Complementi

Più che complementi, i paragrafi successivi sono lo studio diretto degli spazi proiettivi in dimensione bassa, che può essere affrontato anche indipendentemente dal capitolo precedente.

5.8 La retta proiettiva

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Su $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1)\mathcal{P}(Y_0, Y_1) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{esiste } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } (X_0, X_1) = \lambda(Y_0, Y_1), \\ \text{cioè } X_0 = \lambda Y_0 \text{ e } X_1 = \lambda Y_1 \end{array}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$4cm]$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^1$ e si dice *retta proiettiva numerica* (o, più semplicemente, *retta proiettiva*) e i suoi elementi sono detti *punti* della retta proiettiva. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1] = \{(\lambda X_0, \lambda X_1) | \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la coppia (X_0, X_1) (e ogni coppia ad essa equivalente) costituisce la coppia delle *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1]$. *Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una coppia ordinata mai nulla, che è determinata dal punto della reta proiettiva solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.*

Esempio 5.8.1. $[3, 2] = [15, 10] = [-3, -2] = [3/7, 2/7] = [3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$; $[24, 7] \neq [2, 5]$.

Osservazione 5.8.2. Due punti $[X_0, X_1]$ e $[Y_0, Y_1]$ della retta proiettiva numerica coincidono se e solo se $\det \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{pmatrix} = 0$.

Esempio 5.8.3. **Coordinate omogenee e completamento proiettivo di una retta** In una retta r sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v})\}$; sia $\mathbb{P}(r)$ il completamento proiettivo definito nell'esempio 5.1.1. Ad ogni punto proprio Q corrisponde una coordinata q. Possiamo dunque definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r) = r \cup \{r_\infty\} &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ r \ni Q(q) &\mapsto [1, q] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1] \end{aligned} \tag{5.49}$$

Osserviamo che $[1, q] = [X_0, X_1]$ se e solo se $X_0 \neq 0$ e $q = X_1/X_0$, mentre $[0, 1] = [0, \lambda]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. L'applicazione definita in (5.49) è una biezione e diciamo che essa (o, più precisamente, la sua inversa) assegna un *sistema di coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ sulla retta proiettiva. Per indicare che al punto Q sono associate le coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ scriviamo

$$Q[X_0, X_1].$$

Per distinguere, chiamiamo "affine" la coordinata usuale.

Osserviamo che, se Q ha coordinata affine q, le corrispondenti coordinate omogenee sono $[1, q]$: se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $q \neq 0$, si ha che $[1, q] = [1/q, 1]$. Se t è un parametro reale,

$$\lim_{q \to \pm\infty} (1/q, 1) = (0, 1),$$

che sono coordinate omogenee di r_∞. Un ragionamento analogo permette di studiare il completamento proiettivo di una retta complessa.

Il dato di un riferimento su r definisce quindi un sistema di coordinate omogenee nel completamento proiettivo $\mathbb{P}(r)$: in particolare, tale corrispondenza assegna un ruolo speciale al punto $[0, 1]$, che viene caratterizzato come punto improprio in questa corrispondenza, ma è un punto come tutti gli altri in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Si osservi che l'applicazione definita in (5.49) dipende dalla scelta del riferimento in r: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[1, 0]$, mentre l'immagine del punto $U = O + \mathbf{v}$ è $[1, 1]$ (detto *punto unità*). In un altro riferimento, si avrà $Q(aq + b) \mapsto [1, aq + b]$, corrispondente a $P \mapsto [X_0', X_1'] = [X_0, aX_0 + bX_1]$. La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X_0' = X_0 \\ \rho X_1' = aX_0 + bX_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0.$$

In particolare, *qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su r, il punto improprio di r viene associato al punto* $[0, 1]$ *di* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

La nozione di cambio di riferimento in una retta proiettiva è più generale dei cambi indotti dai cambi affini e non assegna ruolo speciale a nessun punto:

Definizione 5.8.4. Un *cambiamento di sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su una retta proiettiva) è una trasformazione della forma $[X_0, X_1] \mapsto [X_0', X_1']$ ove

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho X_1' = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.50}$$

Osservazione 5.8.5. Il cambio di coordinate individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla. Un cambio di coordinate viene chiamato anche *cambio di riferimento (proiettivo).*

Osservazione 5.8.6. Osserviamo che tali cambiamenti non provengono in generale dai cambiamenti di riferimento cartesiani: infatti, il cambiamento descritto in (5.50) trasforma $[0, 1]$ in $[m_{01}, m_{11}]$; si osservi che $[0, 1] = [m_{01}, m_{11}]$ se e solo se $m_{01} = 0$. Considerando dunque la nozione più generale di cambio di coordinate, non si hanno punti dal ruolo speciale in modo intrinseco: è solo la scelta del sistema di coordinate che assegna uno speciale ruolo ad alcuni punti.

Il termine "riferimento" che entra nel nome del seguente teorema verrà giustificato nella definizione 5.8.9:

Teorema 5.8.7. Teorema fondamentale dei riferimenti *Fissati tre punti distinti A,B, C su una retta proiettiva, esiste uno ed un solo sistema di coordinate omogenee sulla retta tale che*

$$A[1, 0], B[0, 1], C[1, 1].$$

Dimostrazione. Fisso un sistema di coordinate omogenee qualunque $[X_0, X_1]$ sulla retta. In tale sistema si avrà:

$$A[a_0, a_1], B[b_0, b_1], C[c_0, c_1]$$

Se il sistema di coordinate proiettive cercato esiste, si otterrà con un cambio di coordinate della forma

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho X_1' = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.51}$$

È conveniente considerare il cambio di coordinate inverso, che avrà la forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = n_{00}X_0' + n_{01}X_1' \\ \rho X_1 = n_{10}X_0' + n_{11}X_1' \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.52}$$

Il cambio di coordinate inverso (se il sistema di coordinate proiettive cercato esiste) deve trasformare $[1, 0]$ in $[a_0, a_1]$: dunque la prima colonna della matrice del cambio inverso deve essere un multiplo delle coordinate di A:

$$\begin{cases} n_{00} = \lambda a_0 \\ n_{10} = \lambda a_1 \end{cases} \exists \lambda \neq 0$$

Imponendo anche che l'immagine di $[0, 1]$ sia multiplo delle coordinate omogenee di B, si ricava che la matrice del cambio inverso è della forma

$$\begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \mu b_0 \\ \lambda a_1 & \mu b_1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \neq 0$$

Imponiamo ora che l'immagine di $[1, 1]$ sia un multiplo delle coordinate omogenee di C nel sistema originario troviamo la relazione

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = \rho c_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = \rho c_1 \end{cases} \tag{5.53}$$

tra le costanti non nulle ρ, λ, μ. Tale relazione si traduce in un sistema omogeneo nelle indeterminate ρ, λ, μ:

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 - \rho c_0 = 0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 - \rho c_1 = 0 \end{cases}. \tag{5.54}$$

Il sistema di coordinate cercato esiste se e solo il sistema (5.54) ammette una soluzione $(\lambda_0, \mu_0, \rho_0,)$ con $\lambda_0 \neq 0$, $\mu_0 \neq 0$, $\rho_0 \neq 0$. La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & -c_0 \\ a_1 & b_1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e dunque le soluzioni dipendono da un parametro libero. Tutte le soluzioni si ottengono dunque come multipli scalari della soluzione

$$(\lambda_0, \mu_0, \rho_0) = (det \begin{pmatrix} b_0 & -c_0 \\ b_1 & -c_1 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} a_0 & -c_0 \\ a_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}) \tag{5.55}$$

che ha tutte e tre le componenti non nulle, perchè i tre punti A, B, C sono distinti. Allora

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 a_1 & \mu_0 b_1 \\ \lambda_0 a_2 & \mu_0 b_2 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

è la matrice che definisce il cambiamento inverso. Abbiamo dunque mostrato che il sistema di coordinate omogenee cercato esiste: inoltre esso è unico, perché ogni altra soluzione del sistema (5.54) è multipla di $(\lambda_0, \mu_0, \rho_0)$ per una costante non nulla, e produce una matrice che è multipla di (5.56) per una costante non nulla. □

Definizione 5.8.8. Se in un sistema di coordinate omogenee su una retta proiettiva, tre punti A, B, C hanno coordinate $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$, diciamo che A è il *punto improprio* o *punto all'infinito* del sistema di coordinate, il punto B è detto *origine* mentre C è detto *punto unità* del sistema di coordinate. I punti A, B, C vengono detti *punti fondamentali* del sistema di coordinate omogenee.

Definizione 5.8.9. Una terna ordinata (A, B, C) di punti distinti di una retta proiettiva è un *riferimento proiettivo*, associando a tale terna il sistema di coordinate omogenee nel quale i punti sono, rispettivamente, il punto improprio, l'origine e il punto unità.

