanari se e solo se i vettori **AB**, **AC** e **CD** sono linearmente dipendenti. Il vettore **AB** ha componenti $(3+i, 5-i, i)$, il vettore **AC** ha componenti $(4+i, 5-2i, i)$, mentre il vettore **AD** ha componenti $(2, -2i, 0)$. Osserviamo che, poiché $rg\begin{pmatrix} 3+i & 5-i & i \\ 4+i & 5-2i & i \\ 2 & -2i & 0 \end{pmatrix} = 3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, e i 4 punti non sono complanari.

b) Per quanto osservato, i vettori **AB** e **AD** sono linearmente indipendenti, e quindi il piano cercato è unico e coincide con il piano di equazione parametrica vettoriale $\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{AB} + \mu\,\mathbf{AD}$. Dunque, le equazioni parametriche sono: $x_1 = \lambda(3+i) + 2\mu$, $x_2 = \lambda(5-i) - 2i\,\mu$, $x_3 = i\,\lambda$; una equazione cartesiana è data da $x_2 = -ix_1 + x_3(-4i+2)$.

Problema 1.6. *Nel piano complesso, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$. Sia r la retta passante per $A(1, 3i)$ e $B(i, 2-i)$.*
a) Determinare una equazione cartesiana di r.
b) Discutere se la retta r è reale e determinare $r \cap \overline{r}$.
c) Determinare l'equazione cartesiana della retta s passante per $S(-1, 1)$ e parallela al vettore $\mathbf{w} = (1+i, -i)$.
d) Discutere se l'intersezione tra r e s è reale.
e) Determinare equazioni parametriche della retta per $C(1, 2i)$ e parallela ad r.

Soluzione.

Problema 1.7. *Si consideri il punto $A(1-i, -3+i)$.*
a) Determinare una equazione cartesiana reale della retta reale r per A. Determinare l'equazione del fascio di rette parallele ad r.
b) Determinare l'equazione cartesiana del fascio delle rette per A.

Problema 1.8. *Determinare le equazioni parametriche del piano α passante per il punto $P(p_1, p_2, p_3)$ e la cui giacitura sia generata da $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ad esempio, fissare $P(3i, 2, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 1+i, 2)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 4i)$.*

Soluzione. Un punto $Q(x, y, z)$ appartiene al piano π se e solo se risulta $\overline{OP} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbf{C}.$$

Nell'esempio numerico, si trova il piano:

$$\begin{cases} x_1 = 3i + \lambda \\ x_2 = 2 + (1+i)\lambda + \mu \\ x_3 = 2\lambda + 4i\mu \end{cases}.$$

PUNTI E SOTTOSPAZI REALI

Problema 1.9. Punto medio *Nello spazio complesso, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$. Il* punto medio *del segmento avente per estremi due punti X e Y è il punto M tale che* $\mathbf{XM} + \mathbf{YM} = \mathbf{O}$.

a) Note le coordinate $X(x_1, x_2, x_3)$ *e* $Y(y_1, y_2, y_3)$ *dei due punti nel riferimento R, determinare le coordinate del punto medio* $M(m_1, m_2, m_3)$*. In particolare, mostrare che il punto medio esiste sempre, ed è univocamente individuato.*
b) Mostrare che il punto medio dei punti coniugati $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *è il punto* $\overline{M}$*. In particolare* il punto medio di due punti reali è anche esso reale. *Inoltre* il punto medio di due punti tra loro coniugati X e $Y = \overline{X}$ è sempre reale.
c) Mostrare che il punto medio M *di due punti* X *e* Y *è reale se e solo se* $\mathbf{X\overline{X}} + \mathbf{Y\overline{Y}} = \mathbf{0}$.
d) Determinare il punto medio di $X(1, i+1, 2i)$ *e* $Y(i-1, 1, 3)$.

