7

Classificazione delle quadriche

In questo capitolo verrà discussa la classificazione delle quadriche dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$; interpretando $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ come il completamento dello spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{X_0 = 0\}$ o dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{X_0 = 0\}$, ne deriveremo la classificazione affine e metrica delle quadriche. Ci occuperemo principalmente del caso $n = 2$.

7.1 Classificazione proiettiva delle quadriche su una retta.

Quadriche della retta proiettiva complessa Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva nella retta complessa $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, si può scegliere il riferimento in modo tale che B abbia coordinate $B[0,1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 = 0$.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, il riferimento può essere scelto in modo tale che B_0 e B_1 abbiano coordinate, rispettivamente, $B_0[1, i]$ e $B_1[1, -i]$, e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

Le equazioni così determinate, si dicono *forma canonica proiettiva* per $\mathbf{\Gamma}$ e riflettono la proprietà che le forme quadratiche non degeneri su un campo algebricamente chiuso (di caratteristica diversa da 2) ammettono sempre una base ortonormale.

Quadriche reali della retta proiettiva reale o complessificata Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica reale di $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, esiste un riferimento in cui B ha coordinate $B[0,1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 = 0$, come nel caso complesso.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, occorre invece distinguere il caso in cui B_0 e B_1 siano reali, dal caso in cui B_0 e B_1 siano immaginari coniugati. Se B_0 e B_1 sono reali, allora in un opportuno riferimento, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 - X_1^2 = 0$: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente negativo. Se invece B_0 e B_1 sono immaginari coniugati, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$ in un riferimento opportuno: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente positivo.

Osservazione 7.1.1. La distinzione dei due casi possibili per le quadriche non degeneri reali corrisponde alla distinzione, tra le forme quadratiche reali di rango 2, tra le forme definite e le forme non definite. Come verrà ricordato nel seguito (cf. 7.10.7), la matrice associata alla forma quadratica in un qualsiasi riferimento permette facilmente di operare tale distinzione.

Osservazione 7.1.2. **Determinazione della forma canonica nel caso non degenere reale a punti reali.** Siano P un punto reale di $\mathbb{P}^1$ non appartenente ad una quadrica non singolare $\mathbf{\Gamma}$, e P' il suo polare. In un sistema di riferimento in cui $P[1,0]$ e $P'[0,1]$, la matrice associata a $\mathbf{\Gamma}$ è della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con a e b non nulli e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $aX_0^2 + bX_1^2 = 0$. Nel sistema di coordinate $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{|a|}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{|b|}}$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $\pm(Y_0^2 - Y_1^2 = 0)$.

7.2 Classificazione proiettiva delle coniche

In questa sezione, si vuole capire quando una conica può essere trasformata in un'altra conica assegnata attraverso una proiettività (diciamo che le coniche sono *proiettivamente equivalenti*). In altre parole, si vuole capire se due equazioni descrivono la stessa conica in sistemi di coordinate differenti. Questo confronto verrà compiuto cercando per ciascuna conica una equazione "ottimale" (detta *equazione canonica proiettiva*): risulterà che due coniche sono proiettivamente equivalenti se hanno la stessa equazione canonica proiettiva.

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$; consideriamo una sua matrice

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Osservazione 7.2.1. **Punti fondamentali e coniche** Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ se e solo se nell'equazione f di $\mathbf{\Gamma}$ non compare il termine in X_0^2 (cioè se $a_{00} = 0$).

Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ è singolare per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la prima riga di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ la prima colonna di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare la variabile X_0. Vale analogo per gli altri punti fondamentali.

Se invece $U_0[1,0,0]$ non è un punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ (potrebbe essere un punto semplice o non appartenere alla conica), allora il punto $U_1[0,1,0]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{01} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_1. Allo stesso modo, allora il punto $U_1[0,1,0]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{01} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_1. Vale analogo per gli altri punti fondamentali. Una strategia per annullare nella matrice i termini fuori dalla diagonale è dunque quella di scegliere di posizionare, ove possibile, i punti fondamentali in punti semplici appartenenti alle polari degli altri.

Osservazione 7.2.2. **Classificazione proiettiva delle coniche degeneri**
a) Supponiamo che una conica $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 1. Se si sceglie un riferimento nel quale i punti $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ siano entrambi doppi, l'equazione della conica diventa $Y_0^2 = 0$ (detta *equazione canonica proiettiva*) e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

b) Supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 2. Se si sceglie un riferimento nel quale un punto doppio abbia coordinate omogenee $[0,0,1]$, l'equazione della conica $f(X_0, X_1) = 0$ dipende solo da due variabili e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

Se si impone anche che $P_0[1,0,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1[0,1,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1 \in r_{P_0}$, si vede che la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad \neq 0. \tag{7.4}$$

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, con un cambio di coordinate $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, si ricava l'*equazione canonica proiettiva* $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, se $ad > 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$. Se invece $ad < 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

Cerchiamo ora di classificare le coniche non degeneri. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Definizione 7.2.3. Un triangolo autopolare per $\mathbf{\Gamma}$ è composto da tre rette s, t, v che si intersecano a due a due in 3 punti distinti S, T, V, in modo tale che $S \notin s$, $T \notin t$, $V \notin v$ e inoltre s è la retta polare di S, t è la retta polare di T, v è la retta polare di V

Lemma 7.2.4. *Ogni conica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ammette infiniti triangoli autopolari.*

Dimostrazione. Sia S un punto che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e sia $T \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto sulla retta polare s di S rispetto a $\mathbf{\Gamma}$. La retta polare t di T (contiene S e) interseca s in un punto V necessariamente distinto da T: s, t, v formano dunque un triangolo autopolare. $\square$

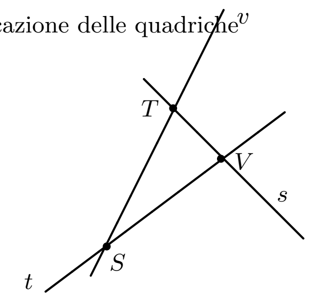

Figura 7.1. Un triangolo

Si invita il lettore a riflettere se il Lemma 7.2.4 si estende al caso di una conica degenere (cf. Problemi 6.10-6.11).