Esempio 5.8.10. Supponiamo che in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ siano assegnati i punti $A[2,3]$, $B[4,-1]$, $C[1,-5]$ e cerchiamo il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ tale che nel nuovo sistema le coordinate omogenee di A, B e C siano, rispettivamente, $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. Il cambiamento inverso è della forma

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 4\mu \\ 3\lambda & -\mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \neq 0$$

e devono essere soddifatte le relazioni

$$\begin{cases} 2\lambda + 4\mu = -\rho \\ 3\lambda - \mu = 5\rho \end{cases} \tag{5.57}$$

In base alla teoria generale dei sistemi lineari, sicuramente una soluzione si può trovare prendendo i minori con segni alterni della matrice dei coefficienti, come nell'equazione (5.55):

$$\lambda = det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = -19, \mu = -det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 13, \rho = det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -14.$$

Si ricava che una matrice per il cambio inverso è:

$$\begin{pmatrix} -38 & 52 \\ -57 & -13 \end{pmatrix}$$

e dunque il cambio di riferimento cercato è dato da:

$$\begin{cases} \kappa X'_0 = -13X_0 - 52X_1 \\ \kappa X'_1 = 57X_0 - 38X_1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.58}$$

Osservazione 5.8.11. **Rette proiettive e rette affini** Fissati tre punti distinti A, B, C in una retta proiettiva r, risulta fissato il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ nel quale A, B, C sono i punti fondamentali. Questo dato permette di identificare $r \setminus \{A\}$ con una retta affine nel quale risulta fissato un sistema di riferimento di coordinata x, e in modo tale che r risulti il completamento proiettivo della retta affine. Basta infatti considerare la biezione:

$$\begin{aligned} r \setminus \{A\} &\to \mathbb{K} \\ Q[X_0, X_1] &\mapsto x = X_1/X_0 \end{aligned} \tag{5.59}$$

primo punto è detto Come nel capitolo precedente, la legge di un cambio di riferimento può essere interpretata anche come trasformazione tra due rette proiettive. Nel seguito denotiamo con r e r' due rette proiettive.

Definizione 5.8.12. Proiettività Su due rette proiettive r e r' siano assegnati sistemi di coordinate proiettive $[X_0, X_1]$ e $[X_0', X_1']$ rispettivamente. Una *proiettività* tra le due rette proiettive r e r' è una trasformazione $\omega : r \to r'$, $\omega([X_0, X_1]) = [X_0', X_1']$, ove

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00} X_0 + m_{01} X_1 \\ \rho X_1' = m_{10} X_0 + m_{11} X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.60}$$

Osservazione 5.8.13. Analogamente all'osservazione 5.10.2, la proiettività individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla. La richiesta che M abbia determinante non nullo è necessaria, altrimenti esisterebbe almeno un punto la cui immagine non sarebbe definita.

Osservazione 5.8.14. Ogni proiettività tra due rette proiettive è una applicazione biunivoca. La composizione di proiettività tra rette proiettive è ancora una proiettività. In particolare, le proiettività di una retta in sè formano un gruppo, detto *gruppo proiettivo della retta*.

Il teorema 5.8.7 ha come diretta conseguenza il seguente:

Teorema 5.8.15. Teorema fondamentale delle proiettività per la retta proiettiva *Siano r ed r' due rette proiettive e siano fissati tre punti distinti A, B, C di r e tre punti distinti A', B', C' di r'. Esiste una ed una sola proiettività $\omega : r \to r'$ tale che $\omega(A) = (A')$, $\omega(B) = (B')$, $\omega(C) = (C')$.*

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale dei riferimenti 5.8.7 è possibile scegliere un sistema di coordinate proiettive $[X_0, X_1]$ su r ed un sistema $[X_0', X_1']$ in r' tali che $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$ e $A'[1,0]$, $B'[0,1]$, $C'[1,1]$. La proiettività

$$\begin{cases} \rho X_0' = X_0 \\ \rho X_1' = X_1 \end{cases}$$

soddisfa le richieste ed è l'unica con tale proprietà. □

Esempio 5.8.16. Riprendiamo le notazioni dell'esempio 5.8.10. Siano inoltre assegnati tre punti distinti $A'[2,1]$, $B'[-3,1]$, $C'[1,2]$ in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e cerchiamo di determinare la legge della proiettività $\omega\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ tale che $\omega(A) = (A')$, $\omega(B) = B'$, $\omega(C) = C'$. Osserviamo che, nello svolgimento dell'esempio 5.8.10 abbiamo determinato la legge di una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tale che $\varphi(A) = [1, 0]$, Infatti, basta considerare le equazioni (5.58) e definire $\varphi[X_0, X_1] = [-13X_0 - 52X_1, 57X_0 - 38X_1]$. Chiamiamo per semplicità $[Y_0, Y_1]$ le coordinate di $\varphi[X_0, X_1]$. Determiniamo ora $\psi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, $\psi[Y_0, Y_1] = [X'_0, X'_1]$ tale che $\psi[1, 0] = A'$, $\psi[0, 1] = B'$, $\psi[1, 1] = C'$. La composizione $\omega = \psi \circ \psi$ fornirà la proiettività cercata. Risulta che ψ è descritta da

$$\begin{cases} \kappa X'_0 = 14Y_0 - 9Y_1 \\ \kappa X'_1 = 7Y_0 + 3Y_1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

La composizione è dunque definita da:

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 & -52 \\ 57 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.61}$$

Il teorema fondamentale delle proiettività assicura che una proiettività tra rette è univocamente individuata quando si fissa l'immagine di un riferimento del dominio. Come conseguenza, se si fissa arbitrariamente l'immagine di 4 punti distinti, non necessariamente esiste una proiettività che soddisfi le richieste. Questa osservazione motiva la seguente:

Definizione 5.8.17. Sia A, B, C, D (risp., A', B', C', D') una quaterna ordinata di punti distinti di una retta proiettiva r (risp., r'). Le due quaterne di punti si dicono *quaterne proiettive* se esiste una proiettività $\omega : r \to r'$ tale che:

$$\omega(A) = A', \omega(B) = B', \omega(C) = C', \omega(D) = D'.$$

Lo strumento privilegiato per caratterizzare le quaterne proiettive è il birapporto:

Definizione 5.8.18. Sia r una retta proiettiva e ne siano A, B, C punti distinti, sicché esiste un unico riferimento φ tale che A, B ed C abbiano coordinate omogenee $[1, 0], [0, 1]$ e $[1, 1]$ in φ. Se D è un punto di r, le coordinate omogenee di D in φ si dicono *birapporto della quaterna* (A, B, C, D) e si denotano col simbolo

$$(A\,B\,C\,D).$$

Osservazione 5.8.19. Supponiamo che r sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e che A, B, C ed D abbiano coordinate omogenee $[a_0, a_1]$, $[b_0, b_1]$, $[c_0, c_1]$ e $[d_0, d_1]$ rispettivamente. Calcoliamo il birapporto $(A\,B\,C\,D)$. Consideriamo a tale scopo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ [X_0, X_1] &\mapsto [(c_0a_1 - c_1a_0)(X_0b_1 - X_1b_0), (c_0b_1 - c_1b_0)(X_0a_1 - X_1a_0)]. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Si verifica facilmente che ψ è una proiettività e che

$$\psi([a_0, a_1]) = [1, 0], \psi([b_0, b_1]) = [0, 1], \psi([c_0, c_1]) = [1, 1] \tag{5.63}$$

sicché ψ^{-1} è proprio il riferimento φ in cui $[a_0, a_1]$, $[b_0, b_1]$, $[c_0, c_1]$ hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$. Quindi

$$\begin{aligned} (A\,B\,C\,D) &= \psi([d_0, d_1]) = \\ &= [(c_0a_1 - c_1a_0)(d_0b_1 - d_1b_0), (c_0b_1 - c_1b_0)(d_0a_1 - d_1a_0)] = \\ &= [det \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix}]. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Ad esempio, se in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si considerano i punti $A[2,3]$, $B[4,-1]$, $C[-1,5]$ come nell'esempio 5.8.10, e il punto $D[1,3]$, il birapporto $(A\,B\,C\,D)$ è dato da:

$$\begin{aligned}(A\,B\,C\,D) &= [det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\, det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\, det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}] \\ &= [13^2, 19 \cdot 3] = [169, 57].\end{aligned}$$

Controlliamo il risultato sostituendo le coordinate di $D[1,3]$ nelle equazioni (5.58) del cambio di riferimento per ricavare il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ nel quale A, B, C siano i punti fondamentali:

$$\begin{cases} -169 = -13 - 52 \cdot 3 \\ -57 = 57 - 38 \cdot 3 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.65}$$

Poiché $[-169, -57] = [169, 57]$ abbiamo trovato lo stesso risultato.

L'osservazione 5.8.19 permette facilmente di ricavare il seguente risultato:

Lemma 5.8.20. *Siano A, B, C, D quattro punti distinti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (o di una retta proiettiva). Allora:*

$$(A\,B\,C\,D) = (A\,B\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A).$$

Inoltre, posto $(A\,B\,C\,D) = [\lambda, \mu]$ si ha $(B\,A\,C\,D) = [\mu, \lambda]$: se la terna dei punti fondamentali è (A, B, C), la coordinata affine in $r \setminus \{A\}$ definita in (5.59) è $x = \lambda/\mu$. Se invece la terna è (B, A, C), la corrispondente coordinata affine in $r \setminus \{B\}$ è l'inverso $1/x = \mu/\lambda$.