Soluzione. a) Le coordinate di M devono soddifare la condizione:

$$\begin{aligned}\mathbf{XM} + \mathbf{YM} &= (m_1 - x_1, m_2 - x_2, m_3 - x_3) + (m_1 - y_1, m_2 - y_2, m_3 - y_3)\\ &= (2m_1 - x_1 - x_2, 2m_2 - x_2 - y_2, 2m_3 - x_3 - y_3) = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

e sono dunque date da

$$\begin{cases} m_1 = \frac{x_1+y_1}{2} \\ m_2 = \frac{x_2+y_2}{2} \\ m_3 = \frac{x_3+y_3}{2} \end{cases}. \tag{1.10}$$

b) Segue immediatamente dalle equazioni (1.10). In particolare, il punto medio M del segmento $X\overline{X}$ ha coordinate

$$M(Re(x_1), Re(x_2), Re(x_3)).$$

c) Per definizione di punto medio si ha che: $\mathbf{XM} + \mathbf{YM} = \mathbf{0}$. Se il punto medio M di X e Y è reale, si ha che, contemporaneamente, $\mathbf{\overline{X}M} + \mathbf{\overline{Y}M} = \mathbf{0}$. Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ricava che

$$\mathbf{XM} - \mathbf{\overline{X}M} + \mathbf{YM} - \mathbf{\overline{Y}M} = \mathbf{0}$$

cioè

$$\mathbf{XM} + \mathbf{M\overline{X}} + \mathbf{YM} + \mathbf{M\overline{Y}} = \mathbf{0}$$

e dunque $\mathbf{X\overline{X}} + \mathbf{Y\overline{Y}} = \mathbf{0}$ come si voleva.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{X\overline{X}} + \mathbf{Y\overline{Y}} = \mathbf{0}$. Per definizione, il punto medio M di di X e Y è l'unico punto tale che $\mathbf{XM} + \mathbf{YM} = \mathbf{0}$. Per dedurre che M risulta reale sotto le ipotesi assunte, verifichiamo che anche $\overline{M}$ verifica la stessa equazione. Infatti

$$\begin{aligned}\mathbf{X\overline{M}} + \mathbf{Y\overline{M}} &= \mathbf{X\overline{X}} + \mathbf{X\overline{M}} + \mathbf{Y\overline{Y}} + \mathbf{Y\overline{M}}\\ &= \mathbf{\overline{XM}} + \mathbf{\overline{YM}} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

perché $\overline{M}$ è sicuramente il punto medio di $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Dunque M è reale.
d) Risulta $M(\frac{i}{2}, \frac{i}{2} + 1, \frac{3+2i}{2})$.

□

Problema 1.10. *Determina l'unica retta reale passante per il punto* $P(2, i, i+1)$.

Soluzione. Si procede come nell'Esempio 1.5.13, 1). Considero il punto coniugato $\overline{P}(2, -i, -i+1)$: la retta cercata r è la retta congiungente P e $\overline{P}$. Considero il punto medio $M(2, 0, 1)$ del segmento $P\overline{P}$. Ora calcolo i numeri direttori : $(2-2, i-(-i), (i+1-(1-i)) = (0, 2i, 2i)$; la retta cercata r è la retta per M di direzione $(0, 2, 2)$ ed ha equazioni parametriche: $x_1 = 2, x_2 = t, x_3 = 1 + t$ ed equazioni cartesiane $x_1 = 2, x_3 = 1 + x_2$.

□

Problema 1.11. *Sia π il piano definito da $(1+3i)x+(2-i)y-(5-7i)z-2=0$. Discutere se π è reale. In caso contrario, determinare l'intersezione tra π e il piano coniugato $\overline{\pi}$; se tale intersezione è una retta reale, determinarne equazioni reali*

Soluzione. Si procede come nell'esempio 1.5.13, 4). Il piano π è reale se e solo se coincide con il proprio coniugato $\overline{\pi}$, cioè se e solo se l'equazione di π è proporzionale all'equazione $(1-3i)x+(2+i)y-(5+7i)z-2=0$ di $\overline{\pi}$. Per l'Osservazione 1.5.4, poiché

$$rg\begin{pmatrix} (1+3i) & (2-i) & -(5-7i) & -2 \\ (1-3i) & (2+i) & -(5+7i) & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 2\,,$$

il piano π non è reale. Poichè anche $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = 2$ per l'Osservazione 1.5.6 l'intersezione tra π e $\overline{\pi}$ è una retta, necessariamente reale. Per determinanre equazioni reali, è sufficiente considerare le equazioni reali ottenute dall'equazione cartesiana di π, prendendone la semisomma e il prodotto di i per la semidifferenza; separando la parte reale e la parte immaginaria dei cefficienti dell'equazine di π, si ottengono le seguenti equazioni per r: $x+2\,y-5\,z-2=0$, $3\,x-y+7\,z=0$.