I triangoli autopolari permettono di determinare riferimenti nei quali l'equazione della conica diventa più semplice:

Osservazione 7.2.5. Si fissi un triangolo autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $S = [1,0,0]$, $T = [0,1,0]$ e $V = [0,0,1]$, di modo che s ha equazione $X_0 = 0$, t ha equazione $X_1 = 0$, v ha equazione $X_2 = 0$. Si vede facilmente che $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 = 0 \qquad (\text{con } abc \neq 0) \tag{7.5}$$

e la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è diagonale in questo riferimento.

Nel piano proiettivo complesso Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e sia $[X_0, X_1, X_2]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 7.2.5. Nel riferimento $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, $Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{c}}$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{7.6}$$

detta *equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$.

Vale dunque la seguente proposizione:

Proposizione 7.2.6. *Due coniche sono* proiettivamente equivalenti *in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *(cioè esiste una proiettività che muta l'una nell'altra) se e solo se hanno lo stesso rango.*

Si rimanda al Problema 7.4 per un esempio di classificazione proiettiva di coniche non degeneri.

Nel piano proiettivo reale o nel piano proiettivo reale complessificato

Sono ammessi solo cambi di riferimento reali. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica reale non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (o del suo complessificato) e sia $[X_0, X_1, X_2]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 7.2.5.
Il caso delle coniche reali non degeneri si discute in modo analogo al caso complesso, distinguendo due possibili casi. I coefficienti a, b e c che compaiono nell'equazione 7.5 sono reali non nulli, quindi almeno due di essi hanno lo stesso segno; eventualmente moltiplicando l'equazione per -1 e/o scambiando l'ordine delle coordinate, è possibile assumere che a e b siano positivi. Se anche c è positivo, nel riferimento $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, $Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{c}}$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{7.7}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ è in tal caso priva di punti reali
Se, invece, $c < 0$, allora nel riferimento $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, $Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{|c|}}$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0, \tag{7.8}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ ha in tal caso punti reali.

Riassumendo, *esiste sempre un riferimento nel quale l'equazione di una conica non degenere reale, nel piano proiettivo reale o complessificato, assume una (ed una sola) delle forme seguenti*:
i) $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$: *conica non degenere senza punti reali.*
ii) $Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0$: *conica non degenere a punti reali.*

Per discutere se una conica reale non degenere sia a punti reali o ne sia priva, è utile il seguente lemma, che permette di fornire la risposta studiando i coefficienti della matrice associata alla conica in un qualsiasi riferimento:

Lemma 7.2.7. *Una conica reale non degenere è priva di punti reali se e solo se* $\begin{cases} a_{22}\, det\mathbf{A} > 0 \\ det\mathbf{A}_{00} > 0 \end{cases}$*, ove con* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *si denoti la matrice associata alla conica, con* $\mathbf{A}_{00}$ *la sottomatrice di* $\mathbf{A}$ *ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna.*

Dimostrazione. Se $a_{22} = 0$, la conica contiene il punto reale $[0, 0, 1]$. Possiamo dunque supporre $a_{22} \neq 0$ (e, analogamente, $a_{11} \neq 0$ e $a_{00} \neq 0$). La conica $\mathbf{\Gamma}$ è priva di punti reali se e solo se l'equazione in X_2:

$$a_{22}X_2^2 + 2(a_{12}X_1 + a_{02}X_0)X_2 + (a_{11}X_1^2 + 2a_{01}X_0X_1 + a_{00}X_0^2) = 0$$

non ha soluzione per qualunque scelta di X_0, X_1 reali non entrambi nulli. Ciò equivale a chiedere che sia sempre strettamente negativo il discriminante

$$\Delta = -4[A_{00}X_1^2 + 2A_{01}X_0X_1 + A_{11}X_0^2]$$

(ove con A_{ij} si denotia il determinante della sottomatrice $\mathbf{A}_{ij}$ di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima)). Poichè il discriminante Δ è a sua volta una equazione di secondo grado, chiedere che Δ sia sempre negativo equivale ad imporre che:

a) il coefficiente $-4A_{00}$ di X_1^2 deve essere negativo, cioè $A_{00} = det\mathbf{A}_{00} > 0$;

b) il discriminante $\Delta' = 4[A_{01}^2 - A_{00}A_{11}] = -4a_{22}det\mathbf{A}$ dell'equazione quadratica data da Δ deve essere strettamente negativo:

$$-a_{22}det\mathbf{A} < 0 \text{ cioè } a_{22}det\mathbf{A} > 0.$$

□

Si rimanda agli Esercizi Svolti 7.3-7.8 per esempi di classificazione proiettiva di coniche non degeneri nel caso reale.

In dimensione superiore In modo completamente analogo agli esempi visti, si mostra il seguente:

Teorema 7.2.8. *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva complessa di $\mathbb{P}^n$ di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_r^2 = 0$. Due quadriche sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Teorema 7.2.9. Caso reale: Teorema di Sylvester *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva reale di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (o del complessificato) di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_q^2 - X_{q+1}^2 - \ldots - X_r^2 = 0$ e gli interi q ed r sono univocamente individuati da $\mathbf{\Gamma}$.*

La determinazione della forma canonica individuata nel teorema di Sylvester può essere facilmente ottenuta utilizzando il seguente:

Proposizione 7.2.10. (Criterio di Sylvester) *Sia φ un prodotto scalare reale e sia $\mathbf{A}$ la matrice ad esso associata in un riferimento.*
a) φ è definito positivo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ sono tutti > 0.
b) φ è definito negativo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ di ordine dispari sono tutti < 0 e quelli di ordine pari sono tutti > 0.