Il seguente teorema mette in evidenza una importante proprietà del birapporto:

Teorema 5.8.21. *Siano r e r' due rette proiettive e siano A, B, C, D e A', B', C', D' due quaterne di punti di r e r' rispettivamente. Esiste una proiettività $\varphi : r \to r'$ tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$ (o, come si dice, le due quaterne A, B, C, D e A', B', C', D' sono* proiettive *o* proiettivamente equivalenti*) se e solo se si ha l'uguaglianza dei birapporti*

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D').$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$. Sia, analogamente, $\psi' : r' \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tale che $\psi'(A') = [1,0]$, $\psi'(B') = [0,1]$, $\psi'(C') = [1,1]$. Per definizione di birapporto, risulta

$$(A'\,B'\,C'\,D') = \psi'(D').$$

D'altra parte, la composizione $\psi = \psi' \circ \varphi : r \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ è una proiettività tale che $\psi(A) = \psi'(A') = [1,0]$, $\psi(B) = \psi'(B') = [0,1]$, $\psi(C) = \psi'(C') = [1,1]$. Quindi $(A\,B\,C\,D) = \psi(D) = \psi'(D') = (A'\,B'\,C'\,D')$.

Viceversa, sia $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$. Sia $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to r$ il riferimento in cui A, B ed C hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. Similmente sia $\psi' : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to r'$ il riferimento in cui A', B' ed C' hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. L'ipotesi $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$ comporta che D e D' hanno in ψ e ψ' rispettivamente le stesse coordinate omogenee $[d_0, d_1]$. Sia allora

$\varphi : r \to r'$ la proiettività la cui matrice nei riferimenti ψ e ψ' è la matrice identica. Tale proiettività manda un punto di r avente coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ in ψ nel punto di r' di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ in ψ'. Ma allora φ manda ordinatamente A, B, C e D in A', B', C' e D', perché questi punti hanno in ψ e ψ' le stesse coordinate $[1, 0], [0, 1], [1, 1]$ e $[d_0, d_1]$. □

5.9 Il piano proiettivo

Su $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1, X_2)\mathcal{P}(Y_0, Y_1, Y_2) \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } (X_0, X_1, X_2) = \rho(Y_0, Y_1, Y_2),$$
$$\text{cioè } X_0 = \rho Y_0 \text{ e } X_1 = \rho Y_1 \text{ e } X_2 = \rho Y_2$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^2$ e si dice *piano proiettivo numerico* (o, più semplicemente, *piano proiettivo*) e i suoi elementi sono detti *punti* del piano proiettivo. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1, X_2) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1, X_2] = \{(\rho X_0, \rho X_1, \rho X_2) | \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la terna (X_0, X_1, X_2) (e ogni terna ad essa equivalente) costituisce le *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1, X_2]$. Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una terna ordinata mai nulla, che è determinata solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.

Definizione 5.9.1. Un *cambiamento di sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su una piano proiettivo) è una trasformazione della forma $[X_0, X_1, X_2] \mapsto [X'_0, X'_1, X'_2]$ ove

$$\begin{cases} \rho X'_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 + m_{02}X_2 \\ \rho X'_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 \\ \rho X'_2 = m_{21}X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \neq 0;$$

in forma matriciale la relazione si scrive come:

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

La descrizione dei sottospazi del piano proiettivo è più articolata rispetto a quella della retta.

Definizione 5.9.2. Una *retta (proiettiva)* del piano proiettivo è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ soddisfano una equazione lineare omogenea della forma:

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \tag{5.66}$$

L'equazione è individuata dalla retta solo a meno di multiplo per una costante non nulla ed è detta *equazione omogenea della retta*.

La definizione di retta è invariante per cambi di coordinate omogenee. Bisogna ricordare che la soluzione $(0, 0, 0)$ non corrisponde a nessun punto del piano proiettivo.

Per denotare una retta proiettiva, useremo spesso i simboli r e s utilizzati anche per le rette affini.

Osservazione 5.9.3. **Equazioni parametriche di una retta** Consideriamo l'equazione omogenea di una retta proiettiva r

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

L'insieme delle soluzioni forma un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di K^3: siano $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$ e $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2)$ una base di tale sottospazio. I punti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ sono punti distinti di r e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}] \text{ con } (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

I punti della retta sono dunque della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \tag{5.67}$$

Definizione 5.9.4. Equazioni della forma (5.67) sono dette *equazioni parametriche della retta proiettiva.*

Osservazione 5.9.5. Nelle notazioni precedenti, l'applicazione

$$\begin{aligned} r &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ [\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}] &\mapsto [\lambda, \mu] \end{aligned} \tag{5.68}$$

fornisce un sistema di coordinate omogenee su r, identificando la retta proiettiva r con una retta proiettiva numerica.

L'equazione parametrica dipende di una retta r non è unica, ma dipende dalla scelta dei due punti distinti P, $Q \in r$.

Osservazione 5.9.6. **Condizioni di allineamento di tre punti** Siano fissati due punti distinti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. L'insieme dei punti di coordinate omogenee $[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$ forma una retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ (di equazioni parametriche (5.67)). *Per due punti distinti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ passa una ed una sola retta, la cui equazione omogenea è data da*

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} X_0 - det \begin{pmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{pmatrix} X_1 + det \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} X_2 = 0.$$

In particolare, tre punti $T[t_0, t_1, t_2]$, $P[p_0, p_1, p_2]$, $Q[q_0, q_1, q_2]$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

Osservazione 5.9.7. **Intersezione di due rette del piano** *Due rette distinte r e s di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si intersecano sempre in uno ed un solo punto.* Infatti, siano $aX_0+bX_1+cX_2=0$ e $a'X_0+b'X_1+c'X_2=0$ le equazioni omogenee delle due rette; i punti dell'intersezione hanno coordinate che soddisfano il sistema omogeneo

$$\begin{cases} aX_0+bX_1+cX_2=0 \\ a'X_0+b'X_1+c'X_2=0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2; per il teorema di Rouché-Capelli, le soluzioni del sistema formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. La soluzione nulla non corrisponde ad un punto del piano proiettivo, mentre tutte le altre corrispondono ad uno stesso punto del piano proiettivo.

Osserviamo che le coordinate omogenee del punto di intersezione si ricavano facilmente dai coefficienti delle equazioni delle rette, utilizzando la teoria dei sistemi lineari:

$$X_0 = det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}; \quad X_1 = -det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}; \quad X_2 = det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

o risolvendo in modo diretto il sistema.

Esempio 5.9.8. **Completamento proiettivo di un piano affine** Sia assegnato un piano π nello spazio euclideo (o in quello complesso se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Per ogni retta $r\subset\pi$ si denoti con r_∞ la giacitura della retta r: se r e s sono due rette del piano, risulterà $r_\infty = s_\infty$ se e solo se r e s sono parallele. Data una retta r, il punto r_∞ può essere interpretato come il punto improprio del completamento r^-.

Si definisca l'insieme

$$\pi_\infty = \{r_\infty | r \text{ retta in } \pi\} = \{\text{giaciture delle rette di } \pi\}.$$

L'insieme

$$\pi^- = \pi \cup \pi_\infty$$

è detto *completamento proiettivo del piano affine* π. L'insieme π_∞ è l'insieme dei punti impropri delle rette di π e i suoi elementi vengono detti i *punti impropri* (o punti all'infinito) di π^-. Per distinguerli, i punti di π vengono detti *punti propri*.

La scelta di un sistema di coordinate (x,y) in π definisce la biezione:

$$\begin{aligned} \pi^- &\to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \\ \pi \ni Q(x,y) &\mapsto [1,x,y] \\ r_\infty &\mapsto [0,l,m] \text{ ove } (l,m) \text{ sono le componenti, nel riferimento di } \pi, \\ & \text{ di un vettore direttore di } r \end{aligned} \tag{5.69}$$

che viene detto *sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo del piano* π. Osserviamo che l'immagine dei punti impropri è costituita da tutti i punti $[X_0,X_1,X_2]$ del piano proiettivo numerico tali che $X_0=0$. Infatti, se $X_0\neq 0$, il punto $[X_0,X_1,X_2]$ è immagine del punto proprio $Q(X_1/X_0, X_2/X_0)$ di π. La relazione tra le coordinate affini e quelle omogenee è dunque data da:

$$x = X_1/X_0, y = X_2/X_0. \tag{5.70}$$

Proviamo ad applicare ai punti di una retta affine la trasformazione definita in (5.69); consideriamo la retta affine r passate per un punto $P(p_x,p_y)$ e di vettore direttore

$\mathbf{v}$ di componenti (l, m) nel riferimento fissato: ogni punto di tale retta ha coordinate affini della forma $Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m)$ e coordinate omogenee

$$Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m) \mapsto [1, p_x + t\,l, p_y + t\,m]$$