Problema 1.12. *Si consideri la retta di equazioni $\frac{x_1-1-2i}{2} = x_2 - i = \frac{x_3-2-2i}{2}$. Dimostrare che la retta r è reale.*

Soluzione. La retta r passa per il punto immaginario $P(1+2i, i, 2+2i)$. Poiché il vettore $P\overline{P}$ è parallelo al vettore direttore $\mathbf{v}=(2,1,2)$ di r, anche il punto coniugato $\overline{P}$ appartiene ad r, che dunque è una retta reale per la Proposizione 1.5.12.

Problema 1.13. *Si consideri la retta di equazioni $(2+i)x_1 - x_2 - ix_3 - 2 - i = 0$, $(1+i)x_1 - ix_2 - (1-i)x_3 + 1 - 3i = 0$. Dimostrare che la retta r è reale.*

Soluzione. Cerco un punto di r intersecandola con il piano $x_1=0$; in questo modo determino il punto $P(0,-2,1)$ che risulta essere un punto reale sulla retta r. Ora cerco un altro punto Q su r intersecandola con il piano $x_2=O$: ricavo in tal modo un altro punto reale $Q(1,0,2)$. Concludo che la retta r è sicuramente reale, perché contiene due punti reali tra loro distinti.

Problema 1.14. *Mostrare che una retta immaginaria r nello spazio contiene al più un punto reale.*

Soluzione. Se r è di prima specie, allora r è complanare con la sua coniugata: se, in tal caso, le due rette sono incidenti, la loro intersezione è un punto reale. Se r è di seconda specie, allora r e $\overline{r}$ sono sghembe e r è priva di punti reali.

Problema 1.15. *Nel piano, determinare i punti reali della retta r di equazione $r:(1+i)x_1+ix_2+2-i=0$.*

Soluzione. La coniugata di r ha equazione $\overline{r}:(1-i)x_1-ix_2+2+i=0$. Se le due rette coniugate sono parallele, non possono avere punti reali. Se invece risultano parallele, hanno in comune il loro unico punto reale. Poichè

$$rg \begin{pmatrix} (1+i) & i \\ (1-i) & i \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

le due rette non sono parallele ed esiste un unico punto reale P in esse. Le equazioni reali del punto P si ottengono separando le parti reale e immaginaria nella equazione di r: si ricava che $P(-2, 3)$.

RETTE DI PRIMA E SECONDA SPECIE

Problema 1.16. *Dimostrare che la retta r di equazioni*

$$r : \begin{cases} (1+i)x_1 + (1+2i)x_2 + (1-i)x_3 + 2i = 0 \\ (1+2i)x_1 + 2(1+i)x_2 - (1-2i)x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

è di prima specie e determinare una equazione reale di un piano reale α che contiene la retta r e la sua coniugata $\overline{r}$.

Soluzione. Come nell'Esempio 1.5.13, occorre controllare che sia nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenuta separando parte reale e parte immaginaria dei coefficienti delle equazioni dei due piani.

Problema 1.17. *Mostrare che la retta r di equazioni*

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 + ix_3 + 1 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 + x_3 - i = 0 \end{cases}$$

è di seconda specie e determinare equazioni cartesiane dell'unica retta s passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ e incidente sia r che $\overline{r}$.

Soluzione. Come nell'Esempio 1.5.13, occorre controllare che sia non nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ottenuta separando parte reale e parte immaginaria dei coefficienti delle equazioni dei due piani.

RETTE ISOTROPE NEL PIANO

Si consideri fissato un riferimento reale ortonormale nel piano euclideo complessificato.

Problema 1.18. *Determinare equazioni parametriche per ciascuna delle rette isotrope passanti per il punto $P(3 + i, 4 - i)$.*

Soluzione. Poichè il punto P è immaginario, il suo coniugato $\overline{P}$ è distinto da P. Ogni retta reale per P (se esiste) deve contenere anche $\overline{P}$, e dunque deve coincidere con l'unica retta per P e $\overline{P}$. Poichè tale retta è effettivamente reale (avendo vettore direttore $\mathbf{P\overline{P}}$ proporzionale ad un vettore reale e passando per il punto medio di P e $\overline{P}$, che è reale), la retta $\mathbf{x} = P + t\mathbf{P\overline{P}}$ è la retta cercata. Se ne ricavano le equazioni parametriche $x_1 = 3 + i - t, x_2 = 4 - i + t$, al variare del numero complesso t.