Corollario 7.2.11. *Una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ha punti reali se e solo se il prodotto scalare ad essa associato non è definito.*

Esempio 7.2.12. Le quadriche proiettive reali non degeneri di $\mathbb{P}^3$ ammettono, in un opportuno sistema di riferimento, una ed una sola equazione della seguente forma:
i) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ non degenere senza punti reali.
ii) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^3 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti ellittici.
iii) $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti iperbolici.

7.3 Studio delle coniche affini.

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ si interpreti la retta $X_0 = 0$ come la retta impropria, riguardando $\mathbb{P}^2$ come completamento di un piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ complessificato. Sia fissato un riferimento in $\mathbb{P}^2$ indotto da un riferimento reale nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$. Mettiamo in evidenza che, per definizione, i cambi di riferimento ammessi in

$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ mandano punti reali in punti reali. Denotiamo con (x, y) le coordinate affini in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, con $[X_0, X_1, X_2]$ le coordinate in $\mathbb{P}^2$, con $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ ove $X_0 \neq 0$.

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica del piano proiettivo e sia $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ una sua equazione. La restrizione di tale equazione ai punti di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, è data da $f(1, x, y) = 0$, che definisce una equazione al più di secondo grado in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ che viene detta *equazione affine della conica* $\mathbf{\Gamma}$. L'equazione $f(1, x, y) = 0$ non è di secondo grado in x, y se e solo se X_0 è un fattore di $f(X_0, X_1, X_2)$, cioè se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile e la retta impropria è una sua componente. Se ciò non accade, diciamo che $\mathbf{\Gamma}$ è una conica propria.

Definizione 7.3.1. Una conica $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ si dice *propria* se non contiene la retta impropria π_∞.

Consideriamo ora una conica propria $\mathbf{\Gamma}$. Decomposta in parti omogenee, l'equazione affine si scrive come:

$$f(1, x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0 = 0\,, \tag{7.9}$$

con f_i omogenee di grado i. Osserviamo che tale equazione definisce una conica del piano euclideo. Viceversa, se $g(x, y)$ è una equazione di secondo grado che definisce una conica del piano affine, l'equazione omogeneizzata (cf. Definizione 5.9.9)

$$g_h(X_0, X_1, X_2) = X_0^2\, g(X_1/X_0, X_2/X_0)$$

definisce una conica di $\mathbb{P}^2$, detta *completamento proiettivo* della conica affine.

C'è dunque corrispondenza biunivoca tra le coniche proprie di $\mathbb{P}^2$ e le coniche affini. In base a tale corrispondenza, parleremo di matrice associata ad una conica affine e di rango di una conica affine riferendoci alla matrice $\mathbf{A}$ del suo completamento proiettivo: in tal caso, l'equazione della conica affine è data da $(1, x, y)\mathbf{A}(1, x, y)^t = 0$. Analogamente, è possibile definire la polare di un punto proprio $P(p_x, p_y)$ rispetto ad una conica affine: la polare è la retta di equazione $(1, p_x, p_y)\mathbf{A}(1, x, y)^t = 0$ purchè tale equazione definisca una retta affine (cioè purché la polare del punto $P[1, p_x, p_y]$ rispetto al completamento proiettivo non sia la retta impropria).

Spesso useremo il simbolo γ per indicare l'insieme dei punti propri di una conica propria $\mathbf{\Gamma}$. Talora si utilizzerà uno solo dei due simboli per descrivere sia la conica affine che il suo completamento proiettivo, per non appesantire la descrizione.

Nei Problemi 7.13-7.14 si discutono le caratteristiche dell'equazione affine, a seconda che i punti fondamentali del riferimento siano semplici o doppi.

Definizione 7.3.2. Nel piano affine reale (o reale complessificato), sia assegnata una conica reale γ. Un punto reale $P(p_x, p_y)$ si dice *interno* a γ se ogni retta reale per P interseca γ in due punti reali. Un punto reale $P(p_x, p_y)$ si dice *esterno* a γ se esiste una retta reale per P la cui intersezione con γ non contiene punti reali.

Nel Problema 7.33 si trova un esempio relativo a tale definizione e si discute il problema grafico di come determinare la polare di un punto interno ad una conica.

Osservazione 7.3.3. **Classificazione affine delle coniche degeneri.** Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica propria degenere di $\mathbb{P}^2$, cioè una conica propria con $\det \mathbf{A} = 0$. Si denoti con $\mathbf{A}_{00}$ la sottomatrice (simmetrica) di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna. Si osservi che $(X_1, X_2)\mathbf{A}_{00}(X_1, X_2)^t = 0$ definisce la quadrica nella retta impropria data dall'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria $X_0 = 0$. La natura di tale intersezione ed il rango di $\mathbf{\Gamma}$ sono invarianti per isomorfismi affini e permettono di riconoscere differenti tipologie per le coniche affini.

Esempio 7.3.4. **Caso** $rg(\mathbf{\Gamma}) = 2$. La conica propria $\gamma = \mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ è composta da due rette incidenti se $\det \mathbf{A}_{00} \neq 0$ e da due rette parallele e distinte se $\det \mathbf{A}_{00} = 0$.

Se l'equazione di γ è reale ed essa è composta da due rette affini incidenti, tali rette sono entrambe reali (e in tal caso $\det \mathbf{A}_{00} < 0$, i due punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono reali e distinti, e in un opportuno sistema di riferimento la conica γ può assumere l'equazione $x^2 - y^2 = 0$) oppure sono complesse coniugate (e in tal caso $\det \mathbf{A}_{00} > 0$, i due punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono complessi coniugati e in un opportuno sistema di riferimento la conica può assumere l'equazione $x^2 + y^2 = 0$).