Per $t \neq 0$, si ha che $[1, p_x + t\,l, p_y + t\,m] = [1/t, \frac{p_x}{t} + l, \frac{p_y}{t} + m]$; se t è un parametro reale,

$$\lim_{t \to \pm\infty} (1/t, \frac{p_x}{t} + l, \frac{p_y}{t} + m) = (0, l, m)$$

che è un vettore di coordinate omogenee assegnato al punto improprio r_∞ della retta r. Osserviamo che $mx - ly + (mp_x + lp_y) = 0$ è una equazione cartesiana per la retta r nel riferimento affine. Proviamo a sostituire l'applicazione inversa $x = X_1/X_0, y = X_2/X_0$ definita in (5.70) quando $X_0 \neq 0$: ricaviamo l'equazione $m(X_1/X_0) - l(X_2/X_0) + (mp_x + lp_y) = 0$ che, per $X_0 \neq 0$, è equivalente a

$$mX_1 - lX_2 + (mp_x + lp_y)X_0 = 0 \tag{5.71}$$

Osserviamo che l'equazione (5.71) è omogenea, e quindi una terna non nulla (X_0, X_1, X_2) ne è soluzione se e solo se ogni rappresentante di $[X_0, X_1, X_2]$ è soluzione. Inoltre, tutte (e sole) le soluzioni (X_0, X_1, X_2) di (5.71) con $X_0 \neq 0$ sono le coordinate omogenee dei punti propri di r, mentre le soluzioni non nulle con $X_0 = 0$ sono tutte e sole le terne della classe $[0, l, m]$ (che corrisponde al punto improprio r_∞). *Possiamo dunque interpretare (5.71) come una equazione in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, le cui soluzioni sono le coordinate omogenee dei punti del completamento proiettivo r^-.* In particolare, *il completamento proiettivo del piano π contiene tutti i completamenti proiettivi delle rette di π.* Si dice che l'equazione (5.71) si ottengono dall'equazione affine $mx - ly + (mp_x + lp_y) = 0$ tramite il procedimento di *omogeneizzazione*: nell'equazione affine si operano le seguenti sostituzioni: $x \mapsto X_1$, $y \mapsto X_2$ e si utilizza il termine noto come coefficiente di X_0.

Presa una qualsiasi retta s di π parallela a r, si avrà che le coordinate omogenee di r_∞ coincidono con le coordinate omogenee di s_∞: i completamenti proiettivi r^- e s^- hanno in comune lo stesso punto improprio.

Definizione 5.9.9. Sia $f(x, y)$ un polinomio di grado d nelle indeterminate x, y. Il polinomio omogeneizzato di f è il polinomio

$$f_h(X_0, X_1, X_2) = (X_0)^d f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}).$$

Il dato di un riferimento sul piano affine π definisce quindi un sistema di coordinate omogenee nel completamento proiettivo di π: in particolare, tale corrispondenza assegna un ruolo speciale ai punti della forma $[l, m, 0]$. Si osservi che l'applicazione definita in (5.69) dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\}$ in π: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[0, 0, 1]$, mentre l'immagine del punto improprio dell'asse x (parallelo a $\mathbf{v}_1$) è $X_\infty = [1, 0, 0]$ e l'immagine del punto improprio dell'asse y (parallelo a $\mathbf{v}_2$) è $Y_\infty = [0, 1, 0]$. Infine, il punto $U(1, 1)$, detto *punto unità*, ha coordinate omogenee $[1, 1, 1]$. In un altro riferimento affine (x', y') la relazione tra le coordinate affini sarà della forma:

$$\begin{cases} x' = m_{11}x + m_{12}y + s_1 \\ y' = m_{21}x + m_{22}y + s_2 \end{cases} \qquad det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1, X'_2]$ definito a partire dal nuovo sistema di riferimento associa:

$$Q(x', y') \mapsto [1, x', y'] = [1, m_{11}x + m_{12}y + s_1, m_{21}x + m_{22}y + s_2].$$

La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X'_0 = X_0 \\ \rho X'_1 = s_1 X_0 + m_{11} X_0 + m_{12} X_1 \\ \rho X'_2 = s_2 X_0 + m_{21} X_0 + m_{22} X_1 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, \tag{5.72}$$

cioè

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & m_{11} & m_{12} \\ s_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

In particolare, qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su π, ai punti impropri di π vengono sempre associate coordinate omogenee della forma $[0, l, m]$.

Osservazione 5.9.10. Osserviamo il cambiamento descritto in (5.72) trasforma i punti con la terza coordinata nulla in punti del piano proiettivo con la stessa caratteristica.

Osservazione 5.9.11. Riprendiamo il sistema di coordinate omogenee del completamento proiettivo di un piano affine, definito nell'esempio 5.9.8 a partire dalla scelta di un riferimento cartesiano. I punti impropri del piano affine sono tutti e soli i punti della retta di equazione $X_0 = 0$, che per questo motivo viene detto la *retta impropria*.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$, la retta r di equazione $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ è il completamento proiettivo di una retta affine e interseca la retta impropria in uno ed un solo punto, $[-b, a, 0]$, che è il punto improprio della retta. Infatti, i punti propri di r sono i punti della retta affine di equazione $ax + by + c = 0$:

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \Leftrightarrow a(X_1/X_0) + b(X_2/X_0) + c = 0 \text{ se } X_0 \neq 0;$$

inoltre, il punto $[0, -b, a]$ è l'unico punto di r che sia improprio (e coincide con il punto improprio dato dalla giacitura della retta affine di equazione $ax + by + c = 0$).

Ogni retta affine di π corrisponde ad una ed una sola retta proiettiva del completamento π^-, e l'equazione omogenea della retta proiettiva corrispondente si ottiene omogeneizzando l'equazione affine (come nella Definizione 5.9.9). La retta impropria $X_0 = 0$ è l'unica retta di π^- che non è completamento proiettivo di una retta di π.

Se due rette affini distinte del piano affine sono incidenti in un punto P, i loro completamenti proiettivi si intersecano solo in P. Se invece le due rette affini sono parallele e distinte, i loro completamenti proiettivi si intersecano nel loro punto improprio.

Nel caso del piano proiettivo il teorema **??** diventa:

Teorema 5.9.12. Teorema fondamentale delle proiettività nel piano proiettivo *Siano (A, B, C, D) e (A', B', C', D') due quaterne di punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ in posizione generale. Allora esiste una e una sola proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ tale che*

$$\varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \varphi(C) = C', \varphi(D) = D'.$$

Dimostrazione. Consideriamo le coordinate omogenee dei punti: $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $D = [\mathbf{d}]$, $A' = [\mathbf{a}']$, $B' = [\mathbf{b}']$, $C' = [\mathbf{c}']$, $D' = [\mathbf{d}']$. La proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ cercata esiste se e solo se esiste una applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ ed esistono opportuni scalari λ, μ, ν, ρ tutti non nulli, tali che

$$\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}', \psi(\mathbf{b}) = \mu\mathbf{b}', \psi(\mathbf{c}) = \nu\mathbf{c}', \psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}'.$$

Poiché per ipotesi $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ sono indipendenti, essi sono riferimenti di $\mathbb{K}^4$. Dunque scelti comunque gli scalari non nulli λ, μ, ν esiste ed è unica l'applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tale che $\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}', \psi(\mathbf{b}) = \mu\mathbf{b}', \psi(\mathbf{c}) = \nu\mathbf{c}'$. Il problema è dunque quello di determinare scalari λ, μ, ν tutti non nulli, in modo che esista poi uno scalare non nullo ρ, tale che $\psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}'$. Osserviamo che $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ dipendono linearmente da $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ rispettivamente, ossia si hanno relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= t_0\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} + t_2\mathbf{c} \\ \mathbf{d}' &= s_0\mathbf{a}' + s_1\mathbf{b}' + s_2\mathbf{c}' \end{aligned}$$

Notiamo che in tali relazioni i coefficienti sono tutti non nulli, grazie all'ipotesi che le quaterne di punti sono in posizione generale.

Ora la condizione richiesta sugli scalari λ, μ, ν è che:

$$\psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}' = \rho(s_0\mathbf{a}' + s_1\mathbf{b}' + s_2\mathbf{c}')$$

e, contemporaneamente, che:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{d}) = \psi(t_0\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} + t_2\mathbf{c}) &= t_0\psi(\mathbf{a}) + t_1\psi(\mathbf{b}) + t_2\psi(\mathbf{c}) \\ &= \lambda t_0\mathbf{a}' + \mu t_1\mathbf{b}' + \nu t_2\mathbf{c}'. \end{aligned}$$

Per l'indipendenza lineare di $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ queste due uguaglianze si traducono nella condizione seguente

$$\begin{cases} \lambda t_0 - \rho s_0 = 0 \\ \mu t_1 - \rho s_1 = 0 \\ \nu t_2 - \rho s_2 = 0 \end{cases}$$

e questo si può interpretare come un sistema lineare $\mathcal{A}$ omogeneo di 3 equazioni nelle 4 incognite λ, μ, ν, ρ. Ogni soluzione non nulla di $\mathcal{A}$ è tale che nessuna sua componente è nulla, e quindi essa dà luogo ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà richiesta. Inoltre soluzioni proporzionali e non nulle di $\mathcal{A}$ danno luogo alla stessa proiettività. Infine ogni proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà richiesta si ottiene in tal modo. Per concludere la dimostrazione basta allora verificare che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{A}$ è un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{K}^4$. Ma ciò è chiaro, perché la matrice di $\mathcal{A}$ è data da:

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & -s_0 \\ 0 & t_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 0 & t_2 & -s_2 \end{pmatrix}$$

e il suo minore determinato dalle prime 3 colonne è non nullo.