Problema 1.19. *Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto* $(3 + i, 4 - i)$ *e ortogonale alla retta di equazione* $2x - (3 - 2i)y + 4i = 0$.

Soluzione.

RETTE E PIANI ISOTROPI NELLO SPAZIO
Si consideri fissato un riferimento reale ortonormale nello spazio complesso.

Problema 1.20. *Mostrare che una retta è isotropa se e solo se due qualsiasi suoi punti hanno distanza tra loro nulla.*

Soluzione. Siano P, Q due punti della retta isotropa r che si sta considerando. Per definizione di isotropia, la retta r è parallela ad un vettore isotropo $\mathbf{v}$. Per concludere, basta osservare che necessariamente $\mathbf{PQ} = \lambda\mathbf{v}$ (per un opportuno $\lambda \in \mathbf{C}$) e dunque anche $\mathbf{PQ}$ è isotropo.

Problema 1.21. *Mostra che ogni piano isotropo contiene esattamente una retta reale.*

Soluzione. Sia $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ una equazione cartesiana di un piano isotropo π. Ogni retta reale contenuta in π deve anche essere contenuta nel piano coniugato $\overline{\pi}$ di π, e dunque nell'intersezione $\pi \cap \overline{\pi}$. Poiché π non è reale, tale intersezione sicuramente non coincide con π. Basta dimostrare che $\pi \cap \overline{\pi}$ è non vuota, perché in tal caso è sicuramente una retta. Per la teoria dei sistemi lineari, basta dimostrare che

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} Re(a) & Re(b) & Re(c) \\ Im(a) & Im(b) & Im(c) \end{pmatrix} = 2.$$

Se ciò non fosse, esisterebbe numero reale λ tale che

$$(Re(a), Re(b), Re(c)) = \lambda\,(Im(a), Im(b), Im(c))$$

e $a^2 + b^2 + c^2 = \left[(Re(a))^2 + (Re(b))^2 + (Re(c))^2\right]\,(1 + i\lambda)^2$ non potrebbe annullarsi, contraddicendo l'ipotesi che π sia isotropo.

Problema 1.22. *Si consideri la complessificazione dello spazio affine euclideo e, in esso, sia fissato un sistema di riferimento reale.*
a) Determinare una retta reale passante per $P(2i, 3 + i, i)$.
b) Decidere se è reale la retta r *di equazioni:*

$$\begin{cases} 2x_1 - (i - 1)x_2 + 1 = 0 \\ (-1 + i)x_1 + 2ix_2 - (i + 1)x_3 - i = 0 \end{cases}$$

c) La retta r *definita al punto precedente è complanare con la sua coniugata?*
d) Determinare le rette isotrope passanti per $Q(1, 1, 1)$ *e contenute nel piano* $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Soluzione. a) Poiché il punto $P(2i, 3+i, i)$ non è reale, esiste una unica retta reale s passante per esso, cioè la retta congiungente P con il suo coniugato $\overline{P}(-2i, 3-i, -i)$. In particolare s passa per il punto medio $M(0,3,0)$ di P e $\overline{P}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{P\overline{P}}(-4i, -2i, -2i)$ e dunque al vettore reale $(2,1,1)$. La retta s ha dunque equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3+t \\ x_3 = t \end{cases} .$$

b) La retta r è reale se e solo coincide con la sua coniugata $\overline{r}$, cioè se e solo se il fascio di piani che definisce r coincide col fascio di piani che definisce $\overline{r}$, cioè se e solo se

$$rg\begin{pmatrix} 2 & -(i-1) & 0 & 1 \\ (-1+i) & 2i & -(i+1) & -i \\ 2 & i+1 & 0 & 1 \\ (-1-i) & -2i & i-1 & i \end{pmatrix} = 2.$$

Conviene separare parte reale e parte immaginaria e controllare

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{1.11}$$

poichè tale matrice ha almeno rango 3 (le prime 3 righe sono indipendenti), segue immediatamente che r non è reale.
c) Si riprendono i conti svolti nel punto precedente. Poiché il rango della matrice in (9.22) è 4, le due rette non sono complanari.
d) Le rette isotrope cercate hanno coefficienti direttori (λ, μ, ν) tali che :

$$\begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases} ;$$

Risolvendo il sistema, si trova:

$$\begin{cases} (\mu+\nu)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2\mu^2 + 2\nu^2 + 2\mu\,\nu = 0 \\ \lambda = -\mu - \nu \end{cases} ;$$