Se l'equazione di γ è reale ed essa è composta da due rette distinte tra loro parallele, tali rette sono entrambe reali (e in tal caso hanno infiniti punti reali e in un opportuno sistema di riferimento la conica può assumere l'equazione $x^2 - 1 = 0$) oppure sono complesse coniugate (e in tal caso non hanno punti propri reali e in un opportuno sistema di riferimento la conica può assumere l'equazione $x^2 + 1 = 0$).

Si rimanda ai Problemi 7.23-7.24 per la discussione di alcuni esempi numerici.

Esempio 7.3.5. **Caso** $rg(\mathbf{\Gamma}) = 1$. La conica propria $\gamma = \mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ è composta da una retta contata due volte. In particolare, $\det \mathbf{A}_{00} = 0$ e tutti i punti di $\mathbf{\Gamma}$ sono singolari.

Se l'equazione di γ è reale, anche la retta che che la compone è reale. In un opportuno riferimento, si può fare in modo che essa coincida con l'asse delle y e la conica γ assuma l'equazione $x^2 = 0$.

Nel Problema 7.22 trovi la discussione di un esempio.

7.4 Classificazione affine delle coniche non degeneri

Nel piano affine sia fissata una conica non degenere γ e si denoti con il simbolo $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ il completamento proiettivo.

Definizione 7.4.1. Una retta r del piano affine si dice *asse di simmetria di* γ *per la direzione* δ se, per ogni retta s avente la direzione di δ, indicati con

B_1 e B_2 i punti di $s \cap \gamma$ (eventualmente coincidenti), si ha che il punto medio M tra B_1 e B_2 appartiene a r.

Definizione 7.4.2. Un punto $C \in \mathbb{E}$ si dice *centro di simmetria* (o più semplicemente *centro*) per γ se per ogni retta r per C non tangente a γ, indicati con B_1 e B_2 i punti di $r \cap \gamma$, si ha che C è il punto medio tra B_1 e B_2. In tal caso, si dice che B_1 è il simmetrico di B_2 rispetto a C.

Teorema 7.4.3. *Una conica propria non degenere ammette un centro di simmetria $C \in \mathbb{A}^n$ se e solo se il polo di π_∞ è un punto proprio, e in tal caso C è il polo di π_∞.*

Dimostrazione. Sia $\delta \in \pi_\infty$ una direzione, non appartenente a $\mathbf{\Gamma}$. In base alla Proposizione 6.17, se una retta r interseca γ in due punti propri B_1 e B_2 tra loro distinti, allora il punto medio M di B_1 e B_2 è esattamente il coniugato armonico (cioè il coniugato) di r_∞ rispetto alla quadrica $\mathbf{\Gamma} \cap r$. In particolare, il punto M deve appartenere alla polare di r_∞ rispetto a $\mathbf{\Gamma}$. Al variare della retta r, il punto M, per essere centro di simmetria, deve appartenere alle polari di ogni punto improprio (oltre ad essere un punto proprio). Dunque, il polo della retta impropria deve essere un punto proprio. □

Poiché il polo della retta impropria è un punto proprio se e solo se la conica interseca la retta impropria in due punti distinti, si introduce la seguente definizione:

Definizione 7.4.4. Una conica γ non degenere affine si dice *parabola* se il suo completamento è tangente alla retta impropria π_∞. La conica γ si dice *conica a centro* se l'intersezione tra il suo completamento e la retta impropria è formata da due punti distinti.

Osservazione 7.4.5. Come osservato nel paragrafo precedente, se $\mathbf{A}$ è la matrice della conica $\mathbf{\Gamma}$, la matrice della quadrica intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta impropria è data dalla sottomatrice $\mathbf{A}_{00}$. In particolare, *la conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$ è una parabola se e solo se* $\det \mathbf{A}_{00} = 0$*. La conica $\mathbf{\Gamma}$ è una conica a centro se e solo se* $\det \mathbf{A}_{00} \neq 0$.

Definizione 7.4.6. Un *diametro* di una conica non degenere γ è la retta polare di un punto improprio (cioè una direzione) non appartenente a $\mathbf{\Gamma}$.

Il centro di una conica a centro è dunque l'intersezione dei diametri.

Definizione 7.4.7. Due diametri di una conica a centro si dicono *coniugati* se ciascuno di essi è la polare del punto improprio dell'altro (cioè i loro punti impropri sono coniugati nell'involuzione indotta dalla conica sulla retta impropria)

Se γ è una parabola, tutti i diametri passano per il punto improprio di $\mathbf{\Gamma}$; in particolare, i diametri sono rette tra loro parallele, ciascuna delle quali interseca la parabola in un solo punto proprio.
Con la presente terminologia, la Proposizione 6.17 afferma che *ogni diametro è asse di simmetria rispetto alla direzione coniugata.*

Definizione 7.4.8. Gli *asintoti* di una conica propria non degenere sono le tangenti proprie di $\mathbf{\Gamma}$ nei suoi punti impropri.

Dunque una conica non degenere a centro ha due asintoti, che sono le polari dei suoi due punti impropri.

Osservazione 7.4.9. **Classificazione affine delle parabole** Sia γ una parabola. Ricordiamo che la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ che la rappresenta in un sistema di riferimento è di rango massimo, mentre $\mathbf{A}_{00}$ ha determinante nullo.

Se d è un diametro di γ, è possibile scegliere un sistema di riferimento nel quale il diametro sia l'asse x, l'origine sia l'intersezione di tale diametro con la parabola e la tangente alla parabola nell'origine sia l'asse y. In tale riferimento, la matrice della conica ha le seguenti caratteristiche:

i) $a_{00} = 0$ perché la conica passa per l'origine,
ii) $a_{11} = 0$ perché la conica passa per il punto improprio $[0, 1, 0]$ del suo diametro, l'asse x,
iii) $a_{12} = a_{21} = 0$ perché l'intersezione con la retta impropria è solo $[0, 1, 0]$,
iv) $a_{02} = a_{20} = 0$: infatti, la polare dell'origine ha equazione $a_{01}x+a_{02}y = 0$ e tale retta deve concidere con l'asse y.