$\square$

Esempio 5.9.13. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, comunque fissati 4 punti A_1, A_2, A_3, A_4, a tre a tre non allineati. Per il Teorema 5.9.12, esiste uno ed un solo sistema di coordinate omogenee tale che A_1, A_2, A_3, A_4 abbiano, rispettivamente, coordinate$[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$. Ad esempio, siano $A_1[1,2,3]$, $A_2[0,1,1]$, $A_3[1,0,2]$, $A_4[1,-1,0]$. In analogia con la dimostrazione del teorema 5.8.7 la matrice $\mathbf{M}$ dell'applicazione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, si calcola facilmente come l'inversa della matrice $\mathbf{N}$ della forma:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \lambda_2 \\ 2\lambda_0 & \lambda_1 & 0 \\ 3\lambda_0 & \lambda_1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

ove $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sono tre costanti non nulle tali che:

$$\mathbf{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_2 \\ 2\lambda_0 + \lambda_1 \\ 3\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ricava che la scelta $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\rho = 1$ va bene. Dunque il sistema di coordinate $[X'_0, X'_1, X'_2]$ cercate è dato da

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

5.10 Lo spazio proiettivo numerico di dimensione 3

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Su $\mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1, X_2, X_3)\mathcal{P}(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{esiste } \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che} \\ (X_0, X_1, X_2, X_3) = \rho(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3), \\ \text{cioè } X_0 = \rho Y_0, X_1 = \rho Y_1, X_2 = \rho Y_2, X_3 = \rho Y_3 \end{array}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^3$ e si dice *spazio proiettivo numerico di dimensione* 3 (o, più semplicemente, *spazio proiettivo*) e i suoi elementi sono detti *punti* dello spazio proiettivo. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1, X_2, X_3) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1, X_2, X_3] = \{(\rho X_0, \rho X_1, \rho X_2, \rho X_3) | \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la terna (X_0, X_1, X_2, X_3) (e ogni terna ad essa equivalente) costituisce le *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una terna ordinata mai nulla, che è determinata solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.

Definizione 5.10.1. Un *cambiamento di riferimento proiettivo* (o *cambiamento di sistema di coordinate omogenee*) in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su uno spazio proiettivo) è una trasformazione $[X_0, X_1, X_2, X_3] \mapsto [X'_0, X'_1, X'_2, X'_3]$ ove

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 + m_{02}X_2 + m_{03}X_3 \\ \rho X_1' = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 + m_{13}X_3 \\ \rho X_2' = m_{20}X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 + m_{23}X_3 \\ \rho X_3' = m_{30}X_0 + m_{31}X_1 + m_{32}X_2 + m_{33}X_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, det(m_{ij})_{ij} \neq 0;$$

in forma matriciale la relazione si scrive come:

$$\rho \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

Osservazione 5.10.2. Il cambio di riferimento individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla.

I sottospazi proiettivi propri di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ sono i punti, le rette e i piani.

Definizione 5.10.3. Un *piano* di $\mathbb{P}^3_K$ è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee soddisfa una equazione omogenea lineare non nulla della forma:

$$a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0 \tag{5.73}$$

Definizione 5.10.4. Una *retta* di $\mathbb{P}^3_K$ è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee soddisfa una equazione della forma:

$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}X_1 + a_{13}X_2 + a_{14}X_3 = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}X_1 + a_{23}X_2 + a_{24}X_3 = 0 \end{cases}$$

con la condizione che:

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = 2.$$

Le definizioni di retta e piano di $\mathbb{P}^3_K$ sono invarianti per cambi di coordinate.

Osservazione 5.10.5. **Equazioni parametriche di un piano** Si consideri il piano α di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ di equazione (5.73). L'insieme delle quaterne numeriche che sono soluzione dell'equazione omogenea forma un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{K}^4$: siano

$$\{\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3), \mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)\}$$

una base di tale sottospazio vettoriale. I punti $P[p_0, p_1, p_2, p_3]$, $Q[q_0, q_1, q_2, q_3]$ e $S[s_0, s_1, s_2, s_3]$ sono punti distinti di α e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} + \nu\mathbf{s}]$$

I punti del piano sono dunque tutti e soli i punti della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 + \nu s_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 + \nu s_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 + \nu s_2 \\ \rho X_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 + \nu s_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0. \tag{5.74}$$

Definizione 5.10.6. Equazioni della forma (5.74) sono dette *equazioni parametriche del piano proiettivo*.

Le equazioni parametriche del piano dipendono dalla scelta di tre punti le cui coordinate omogenee generano un sottospazio di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3: si dice che i tre punti sono *indipendenti*; tale condizione è equivalente a chiedere che i tre punti non siano allineati. Viceversa, *esiste un unico piano passante per tre punti indipendenti* (si veda anche l'Esempio 5.10.11).

Osservazione 5.10.7. **Mutua posizione di due piani ed equazioni parametriche di una retta** Dati due piani distinti α e α' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, la loro intersezione è data dai punti di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee soddisfano un sistema lineare omogeneo della forma

$$\begin{cases} u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0 \\ u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2: per definizione, tale intersezione è una retta di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$. L'insieme delle quaterne numeriche che sono soluzione del sistema forma un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{K}^4$; fissiamo una base $\{\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)\}$ di tale sottospazio. I punti $P[p_0, p_1, p_2, p_3]$ e $Q[q_0, q_1, q_2, q_3]$ sono punti distinti dell'intersezione e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$$

I punti della retta sono dunque della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ \rho X_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \tag{5.75}$$

Definizione 5.10.8. Un sistema di equazioni della forma (5.75) è detto *sistema di equazioni parametriche della retta proiettiva*.

Le equazioni parametriche di una retta dipendono dalla scelta di due punti distinti sulla retta. Viceversa, ogni insieme di punti con coordinate della forma (5.75) con P e Q distinti è una retta. In particolare, *per ogni coppia di punti distinti passa una ed una sola retta.*

Esempio 5.10.9. **Mutua posizione di due rette** Si considerino due rette di $\mathbb{P}^3$, rappresentate dai sistemi:

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + u_{01}X_1 + u_{02}X_2 + u_{03}X_3 = 0 \\ u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.76}$$

e

$$\begin{cases} u'_{00}X_0 + u'_{01}X_1 + u'_{02}X_2 + u'_{03}X_3 = 0 \\ u'_{10}X_0 + u'_{11}X_1 + u'_{12}X_2 + u'_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.77}$$

esse sono complanari se e solo se il sistema

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + u_{01}X_1 + u_{02}X_2 + u_{03}X_3 = 0 \\ u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + u_{13}X_3 = 0 \\ u'_{00}X_0 + u'_{01}X_1 + u'_{02}X_2 + u'_{03}X_3 = 0 \\ u'_{10}X_0 + u'_{11}X_1 + u'_{12}X_2 + u'_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.78}$$

ha qualche soluzione non banale (corrispondente a qualche punto a comune alle due rette. Ciò accade se e solo se la matrice del sistema non ha rango massimo, ossia se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u'_{00} & u'_{01} & u'_{02} & u'_{03} \\ u'_{10} & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \end{pmatrix} = 0$$

In particolare le due rette coincidono se e solo se il rango della prima matrice è 2 (caso in cui il sistema (5.78) è equivalente ad uno qualunque dei due sistemi (5.76) e (5.77)). Se il rango della matrice di (5.78) è 3, vi è un unico piano contenente le due rette. Le due rette sono sghembe se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u'_{00} & u'_{01} & u'_{02} & u'_{03} \\ u'_{10} & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \end{pmatrix} \neq 0$$

□

Esempio 5.10.10. **Condizioni di allineamento di tre punti** Tre punti X, P, Q di $\mathbb{P}^3$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \leq 2$$

Se i due punti P e Q sono distinti, la richiesta equivale al fatto che la matrice non abbia rango 3; per imporla, basta annullare tutti i determinanti delle sottomatrici 3×3:

$$\begin{cases} det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

In base alla teoria dei sistemi lineari omogenei, le equazioni così ottenute non sono linearmente indipendenti, perché sono 4, mentre il numero minimo di equazioni di un sistema equivalente è 2. Per trovare un sistema minimo di equazioni, basta sceglierne 2 indipendenti (o procedere orlando un minore 2×2 non nullo).