Le soluzioni cercate hanno $\mu \neq 0$ (perché altrimenti la soluzione sarebbe nulla). Poichè il coefficiente direttore è individuato solo a meno di una costante non nulla, posso imporre $\mu = 1$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} 1 + \nu^2 + \nu = 0 \\ \lambda = -1 - \nu \end{cases} ;$$

esso ammette due soluzioni $(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$. Le rette cercate hanno equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 1 + t\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + t\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 1 + t\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases} .$$

Problema 1.23. *Si consideri lo spazio complesso con un riferimento ortonormale fissato. Sia fissata la retta r di equazioni $(2i-1)x_1+x_2-ix_3-6i+3=0$, $x_1-x_2+i-3=0$. Si consideri inoltre la retta s che passa per i punti $P(1,1,1)$ e $Q(0,0,0)$.*
a) Dopo aver controllato se la retta r è reale, dire se esiste un piano α che contiene sia r che la retta coniugata $\overline{r}$ e, in caso positivo, determinarne l'equazione cartesiana.
b) Determinare, se esistono, i piani isotropi passanti per s.

Soluzione. a) Per controllare se la retta e' reale e contemporaneamente se la retta r e la sua coniugata sono complanari, controllo il rango delle matrici completa e incompleta del sistema lineare dato dalle equazioni di r e dalle loro coniugate. Equivalentemente, studio il sistema dato dalla parte reale e immaginaria delle due equazioni di r:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima e la terza riga della matrice completa sono proporzionali. Si deduce facilmente che la matrice dei coefficienti ha rango due, mentre la matrice completa ha rango 3: le rette r e $\overline{r}$ sono dunque parallele e distinte, e r è di seconda specie. L'equazione cartesiana di un piano α che contiene r e $\overline{r}$ si ottiene imponendo il passaggio per un punto P di $\overline{r}$ al piano generico del fascio di asse r:

$$\begin{aligned} &\lambda[(2i-1)x_1+x_2-ix_3-6i+3]+\mu[x_1-x_2+i-3]= \\ &=[\lambda(2i-1)+\mu]x_1+[\lambda-\mu]x_2-\lambda ix_3+[\mu-\lambda 6]i+3[\lambda-\mu]=0. \end{aligned}$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(0,-i-3,-5)(\in \overline{r})$, si ricava la relazione:

$$\begin{aligned} &[\lambda-\mu](-i-3)+\lambda i5+[\mu-\lambda 6]i+3[\lambda-\mu]= \\ &=(-i-3+5i-6i+3)\lambda+(i+3+i-3)\mu=-2i\,\lambda+2i\,\mu=0. \end{aligned}$$

Imponendo $\lambda=1=\mu$ nell'equazione del piano generico per s, si trova l'equazione cartesiana di α:

$$2ix_1-ix_3-5i=0.$$

b) La retta s è reale. Sappiamo dunque, a priori, che ci sono due piani isotropi che passano per essa. Considerare l'equazione del piano generico passante per s: $\mu x_1+(-\mu-1)x_2+zx_30$ e imponiamo la condizione di isotropia:

$$0=\mu^2+\mu+1=(\mu-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(\mu-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$$

Sostituendo i valori ottenuti del parametro μ, si ricavano le equazioni dei due piani:

$$(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})x_1+(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2})x_2+x_3=0; \qquad (\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})x_1+(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2})x_2+x_3=0;$$

Alternativamente, detta $ax_1+bx_2+cx_3+d=0$ l'equazione cartesiana di un piano isotropo passante per s, si deve avere $d=0$ perché s contiene l'origine e i coefficienti devono sicuramente soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \text{(condizione di parallelismo con } s\text{)} \\ a^2+b^2+c^2=0 & \text{(condizione di isotropia)} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ritrovano i piani indicati.

Problema 1.24. *Si consideri lo spazio complesso con un riferimento ortonormale fissato. Sia fissata la retta r di equazioni $x_1 - 2ix_2 - 1 = 0, ix_1 - 2x_3 + 2 - i = 0$.*
a) Determinare un piano reale α contenente la retta r e discutere se tale piano è unico. La retta r è reale?
b) Determinare, se esistono, i piani isotropi passanti per r.