In questo riferimento, la conica γ ha una equazione della forma $a_{22}y^2+2a_{01}x = 0$, con $a_{22} \neq 0$. Dividendo, l'equazione diventa:

$$y^2 + 2\,p\,x = 0.$$

Con un cambiamento di coordinate $x' = -2px$, $y' = y$, l'equazione della parabola diventa:

$$y^2 = x \tag{7.10}$$

detta l'*equazione canonica affine* della parabola.

In particolare, da un punto di vista affine, tutte le parabole sono uguali tra loro, nel senso che esiste sempre una trasformazione affine che muta l'una nell'altra.

Si rimanda al Problema 7.25 per un esempio in cui si determina esplicitamente un sistema di coordinate in cui una parabola è rappresentata dall'equazione canonica.

Osservazione 7.4.10. **Classificazione affine delle coniche a centro nel piano complesso** Una conica affine non degenere γ rappresentata dalla matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ in un sistema di riferimento è una *conica a centro* se e solo se la sottomatrice $\mathbf{A}_{00}$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna di $\mathbf{A}$ ha determinante non nullo.

In tal caso, le coordinate del centro di γ si ottengono come soluzione del sistema omogeneo la cui matrice si ottiene da $\mathbf{A}$ cancellando l'ultima riga: le equazioni così ottenute sono infatti le equazioni delle polari dei punti fondamentali del riferimento che appartengono a π_∞.

Data una conica a centro γ, si fissino due diametri coniugati d e d' e si scelga un riferimento nel quale essi siano gli assi. In particolare, l'origine è il centro della conica. Poichè ciascun diametro è asse di simmetria per la direzione dell'altro, se il punto $P(x, y)$ appartiene a γ, anche i punti $(x, -y)$ e $(-x, y)$ devono appartenere a γ. L'equazione di γ deve dunque essere invariante per la sostituzione $x \mapsto -x$ e per la sostituzione $y \mapsto -y$. Dunque $a_{12} = a_{01} = a_{02} = 0$. Analoga conclusione si ricava imponendo che

i) $a_{12} = a_{02} = 0$ perché la polare di $[0, 1, 0]$ deve essere l'asse x,
ii) $a_{12} = a_{01} = 0$ perché la polare di $[1, 0, 0]$ deve essere l'asse y.

Dividendo l'equazione per a_{00} (che è non nullo perché il centro non appartiene a γ), si ottiene una equazione della forma

$$ax^2 + by^2 + 1 = 0.$$

Nel piano complesso, una sostituzione $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{a}}$, $y \mapsto \frac{y}{\sqrt{b}}$ permette di far assumere, ad una qualsiasi conica a centro, l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \tag{7.11}$$

detta l'*equazione canonica affine della conica a centro nel piano complesso*.

Si rimanda al Problema svolto 7.25 per un esempio in cui si determina esplicitamente un sistema di coordinate in cui una conica a centro è rappresentata dall'equazione canonica (7.11).

Nel piano reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$, si può operare solo con la trasformazione $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{|a|}}$, $y \mapsto \frac{y}{\sqrt{|b|}}$. I casi possibili sono 3:

i) $a, b > 0$: l'equazione diventa $x^2 + y^2 + 1 = 0$ e la conica è detta *ellissi immaginaria* o *ellissi senza punti reali*;
ii) $a > 0, b < 0$ oppure $a < 0, b > 0$: l'equazione diventa $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (eventualmente ridenominando le variabili) e la conica è detta *iperbole*;
iii) $a, b < 0$: l'equazione diventa $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e la conica è detta *ellisse reale ellissi a punti reali*.

Le nomenclature introdotte sono motivate dalle definizioni elencate nel seguito. Osserviamo che l'inclusione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induce una inclusione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, perché due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$. In particolare, ogni riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: un tale riferimento è detto *riferimento reale*. Nel resto del paragrafo considereremo solo riferimenti reali di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Diremo che stiamo lavorando nel *piano proiettivo reale ampliato con i punti immaginari.*

I punti reali sono punti del piano che ammettono coordinate omogenee reali. Una conica è reale se ammette una equazione a coefficienti reali.

Definizione 7.4.11. Una conica reale non degenere a centro di matrice $\mathbf{A}$ si dice *ellisse* se i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono una coppia di punti complessi coniugati, cioè se $det\mathbf{A}_{00} > 0$.

Osservazione 7.4.12. Una ellisse ha punti reali se $a_{00} det\mathbf{A} < 0$, mentre è priva di punti reali se $a_{00} det\mathbf{A} > 0$. Gli asintoti di una ellisse, sono immaginari e coniugati e si incontrano nel centro, che è reale. Il luogo dei punti reali dell'ellisse non interseca la retta impropria.

Definizione 7.4.13. Una conica non degenere a centro di matrice $\mathbf{A}$ si dice *iperbole* se i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono una coppia di punti reali, cioè se $det\mathbf{A}_{00} < 0$.

Osservazione 7.4.14. Gli asintoti di una iperbole sono reali e si intersecano nel centro. Essi non intersecano la conica in punti propri (e sono le uniche rette proprie con tale proprietà).

Si rimanda ai Problemi 7.26-7.29 per esempi con coniche nel piano affine reale.

7.5 Classificazione metrica delle coniche reali

Nel presente paragrafo, si considera il completamento proiettivo del piano euclideo $\mathbb{E}^2$, assumendo di utilizzare solo cambi di riferimento proiettivi associati a cambi di riferimento isometrici (cioè che conservano il lunghezze e angoli) nel piano euclideo. Gli esempi 6.3.6 e 6.3.7 mostrano come sia possibile leggere, nel piano proiettivo, la nozione di ortogonalità tra rette, facendo ricorso alla polarità rispetto all'assoluto: due direzioni ortogonali nel piano euclideo corrispondono a due punti impropri del piano proiettivo tra loro coniugati rispetto all'assoluto.