Esempio 5.10.11. **Condizioni di complanarità di tre punti** Quattro punti X, P, Q, S di $\mathbb{P}^3$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} \leq 3 \text{ cioè se e solo se } det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = 0; \tag{5.79}$$

Osserviamo che la seconda condizione in (5.79) fornisce una equazione cartesiana del piano per P, Q, S se tali punti sono indipendenti.

Definizione 5.10.12. Sia $f(x, y, z)$ un polinomio di grado d nelle indeterminate x, y, z. Il *polinomio omogeneizzato* di f (o *polinomio omogeneo associato* a $f(x, y, z)$) è il polinomio

$$f_h(X_0, X_1, X_2, X_3) = (X_0)^d f(X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0).$$

Si osservi che per passare da un polinomio $f(x, y, z)$ al polinomio omogeneo associato si operano le seguenti sostituzioni: $x \mapsto X_1$, $y \mapsto X_2$, $z \mapsto X_3$, e si introduce in ogni monomio di f una potenza di X_0 in modo da rendere omogeneo il monomio.

Esempio 5.10.13. **Completamento proiettivo di uno spazio affine di dimensione** 3 Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}$ (o lo spazio complesso se $K = \mathbb{C}$). Per ogni retta $r \subset \mathbb{E}$ si denoti con r_∞ la sua giacitura, che costituisce il punto improprio del completamento r^-. Si definisca l'insieme

$$\mathbb{E}_\infty = \{r_\infty | r \text{ retta in } \mathbb{E}\};$$

L'insieme $\mathbb{E}_\infty$ è l'insieme dei punti impropri delle rette di $\mathbb{E}$ e i suoi elementi vengono detti i *punti impropri* di $\mathbb{E}$. Per distinguerli, i punti di $\mathbb{E}$ vengono detti *punti propri*. L'insieme

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \cup \mathbb{E}_\infty$$

è detto *completamento proiettivo dello spazio affine* $\mathbb{E}$.

La scelta di un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ in $\mathbb{E}$, di coordinate (x, y, z), definisce la biezione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{E}) &\to \mathbb{P}^3_K \\ \mathbb{E} \ni Q(x,y,z) &\mapsto [0,x,y,z] \\ r_\infty &\mapsto [0,l,m,n] \text{ ove } (l,m,n) \text{ sono le componenti, nel riferimento di } \mathbb{E}, \\ & \quad\ \text{di un vettore direttore di } r \end{aligned} \tag{5.80}$$

che viene detto *sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo dello spazio* $\mathbb{E}$ *associato al sistema (affine)* $\mathcal{R}$. Osserviamo che l'immagine dei punti impropri è costituita da tutti i punti $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ del piano proiettivo numerico tali che $X_0 = 0$. Infatti, se $X_0 \neq 0$, il punto $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ è immagine del punto proprio $Q(X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0)$ di $\mathbb{E}$. La relazione tra le coordinate affini e quelle omogenee è dunque data da:

$$x = X_1/X_0, y = X_2/X_0, z = X_3/X_0 \text{ se } X_0 \neq 0. \tag{5.81}$$

Proviamo ad applicare ai punti di una retta affine la trasformazione definita in (5.80); consideriamo la retta affine r passate per un punto $P(p_x, p_y, p_z)$ e di vettore direttore $\mathbf{v}$ di componenti (l, m, n) nel riferimento fissato: ogni punto di tale retta ha coordinate affini della forma $Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n)$ e coordinate omogenee

$$Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n) \mapsto [0, p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n]$$

Per $t \neq 0$, si ha che

$$[1, p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n] = [\frac{1}{t}, \frac{p_x}{t}) + l, \frac{p_y}{t} + m, \frac{p_z}{t} + n];$$

se t è un parametro reale,

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\frac{1}{t}, \frac{p_x}{t} + l, \frac{p_y}{t} + m, \frac{p_z}{t} + n) = (0, l, m, n)$$

che è un vettore di coordinate omogenee del punto improprio r_∞ della retta r.

Osserviamo che un sistema di equazioni cartesiane per la retta euclidea r in $\mathbb{E}$, nel riferimento scelto, è dato da

$$\begin{cases} m(x - p_x) = l(y - p_y) \\ n(x - p_x) = l(z - p_z) \end{cases} \text{cioè} \begin{cases} mx - ly + lp_y - mp_x = 0 \\ nx - lz + lp_z - np_x = 0 \end{cases}. \tag{5.82}$$

Proviamo a sostituire l'applicazione inversa $x = X_1/X_0, y = X_2/X_0, z = X_3/X_0$ definita in (5.81) quando $X_4 \neq 0$: ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} m(X_1/X_0) - l(X_2/X_0) + lp_y - mp_x = 0 \\ n(X_1/X_0) - l(X_3/X_0) + lp_z - np_x = 0 \end{cases}$$

che, per $X_0 \neq 0$, è equivalente a

$$\begin{cases} mX_1 - lX_2 + (lp_y - mp_x)X_0 = 0 \\ nX_1 - lX_3 + (lp_z - np_x)X_0 = 0 \end{cases}. \tag{5.83}$$

Osserviamo che il sistema (5.83) è omogenea, e quindi una quaterna non nulla (X_0, X_1, X_2, X_3) ne è soluzione se e solo se ogni rappresentante di $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ è soluzione. Inoltre, tutte (e sole) le soluzioni (X_0, X_1, X_2, X_3) di (5.83) con $X_0 \neq 0$ sono le coordinate omogenee dei punti propri di r, mentre le soluzioni non nulle con $X_0 = 0$ sono tutte e sole le terne della classe $[0, l, m, n]$ (che corrisponde al punto improprio r_∞). *Possiamo dunque interpretare (5.83) come una equazione in* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$*, le cui soluzioni sono le coordinate omogenee dei punti del completamento proiettivo* $\mathbb{P}(r)$. In particolare, *il completamento proiettivo del piano* $\mathbb{E}$ *contiene tutti i completamenti proiettivi delle rette di* $\mathbb{E}$. Si dice che le equazioni (5.83) si ottengono dalle equazioni affini (5.82) tramite il procedimento di *omogeneizzazione* (vedi Definizione 5.10.12).

Presa una qualsiasi retta s di π parallela a r, si avrà che le coordinate omogenee di r_∞ coincidono con le coordinate omogenee di s_∞: i completamenti proiettivi $\mathbb{P}(r)$ e $\mathbb{P}(s)$ hanno in comune lo stesso punto improprio.

Sia π un piano dello spazio euclideo, di equazione cartesiana $ax+by+cz+d = 0$. In modo analogo a quanto osservato per le rette, si controlla facilmente che l'insieme dei punti $P[X_0, X_1, X_2, X_3]$ le cui coordinate soddisfano l'equazione omogeneizzata (seguendo la Definizione 5.10.12): $aX_1+bX_2+cX_3+dX_0 = 0$ è formato esattamente dai punti di π e da tutti i punti impropri delle rette di π, e coincide dunque con il completamento proiettivo di π.

Il piano $X_0 = 0$ è detto *piano improprio* e non è completamento proiettivo di un piano di $\mathbb{E}$. A partire dall'equazione omogenea $aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_0 = 0$ di un piano H con $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, si ritrova l'equazione affine $ax + by + cz + d = 0$ dei punti propri di H sostituendo $X_1 \mapsto x$, $X_2 \mapsto y$, $X_3 \mapsto z$ e ponendo $X_0 = 1$.

Si osservi che l'applicazione definita in (5.80) dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\}$ in π: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[1, 0, 0, 0]$, mentre l'immagine del punto improprio dell'asse x (parallelo a $\mathbf{v}_1$) è $X_\infty = [0, 1, 0, 0]$, l'immagine del punto improprio dell'asse y (parallelo a $\mathbf{v}_2$) è $Y_\infty = [0, 0, 1, 0]$, l'immagine del punto improprio dell'asse z (parallelo a $\mathbf{v}_3$) è $Z_\infty = [0, 0, 0, 1]$. Infine, il punto $U(1, 1, 1)$, detto *punto unità*, ha coordinate omogenee $[1, 1, 1, 1]$. In un altro riferimento affine (x', y', z') la relazione tra le coordinate affini sarà della forma:

$$\begin{cases} x' = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + s_1 \\ y' = m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + s_2 \\ z' = m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + s_3 \end{cases} \qquad det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1, X_2, X'_3]$ definito a partire dal nuovo sistema di riferimento associa:

$$\begin{aligned} Q(x', y', z') &\mapsto [1, x', y', z'] = \\ &= [1, m_{11}x + m_{12}y + s_1, m_{21}x + m_{22}y + s_2, m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + s_3]. \end{aligned}$$

La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X'_0 = X_0 \\ \rho X'_1 = s_1X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 + m_{13}X_3 \\ \rho X'_2 = s_2X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 + m_{23}X_3 \\ \rho X'_3 = s_3X_0 + m_{31}X_1 + m_{32}X_2 + m_{33}X_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, \tag{5.84}$$

cioè

$$\rho \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ s_2 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ s_3 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

In particolare, qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su $\mathbb{E}$, ai punti impropri di $\mathbb{E}$ vengono sempre associate coordinate omogenee della forma $[0, a, b, c]$.