Soluzione.

Esercizi

Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$.

1.1. Mostrare che il punto medio M di due punti X_1 e X_2 è reale se e solo se $\mathbf{X_1\overline{X}_1 + X_2\overline{X}_2 = 0}$.

1.2. Mostrare che, nel piano complessificato, le coppie di punti $X_1(x_1, y_2)$ e $X_2(x_1, y_2)$ tali che il punto medio del segmento X_1X_2 sia reale sono caratterizzate dalla condizione:

$$(Im\, x_1, Im\, y_1) = -(Im\, x_2, Im\, y_2)$$

In particolare, tali coppie sono infinite.

1.3. Controllare se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, 5i, -2+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(3+4i, 1+3i, -5+5i)$.

1.4. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per $P(2, 0, 1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(1-i, 1+2i, 2-3i)$. Qual è l'intersezione tra r e l'immagine $\overline{r}$ di r rispetto al coniugio?

1.5. Determinare un vettore parallelo alla retta s di equazioni: $(2-i)\, x_1 - i\, x_2 + 3x_3 = 0$, $2x_1 - 2ix_3 + i = 0$.

1.6. Determinare equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale r passante per il punto $P(2-i, 1+i, 2i)$.

1.7. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 - 3ix_2 - 11 = 0, 2ix_2 + x_3 - 4 + 4i = 0.$$

a) Determinare un vettore direttore della retta r.
b) Discutere la posizione relativa della retta r e della sua coniugata $\overline{r}$, cioè determinare se la retta r è complanare o sghemba a $\overline{r}$.

1.8. Discutere se il piano π di equazione cartesiana $2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2i = 0$ ha punti reali.

1.9. Sia π il piano di equazione cartesiana $(2+i)x_1 - i\, x_2 + 2\, x_3 + 1 = 0$.
a) Determinare una base della giacitura e equazioni parametriche per π.
b) Determinare una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo, in particolare, se il piano π è reale.

1.10. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + x_2 - 1 - 2i = 0, 2x_1 - x_3 + 2 = 0.$$

a) Discutere la posizione relativa di r e della sua coniugata.
b) Discutere se r ha punti reali.

1.11. a) Determinare una equazione cartesiana reale per la retta reale passante per il punto $P(2i + 1, 1 - i)$.
b)Determinare il fascio di rette per $P(2i + 1, 1 - i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

1.12. Determinare il fascio di rette parallele al vettore $(1-i, 3i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

1.13. Determinare il vettore parallelo alla coniugata della retta r di equazione $2ix + (1 - i)y + 5 - 3i = 0$. Discutere inoltre se r è reale e quale sia l'intersezione tra r e la sua coniugata.

1.14. Costruire un esempio di retta che non interseca la propria coniugata.

1.15. Determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2, -3)$. E' possibile determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2 + 2i, i + 1)$?

1.16. Nello spazio euclideo complessificato sia fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$. Siano fissati inoltre il punto $P(1 + i, 2 + i, 3)$ e i piani α e β di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i - 1)x_1 - ix_2 + 3x_3 - i + 1 = 0, \quad \beta : i\,x_1 - ix_3 + 1 = 0.$$

a) Determinare equazioni cartesiane reali di una retta reale s passante per P, se essa esiste.
b) Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.
c) Determinare l'equazione del fascio di piani paralleli a α.
d) Discutere se il piano α è reale e determinare un vettore parallelo sia ad α che ad $\overline{\alpha}$.
e) Discutere se la giacitura di β è reale. Qual'è l'intersezione tra β e il coniugato $\overline{\beta}$?

1.17. Sia r la retta di equazioni parametriche $x_1 = 2+3i\,t, x_2 = -1-(1-i)\,t, x_3 = 1$.
a) Discutere se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.
b) Discutere l'esistenza di un piano reale contenente r.

1.18. Siano α (risp. β) i piani di equazione cartesiana $ix_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ (risp. $x_1 + x_2 + ix_3 + 1 = 0$).
a) Usando i minori, determinare un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.
b) Determinare la posizione relativa tra r e la coniugata $\overline{r}$.