Sia γ una conica non degenere reale nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di dimensione 2 e su denoti con $\mathbf{\Gamma}$ il suo completamento proiettivo. Una retta propria è un *diametro* per γ se il suo completamento proiettivo è un diametro per $\mathbf{\Gamma}$ (cioè è la polare π_δ di un punto δ in π_∞ che non appartenga a $\mathbf{\Gamma}$). Un diametro π_δ per γ è *asse di simmetria ortogonale* (o , più semplicemente, *asse di simmetria*) se e solo se è ortogonale a δ.

Sia assegnata una conica γ di equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0 \tag{7.12}$$

e matrice associata:

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Se γ è una parabola, esiste un unico asse di simmetria ortogonale; infatti, se Q è l'unico punto improprio di $\mathbf{\Gamma}$, tutti i diametri passano per Q; si denoti con Q' la direzione ortogonale a Q: il diametro polare di Q' è asse di simmetria ortogonale per γ. Il *vertice* di una parabola è l'intersezione della parabola con il suo asse di simmetria. In un sistema di riferimento in cui tale diametro sia l'asse x e l'asse y sia ortogonale all'asse x e passante per l'intersezione tra l'asse x e γ (cioè l'asse y sia la retta tangente a γ nel vertice), la conica ha equazione

$$y^2 = 2px;$$

orientando opportunamente gli assi, è possibile assumere che $p > 0$. Al variare di p, si ottengono infinite parabole che non possono essere trasformate l'una nell'altra con cambi di riferimento ortonormali.

Lemma 7.5.1. *Una parabola γ ha un unico asse di simmetria ed esso ha come direzione il punto improprio del completamento proiettivo di γ (corrispondente all'autospazio di autovalore nullo di $\mathbf{A}_{00}$). Se (7.12) è una equazione che rappresenta la parabola e $(a, b) \neq (0, 0)$, l'asse di γ è parallelo alla retta di equazione:*

$$a\,x + b\,y = 0.$$

Si rimanda al Problema 7.35 per un esempio di calcolo di asse di simmetria e vertice di una parabola.

Se γ è una conica a centro, ha equazione della forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{7.14}$$

e matrice associata:

$$\begin{pmatrix} f & d & e \\ b & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

Il punto $[0, \lambda, \mu]$ ha retta polare di equazione affine

$$(\lambda d + \mu e) + (\lambda a + \mu b)x + (\lambda b + \mu c)y = 0,$$

di direzione $[0, -\lambda b - \mu c, \lambda a + \mu b]$, detta *direzione coniugata* di $[0, \lambda, \mu]$. Le due direzioni sono ortogonali se:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 b - \lambda\mu c + \lambda\mu a + \mu^2 b &= 0 \\ \lambda^2 b + \lambda\mu(a - c) - \mu^2 b &= 0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

La condizione di ortogonalità (7.16) è identicamente nulla (cioè è sempre soddisfatta) se e solo se $b = 0$ e $a = c$, cioè la conica ha equazione $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed è una circonferenza di centro $C(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ e raggio $\rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

Se la condizione di ortogonalità (7.16) non è identicamente nulla, il discriminante $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$ è positivo ed esiste dunque una coppia di assi di simmetria ortogonale.

In un sistema di riferimento in cui gli assi di simmetria ortogonale siano gli assi coordinati, una conica a centro assume un'equazione della forma:

$$ax^2 + cy^2 + 1 = 0 \tag{7.17}$$

che può essere scritta, in modo unico, in uno delle seguenti forme, dette *equazioni canoniche metriche*:

a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$ e la conica è una *ellissi senza punti reali* o *ellisse immaginaria*;
b) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica è una *ellissi reale*;
c) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica è una *iperbole.*

Osservazione 7.5.2. $\mathbf{\Gamma}$ è una circonferenza se e solo se contiene i punti ciclici $[0, 1, i]$, $[0, 1, -i]$.

Osservazione 7.5.3. La condizione di ortogonalità (7.16) può essere riletta osservando che coincide con la condizione

$$det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda a + \mu b \\ \mu & \lambda b + \mu c \end{pmatrix} = 0$$

che impone la proporzionalità tra $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda a + \mu b \\ \lambda b + \mu c \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{00} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. Dunque ogni asse di simmetria è la polare di un autovettore di $\mathbf{A}_{00}$ ed ha come direzione un autovettore di $\mathbf{A}_{00}$.

Lemma 7.5.4. *Una conica a centro γ ha almeno una coppia di assi di simmetria tra loro ortogonali. Se (7.12) è una equazione che rappresenta la conica e la matrice $\mathbf{A}_{00}$ ha due autovalori distinti λ_1 e λ_2, allora gli assi di simmetria sono paralleli, rispettivamente, alle rette di equazione*

$$(a - \lambda_1)x + by = 0 \qquad e \qquad (a - \lambda_2)x + by = 0$$

(le cui direzioni corrispondono agli autospazi di $\mathbf{A}_{00}$ di autovalore λ_1 e λ_2).

Se (λ, μ) è un autovettore di $\mathbf{A}_{00}$, la retta polare di $[\lambda, \mu, 0]$, di equazione $(a\lambda + b\mu)x + (b\lambda + c\mu)y + (d\lambda + e\mu) = 0$.

Se la matrice $\mathbf{A}_{00}$ ha un unico autovalore, la conica a centro è una circonferenza e tutti i diametri sono assi di simmetria; in tal caso, basta prendere una coppia di diametri tra loro ortogonali.

Si rimanda al Problema 7.34 per un esempio di calcolo di assi di simmetria di coniche a centro.