Osservazione 5.10.14. Osserviamo che il cambiamento descritto in (5.84) trasforma i punti con la prima coordinata nulla in punti dello spazio proiettivo con la stessa caratteristica.

5.11 Esercizi svolti

BIRAPPORTO

Problema 5.27. *a) Calcola il birapporto della seguente quaterna di punti di* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$*:*

$$A = [-1, 1],\ B = [1, 3],\ C = [1, 2],\ D = [-2, 1].$$

b) Verifica se la quaterna A, B, C, D *definita al punto precedente e la quaterna* $[1, 0],\ [0, 1], [1, 1], [21, 1]$ *sono proiettive.*

c) Verifica se la quaterna A, B, C, D *definita al punto precedente e la quaterna* $A'[3, 1], B'[2, 1], C'[-1, 2], D'[1, 1]$ *sono proiettive.*

Soluzione. a) Utilizzando la formula (5.64), si ricava il birapporto della quaterna:

$$(ABCD) = [det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}] = [-21, -1].$$

b) Poichè $[-21, -1] = [21, 1]$, le quaterne A, B, C, D e $([1, 0], [0, 1], [1, 1], [21, 1])$ sono proiettive, per definizione di birapporto.

c) Poichè $(A'B'C'D') = [7, 10] \neq [-21, -1]$, le quaterne A, B, C, D e A', B', C', D' non sono proiettive.

Problema 5.28. *In* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$*, considera i punti* $A[1, 2, -1]$*,* $B[0, 1, 1]$*,* $C[2, -1, -5]$*,* $D[-1, 2, 5]$*. Dopo aver controllato che i 4 punti sono allineati, calcola il birapporto* $(ABCD)$*.*

Soluzione. I punti A e B sono indipendenti, perché le loro coordinate omogenee sono linearmente indipendenti. Inoltre, $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$, e dunque per l'Osservazione 5.9.6 i 4 punti sono tra loro allineati, e, in particolare, appartengono alla retta r per A e per B.

Per calcolare il birapporto $(A\,B\,C\,D)$, conviene introdurre un sistema di coordinate sulla retta r. Si fissi una scelta delle coordinate omogenee $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ per A e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ per B. Seguendo l'osservazione 5.9.5, queste scelte permettono di definire un sistema di coordinate omogenee sulla retta proiettiva r per A e B: al punto di coordinate omogenee $\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ corrispondono le coordinate $[\lambda, \mu]$ sulla retta. Il punto A ha coordinate omogenee $[1, 0]$ mentre il punto B ha coordinate omogenee $[0, 1]$ in tale sistema.

Poiché $(2, -1, -5) = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$, il punto C ha coordinate $[2, -3]$ sulla retta.

Analogamente, dall'uguaglianza $(-1, 2, 5) = -\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$, si conclude che il punto D ha coordinate $[-1, 4]$ sulla retta.

Ora è possibile utilizzare la formula (5.64) per calcolare il birapporto della quaterna, a partire dalle coordinate omogenee dei punti della retta. Si ricava che il birapporto $(A\,B\,C\,D)$ è uguale a

$$[det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}] = [-3, -8] = [3, 8].$$

GEOMETRIA AFFINE E PROIETTIVA

Problema 5.29. *Nella retta proiettiva, fissa un sistema di coordinate e quattro punti A, B, C, D. Considera la carta affine standard e denota con ∞ o con a, b, c, d le coordinate affini dei punti (rispettivamente). Mostra che*
a) $(a, b, c, d) = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}$.
b) $(\infty, b, c, d) = \frac{(b-c)}{(b-d)}$.
c) $(a, \infty, c, d) = \frac{(a-d)}{(a-c)}$.
d) $(a, b, \infty, d) = \frac{(a-d)}{(b-d)}$.
e) $(a, b, c, \infty) = \frac{(b-c)}{(a-c)}$.

Soluzione. Basta considerare le coordinate proiettive dei punti e sostituirle nella formula del birapporto.

Problema 5.30. *Nella retta euclidea r, sia fissato un riferimento e sia $A(a)$ e $B(b)$ due punti distinti. Detto M il punto medio di A e B, calcola il birapporto $(AB\,r_\infty M)$ nel completamento proiettivo di r.*
Calcola, infine, il birapporto $(Ar_\infty BM)$

Soluzione. Sul completamento proiettivo di r, assegniamo le coordinate omogenee associate al riferimento scelto: al punto $Q(q) \in r$ assegniamo le coordinate $[1, q]$, mentre a r_∞ assegniamo le coordinate $[0, 1]$. Otteniamo $A[1, a]$, $B[1, b]$, $M[2, a + b]$. Ora calcoliamo il birapporto in modo esplicito:

$$(ABr_\infty M) = [det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}].$$

Ricavo che $(ABr_\infty M) = [a - b, b - a] = [1, -1]$ (dove l'uguaglianza segue osservando che $a - b \neq 0$ perché ho supposto distinti i due punti A e B). Si noti che tale birapporto NON dipende da A e B.

Osserviamo anche che $(Ar_\infty BM) = [2, 1] = [1, 1/2]$. Infatti,

$$(Ar_\infty BM) = [det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}].$$

Problema 5.31. *Nella retta proiettiva reale, siano $A[1, 0]$, $B[0, 1]$, $C[1, 1]$, $D[d_0, d_1]$.*
a) Verifica che $(ABCD) = [d_0, d_1]$.
b) Determina il birapporto $(BACD)$ e confrontalo con $(ABCD)$.
c) Discuti se è possibile che (A, B, C, D) e (B, A, C, D) siano quaterne proiettive.

Soluzione. a) Basta verificare inserendo i dati nella formula del birapporto.
b) $(BACD) = [d_1, d_0]$: si osservi che si sono scambiati i ruoli delle due entrate delle coordinate omogenee.

Per capire cosa è successo, possiamo ragionare come segue. Se considero A come punto improprio, l'insieme $\mathbb{P}^1 \setminus A$ viene identificato con una retta affine tramite la posizione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \setminus A &\to \mathbf{R} \\ [X_0, X_1] &\mapsto X_1/X_0 = x \end{aligned}$$

Rifacciamo la stessa procedura assegnando a B le coordinate $[0, 1]$, ad A le coordinate $[1, 0]$ e a C le coordinate $[1, 1]$. Il cambio di coordinate è $\rho Y_0 = X_1$, $\rho Y_1 = X_0$ con $\rho \neq 0$. L'applicazione corrispondente risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \setminus B &\to \mathbf{R} \\ [Y_0, Y_1] &\mapsto Y_1/Y_0 = X_0/X_1 = 1/x. \end{aligned}$$

c) Le due quaterne sono proiettive se e solo se hanno lo stesso birapporto. Devo chiedermi se esiste $D[d_0, d_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $[d_0, d_1] = [d_1, d_0]$: ciò accade se e solo se $det \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} = 0$, cioè se $d_0 = \pm d_1$; ciò corrisponde a due possibili scelte per D: $D_+ = C[1, 1]$ oppure $D_-[1, -1]$.

Rivedo l'esercizio in un'altro modo. Determino esplicitamente la matrice della proiettività $\omega : \mathbb{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\omega(A) = B$, $\omega(B) = A$, $\omega(C) = C$. Ricavo che $\omega([X_0, X_1]) = [X_1, X_0]$, cioè ω è associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora devo scegliere D tale che $\omega(D) = D$: le coordinate (d_0, d_1) devono soddisfare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Dunque come rappresentante delle coordinate di D devo scegliere un autovettore di M. Si verifica facilmente che M è diagonalizzabile e D_+ e D_- corrispondono ad una base di autovettori.

Notare inoltre che $\omega \circ \omega = id$: se compongo ω con se stessa, trovo l'identità (riscambiando i primi due punti, A e B ritornano nella posizione originaria). Si dice che ω è una *involuzione*.

PROIETTIVITÀ E PRINCIPIO DI DUALITÀ

Problema 5.32. *Fissati* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$*, sia* $\psi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ *la proiettività indotta dall'applicazione lineare*

$$\begin{array}{rcl} \psi_l : \ \mathbb{K}^{n+1} & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} X_0 \\ a_1X_0 + X_1 \\ a_2X_0 + X_2 \\ \vdots \\ a_nX_0 + X_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Mostrare che, detto π_∞ l'iperpiano di equazione $X_0 = 0$, ψ induce una traslazione su $\mathbb{P}^n \setminus \pi_\infty$ (da identificare con $\mathbb{A}^n$ come di consueto).

Soluzione. L'iperpiano π_∞ è fisso per ψ, che quindi è indotta da una affinità. Tale affinità ha equazioni

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^n & \to & \mathbb{A}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ \vdots \\ a_n + x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

e dunque è la traslazione di vettore $(a_1, \dots, a_n)$.

Definizione 5.11.1. Un triangolo di $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ è formato da tre punti A, B, C distinti e non allineati e tre rette $a =< B, C >$, $b =< A, C >$, $c =< A, B >$ e si denota con (A, B, C, a, b, c).