1.19. Mostrare che la retta r del piano di equazione $ix_1 + ix_2 - 2 = 0$ non ha punti reali.

1.20. Mostra che la retta r di equazioni $x_1 + ix_2 + x_3 + i = 0, x_1 - ix_2 - x_3 - i = 0$ è di prima specie.

1.21. Determinare l'equazione cartesiana del piano α passante per il punto $P(i, 1, 2)$ e parallelo alle rette r e s di equazioni cartesiane, rispettivamente, $r : x_1 = i, 2x_2 - x_3 = 0$, $s : x_3 = 2ix_2, x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$.

1.22.
Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio euclideo reale complessificato, si considerino i piani β di equazione $ix_1 + (3i + 7)x_2 + (-1 - i)x_3 + 2 = 0$ e α di equazione $x_2 = 3$. Verificare se è reale la retta r ottenuta intersecando α e β.

1.23. Si consideri fissato un sistema di riferimento nello spazio affine reale complessificato.

i) Determinare se la retta r di equazioni: $ix_1 - i + 1 = \frac{x_2 - 2i}{2} = 3x_3 - 6 + 6i$ è reale.
ii) Determinare le rette isotrope passanti per $P(1, 0, 0)$ e contenute nel piano α di equazione $3x_1 - x_2 + 7x_3 = 3$.

1.24. Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio euclideo reale complessificato, si considerino i piani α di equazione $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2$ e β di equazione $(i - 1)x_1 + (7i - 1)x_2 + (-1 + i)x_3 + 5 - 5i = 0$. a) Verificare se è reale la retta r ottenuta intersecando α e β.
b) Determinare le rette isotrope contenute nel piano β.

1.25. Nello spazio affine reale complessificato sia fissato un riferimento reale ortonormale. Sia r la retta ottenuta intersecando i piani α e β di equazioni:

$$\alpha : -i\,x_1 - x_2 + (2 - 3i)\,x_3 + 2i + 1 = 0, \;\; \beta : (1 + i)\,x_1 + (1 + 2i)x_2 + (1 - i)\,x_3 + 2i = 0.$$

a) Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano reale π che contiene r e discutere se r ha punti reali.
b) Determinare le rette isotrope contenute nel piano α e passanti per il punto $P(0, 2i + 1, 0)$, se esistono.

1.26. Nello spazio affine reale complessificato sia fissato un riferimento reale ortonormale. Sia r la retta di equazioni $(2 - 4i)\,x_1 + (6 + 3i)\,x_2 - 6i\,x_3 + 6 - 3i = 0$, $5\,x_1 - 3i\,x_3 - 6 = 0$ e sia fissato il punto $P(0, 0, 0)$.
a) Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano reale α che contiene r e discutere se r ha punti reali.
b) Determinare l'equazione cartesiana dei piani isotropi passanti per r, se esistono.

1.27. Nello spazio complesso sia fissato un riferimento ortonormale fissato. Sia r la retta di equazioni $2i\,x_1 + 2x_3 - 2 - 4i = 0, -3x_2 + 6i\,x_3 - 6i = 0$.
a) Determinare, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano α che contiene sia r che la retta coniugata $\overline{r}$ e discutere se la retta r è reale.
b) Determinare l'equazione cartesiana dei piani isotropi passanti per r, se esistono.
c) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio complesso U dei vettori ortogonali alla retta r. Determinare inoltre la dimensione dell'intersezione $U \cap U^\perp$, ove con $U^\perp$ si denoti lo spazio vettoriale dei vettori ortogonali a U.

1.28. Si consideri r la retta di equazioni cartesiane $ix-(5+6i)\,y+z+4=0$, $(5+5i)\,y-(1+i)\,z=-1-i$. Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per r, se tale piano esiste.

1.29. Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i,-1)$.
a) Determinare la distanza tra $P(2-i,3)$ e Q.
b) Si detemini l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.
c) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?
d) Due rette si dicono ortogonali se hanno vettori direttori ortogonali. Determinare equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x-(2+7i)y+5=0$.

1.30. Determinare i vettori isotropi parallele al piano π di equazione $3x_1-x_2=0$.

1.31. Determinare le rette isotrope per $P(0,-5i,0)$ e contenute nel piano π di equazione cartesiana $2ix_1+2x_3=0$.

1.32. Determinare i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni

$$\frac{x_1-3}{2i}=\frac{x_2-(3+2i)}{-1}=\frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}.$$

Determinare inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

1.33. Determinare i piani isotropi per la retta r passante per $A(1,-12i,5)$ e parallela al vettore di componenti $(2,0,7i)$.