7.6 Invarianti ed equazione canonica metrica di una conica reale

Sia $(1, x, y)\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ l'equazione di una conica reale $\mathbf{\Gamma}$. Si denoti con $\mathbf{A}_{00}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando l'ultima e l'ultima colonna; $\mathbf{A}_{00}$ è la matrice della intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria, nel riferimento associato. Con A_{00} o $|\mathbf{A}_{00}|$ si denota invece il determinante della matrice $\mathbf{A}_{00}$.

Osservazione 7.6.1. det $\mathbf{A}$, *det* $\mathbf{A}_{00}$ *e la traccia di* $\mathbf{A}_{00}$ *sono invarianti metrici di* $\mathbf{\Gamma}$, *cioè sono costanti per cambiamenti di riferimento ortonormale.* Infatti, le formule di cambiamento di riferimento ortogonale sono:

$$\begin{aligned} x &= m_{11}x' + m_{12}y' + d_1 \\ y &= m_{21}x' + m_{22}y' + d_2 \end{aligned} \tag{7.18}$$

che possono essere scritte come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & m_{11} & m_{12} \\ d_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ matrice ortogonale. Si osservi, in particolare, che la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & m_{11} & m_{12} \\ d_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a ± 1. Cambiando riferimento, la matrice associata alla conica è $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M}$ e, in particolare, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ hanno lo stesso determinante. Inoltre, la sottomatrice di $\mathbf{A}'$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna è $\mathbf{A}'_{00} = \tilde{\mathbf{M}}^t \mathbf{A}_{00} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{A}_{00} \tilde{\mathbf{M}}$ ($\tilde{\mathbf{M}}^t = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}$ perché $\tilde{\mathbf{M}}$ è ortogonale). La tesi segue, osservando che, allora, $\mathbf{A}'_{00}$ e $\mathbf{A}_{00}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, i cui coefficienti sono il determinante e la traccia della matrice.

Esempio 7.6.2. Ogni parabola $\mathbf{\Gamma}$ ammette una equazione della forma $a\,y^2 = 2px$, o anche

$$y^2 = 2(p/a)x$$

detta *equazione canonica metrica*; i coefficienti a e p possono essere determinati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} det\,\mathbf{A} = det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & a & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} &= -ap^2 \\ det\,\mathbf{A}_{00} = det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} &= 0 \\ tr\,\mathbf{A}_{00} &= a. \end{aligned}$$

Si rimanda al Problema 7.32 per un esempio numerico.

Esempio 7.6.3. Ogni conica a centro $\mathbf{\Gamma}$ ammette una equazione della forma $ax^2 + by^2 + c = 0$. Osservando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\ det\,\mathbf{A} &= a\,b\,c \\ det\,\mathbf{A}_{00} &= a\,b \\ tr\,\mathbf{A}_{00} &= a + b \end{aligned}$$

si vede facilmente che a e b *sono gli autovalori di* $\mathbf{A}_{00}$ e $c = \frac{det\mathbf{A}}{det\mathbf{A}_{00}}$.

Osserviamo che è sempre possibile supporre che $|a| < |b|$. L'equazione

$$(a/c)x^2 + (b/c)y^2 + 1 = 0$$

è detta l'*equazione canonica metrica della conica a centro*.

Discutiamo ora quali casi si presentano, a partire dalla classificazione affine.

i) **Ellisse immaginaria**: $0 < (a/c) < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

ii) **Ellisse a punti reali**: $(a/c) \leq (b/c) < 0$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = -c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

Osserviamo che l'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$: Il valore α è detto *semiasse maggiore*. L'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $x = 0$ è data dai punti $(0, \beta)$ e $(0, -\beta)$: Il val ore β è detto *semiasse minore*. Nel primo quadrante, i punti reali di $\mathbf{\Gamma}$ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ (per $0 \leq x \leq \alpha$): maggiore è il rapporto β/α e "più schiacciata" risulterà l'ellisse.

Se $\alpha = \beta$, la conica è una circonferenza.

iii) **Iperbole**: $(a/c) < 0 < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha > \beta.$$

L'asse x è detto *asse trasverso*, mentre l'asse y (che non interseca l'iperbole in punti reali) è detto *asse non trasverso*.

Osserviamo che l'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$. L'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $x = x_0$ non ha punti reali per $x_0 < \alpha$. Nel primo quadrante, i punti reali di $\mathbf{\Gamma}$ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ (per $x \geq \alpha$). Gli asintoti hanno equazione $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$. Al crescere dell'ascissa, tende a zero la distanza tra i punti nel primo quadrante aventi la stessa ascissa e appartenenti all'iperbole o all'asintoto.

Si rimanda ai Problemi 7.30-7.31 per esempi relativi alla classificazione metrica.

Definizione 7.6.4. Un *fuoco* F di una conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$ è un punto proprio tale che le tangenti a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da F sono rette isotrope.

Se F è un fuoco per $\mathbf{\Gamma}$, l'involuzione indotta sul fascio di rette per F dall'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria coincide con l'involuzione indotta dall'assoluto.

Un fuoco è intersezione di due tangenti proprie a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da punti ciclici. Dunque, una conica non degenere ha al massimo 4 fuochi.

Osservazione 7.6.5. Una parabola ha un unico fuoco. In un riferimento in cui la parabola ha equazione canonica metrica $y^2 = 2px$, il fuoco ha coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$. La sua polare, la retta di equazione $x = -\frac{p}{2}$, è detta la *direttrice* della parabola ed è indicata con la lettera d. Si dimostra facilmente che *la parabola $y^2 = 2px$ è il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d.* In particolare, p è la distanza del fuoco dalla direttrice della parabola.

Osservazione 7.6.6. Una ellisse a punti reali (che non sia una circonferenza) ha due fuochi reali. In un riferimento in cui l'ellisse assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse maggiore. I punti reali della ellisse sono caratterizzati dalla proprietà che la somma delle distanze da due fuochi reali sia costante.