Problema 5.33. (Teorema di Desargues) *Siano assegnati due triangoli (A, B, C, a, b, c) e (A', B', C', a', b', c') di $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ formati da punti e rette tra loro distinti. Allora le rette $< A, A' >$, $< B, B' >$, $< C, C' >$ si intersecano in un punto comune, se e solo se i punti $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$, $R = c \cap c'$ sono allineati.*

Soluzione. Mostrata una delle due implicazioni, l'implicazione inversa segue per dualità. È dunque sufficiente mostrare che: se i punti $P = a\cap a'$, $Q = b\cap b'$, $R = c \cap c'$ sono allineati, allora $< A, A' > \cap < B, B' > \cap < C, C' >$ è un punto.

I punti P, Q, A, B sono in posizione generale e dunque esiste una ed una sola proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_\mathbb{K} \to \mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ tale che $\varphi(P) = P$, $\varphi(Q) = Q$, $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$. Posto

$$T =< A, A' > \cap < B, B' > \qquad\qquad S =< B, B' > \cap < C, C' >,$$

la tesi equivale a mostrare che $T = S$.

Si verifica facilmente che l'applicazione φ gode delle seguenti proprietà:

a) Per ogni $M \in< P, Q >$, si ha $\varphi(M) = M$: basta infatti mostrare che $\varphi(R) = R$ perché in tal caso la proiettività indotta da φ su $< P, Q >$ ha tre punti fissi e coincide quindi con l'identità. Ora, $R \in< P, Q >$

e dunque $\varphi(R) \in <\varphi(P), \varphi(Q)> = <P, Q>$. D'altra parte, poiché $R \in <A, B>$, $\varphi(R) \in <\varphi(A), \varphi(B)> = <A', B'> = c'$. Se ne conclude che $\varphi(R) = <P, Q> \cap c' = R$.

b) $\varphi(C) = C'$: segue ragionando in modo analogo al punto precedente avendo osservato che $C = <A, Q> \cap <B, P>$ e $C' = <A', Q> \cap <B', P>$.

c) $\varphi(T) = T$: per a), il punto $M_1 = <A, A'> \cap <P, Q>$ è fisso per φ. Poiché $T \in <A, A'> = <A, M_1>$, l'immagine $\varphi(T)$ deve appartenere a $<A', M_1> = <A, A'>$. Ragionando in modo analogo sulla retta $<B, B'>$ si ricava che $\varphi(T) \in <B, B'>$, e si ha la tesi.

d) $\varphi(S) = S$: completamente analogo al precedente.

Si supponga ora per assurdo che sia $T \neq S$, cioè $<T, S> = <B, B'>$. Sia $M_2 = <B, B'> \cap <P, Q>$. Se M_2 fosse distinto da T e da S, si avrebbe subito un assurdo perchè la proiettività indotta da φ di $<B, B'>$ su sè stessa avrebbe tre punti fissi pur mandando B su $B' \neq B$.

Se $M_2 = T$, la retta $<A, S>$ interseca $<P, Q>$ in un punto H distinto da S. Poiché il punto H è fisso per φ, la retta $<A, S> = <H, S>$ viene mutata in se stessa da φ: ne segue un assurdo, perché in tal caso $A' = \varphi(A)$ sarebbe allineato con A ed S, cioè $S \in <A, A'>$, contro l'ipotesi $S \neq T$.

L'ultimo caso da considerare è il caso $M_2 = S$: ma motivazioni analoghe a quelle appena viste comporterebbero che $T \in <C, C'>$, che è impossibile.

PROIETTIVITÀ ED ESERCIZI DI CARATTERE GRAFICO

Problema 5.34. Teorema di Pappo *Nel piano proiettivo complesso, siano Q_1, Q_2, Q_3 tre punti distinti allineati sulla retta r e Q'_1, Q'_2, Q'_3 tre punti distinti allineati sulla retta r' diversa da r. Si supponga inoltre che ciascuno dei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3 siano distinti dal punto $P = r \cap r'$. Si indichino $S_1 = <Q_2, Q'_3> \cap <Q_3, Q'_2>$, $S_2 = <Q_1, Q'_3> \cap <Q_3, Q'_1>$, $S_3 = <Q_1, Q'_2> \cap <Q_2, Q'_1>$. Verifica che i punti S_1, S_2, S_3 sono allineati.*

Soluzione. Suggerimento: usa un riferimento proiettivo avente come punto unità S_3 e come punti fondamentali $P_1 = P = r \cap r'$, $P_2 = Q_1$, $P_3 = Q'_1$. In tale riferimento, r ha equazione $X_2 = 0$ mentre r' ha equazione $X_1 = 0$. Il punto Q_1 ha coordinate $[0, 1, 0]$ essendo l'intersezione di r con la retta $<Q'_1, Q_2> = <Q'_1, S_3>$; analogamente, si ricavano le coordinate del punto Q'_2. Dopo aver osservato che $Q_3 = [1, h, 0]$ con $h \neq 0, 1$ e $Q'_3 = [1, 0, k]$ con $k \neq 0, 1$, si determinano le coordinate di S_1 ed S_2 in funzione di h e k e si verifica che S_1 ed S_2 sono allineati con S_3.

Problema 5.35. Proiettività tra rette nel piano

a) Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tra due rette distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. E' possibile scegliere tre punti distinti Q_1, Q_2, Q_3 di r, in modo che essi e i loro trasformati $Q'_1 = \varphi(Q_1), Q'_2 = \varphi(Q_2), Q'_3 = \varphi(Q_3)$ siano distinti da $r \cap r'$. Per il teorema di Pappo (vedi Problema 5.34), i punti $S_1 = <Q_2, Q'_3> \cap <Q_3, Q'_2>$, $S_2 = <Q_1, Q'_3> \cap <Q_3, Q'_1>$,

$S_3 =< Q_1, Q_2' > \cap < Q_2, Q_1' >$ sono allineati lungo una retta s. Mostra che $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$ ove con $\psi_1 : r \to s$ si denoti la proiezione da r su s di centro Q_1', mentre con $\psi_2 : s \to r'$ si denoti la proiezione da s su r' di centro Q_1.
b) Mostra che ogni proiettività tra rette di $\mathbb{P}^2$ si scrive come composizione di al più tre proiezioni.
c) Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tra due rette distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che, detto $P = r \cap r'$, si abbia $\varphi(P) = P$. Mostra che φ è la proiezione di r su r' rispetto ad un punto.

Soluzione.

5.12 Esercizi

5.33. a) Calcola il birapporto della seguente quaterna di punti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$A = [3, 2],\ B = [1, 7],\ C = [2, 1],\ D = [0, 1].$$

b) Controlla se la quaterna A, B, C, D definita al punto precedente e la quaterna $([1, 0], [0, 1], [1, 1], [7, 4])$ sono proiettive.

5.34. Si consideri il piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Siano assegnati i punti $A[1, 0, 7]$, $B[2, -1, 5]$, $C[4, -3, 1]$, $D[3, -1, 12]$.
a) Verifica che i punti A, B, C, D sono allineati e determinare una equazione omogenea della retta proiettiva r che li contiene.
b) Determina equazioni parametriche per r.
c) Determina il birapporto $(ABCD)$.

5.34

a) Basta osservare che i vettori $(1, 0, 7)$, $(2, -1, 5)$, $(4, -3, 1)$, $(3, -1, 12)$ generano un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^3$.
b)
$$det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0$$
c) Uso $(1, 0, 7)$, $(2, -1, 5)$ come base del sottospazio vettoriale corrispondente alla retta e parametrizzo i punti della retta utilizzando questi vettori. Il punto A ha coordinate omogenee $[1, 0]$, mentre B ha coordinate $[0, 1]$. Ricavo $(4, -3, 1) = -2(1, 0, 7)+3(2, -1, 5)$ e dunque C ha coordinate omogenee $[-2, 5]$. Infine, $(3, -1, 12) = (1, 0, 7) + (2, -1, 5)$, dunque D ha coordinate $[1, 1]$. Ora calcolo il birapporto utilizzando le coordinate omogenee introdotte sulla retta. Ricavo $(ABCD) = [-3, 2] = [3, -2]$.
Osserviamo che D è il punto unità del sistema di coordinate omogenee introdotto e la proiettività ω tale che $\omega(A) = A$, $\omega(B) = B$, $\omega(C) = D$ è una involuzione (cioè $\omega \circ \omega$ è l'applicazione identica).

5.35. Nella retta proiettiva numerica $\mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ siano fissati i punti $A[1,-1]$, $B[2,1]$, $C[1,3]$, $D[3,1]$.
Determina le equazioni del cambio di coordinate omogenee necessario per ottenere il riferimento nel quale A, B, C sono i punti fondamentali. In particolare, calcola le coordinate omogenee del punto D nel nuovo riferimento.

5.36. Nella retta proiettiva numerica, siano fissati i punti $A[1,2]$, $B[3,-1]$, $C[2,1]$, $D[2,-5]$. Determina il birapporto $(ABCD)$.