Osservazione 7.6.7. Una iperbole ha due fuochi reali e due fuochi immaginari coniugati. In un riferimento in cui l'iperbole assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse trasverso, mentre i rimanenti fuochi $(0, \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ appartengono all'asse non trasverso.

Esercizi svolti

Classificazione proiettiva delle coniche

Nel piano proiettivo complesso, sia fissato un sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. I cambi di riferimento permessi sono tutti e soli i cambi di riferimenti proiettivi.

Problema 7.1. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0^2 - 4X_0X_2 = 0$*. Mostra che i punti fondamentali* $U_1[0,1,0]$ *e* $U_2[0,0,1]$ *appartengono alla conica, e discuti se essi sono punti semplici o doppi per* $\mathbf{\Gamma}$*.*

Soluzione. I punti U_1 e U_2 appartengono alla conica, perchè nell'equazione non compaiono i termini in X_1^2 e X_2^2 rispettivamente. Il punto U_1 è un punto doppio, perché nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ non compaiono termini in X_1. Il punto U_2 è un punto semplice per $\mathbf{\Gamma}$, perché nell'equazione della conica compare un termine in X_2.

Problema 7.2. Classificazione proiettiva di una conica di rango 1 *Considera la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:*

$$25X_0^2 - 20X_0X_1 + 10X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

a) Determina l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$*.*
b) Determina un riferimento proiettivo nel quale la conica $\mathbf{\Gamma}$ *assume l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 5 \\ -10 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ della conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, dunque la corrispondente equazione canonica proiettiva è $Y_0^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ è composta da una retta r, con molteplicità 2. L'equazione della sua componente (che coincide con il luogo dei punti doppi) è $5X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$, come si ricava facilmente da una riga della matrice $\mathbf{A}$. La retta r è la retta che passa per i punti $B_1[2,5,0]$ e $B_2[1,0,-5]$. In un qualsiasi sistema di riferimento con coordinate $[Y_0, Y_1, Y_2]$ in cui i punti B_1 e B_2 assumono coordinate $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, la retta r ha equazione $Y_0 = 0$ e quindi la conica $\mathbf{\Gamma}$ è in forma canonica. Ad esempio, il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

soddisfa le richieste. Il corrispondente riferimento è formato dai punti $[1,0,0]$, B_1, B_2 come punti fondamentali e $U[4,5,-5]$ come punto unità.

Problema 7.3. Classificazione proiettiva di una conica di rango 2 *Considera la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:* $2X_0^2 + 3X_0X_1 + 2X_0X_2 + 3X_1X_2 = 0$
a) Determina l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$*.*
b) Determina un riferimento proiettivo nel quale la conica $\mathbf{\Gamma}$ *assume l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ della conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 2, dunque l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio, il punto $Q[3, -2, -3]$.
Primo modo Il punto $[1, 0, 0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché l'elemento di prima riga e prima colonna di $\mathbf{A}$ (che coincide con $(1, 0, 0)\mathbf{A}(1, 0, 0)^t$ è $2 \neq 0$; la polare di $[1, 0, 0]$, di equazione $(1, 0, 0)\mathbf{AX} = 4X_0 + 3X_1 + 2X_2 = 0$, contiene il punto $[0, 2, -3]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0, 2, -3)\mathbf{A}(0, 2, -3)^t = -18 \neq 0$.

Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}',$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $2X'^2_0 - 18X'^2_1 = 0$.
Un cambio cercato è dunque

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}i & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

ottenuto dal precedente moltiplicando le colonne per un opportuno coefficiente, in modo tale da rendere uguali a 1 i coefficienti dei termini dell'equazione.
Secondo modo La conica $\mathbf{\Gamma}$ interseca la retta $X_0 = 0$ (che non passa per Q) nei punti $B_1[0, 1, 0]$ e $B_2[0, 0, 1]$. In un qualsiasi sistema di riferimento con coordinate $[Y_1, Y_2, Y_3]$ in cui il punto doppio Q assume coordinate $[0, 0, 1]$, l'equazione della conica $\mathbf{\Gamma}$ diventa della forma $aY_0^2 + 2bY_0Y_1 + cY_1^2 = 0$. Se chiediamo anche che, nel nuovo sistema, i punti B_1, B_2 abbiano coordinate $[1, i, 0]$, $[1, -i, 0]$ rispettivamente, si ottiene che $a + 2bi - c = 0$ e $a - 2bi - c = 0$, dunque $a = c$ e $b = 0$ e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ assume la forma $aY_0^2 + aY_1^2 = 0$, divenendo l'equazione canonica proiettiva. Il cambio di coordinate cercato avrà equazione

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u & 1 & 1 \\ v & i & -i \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \text{ con } \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 & 1 \\ v & i & -i \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, il cambio di coordinate

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 1 \\ -i/3 & i & -i \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/2 & -i/2 & -2 \\ 1/2 & i/2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

soddisfa le richieste. Il corrispondente riferimento è formato dai punti $[0, 1, 1]$, $[0, -1, 1]$, Q come punti fondamentali e $U[3, -(3 + i)/2, (-5 + i)/2]$ come punto unità; tali punti si ricavano assegnando a $\mathbf{Y}$ le coordinate dei punti fondamentali e ricavando le originarie coordinate dei punti.

Problema 7.4. Classificazione proiettiva di una conica di rango 3 *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$.
a) Determina l'equazione canonica proiettiva di $\mathbf{\Gamma}$.

b) Determina un triangolo autopolare per $\mathbf{\Gamma}$.
c) Determina un cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

della conica ha rango 3. Dunque l'equazione canonica proiettiva della conica è $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$.
b) Il punto $S[1,0,0]$ non appartiene alla conica $\mathbf{\Gamma}$. La sua polare s ha equazione $(1\ 0\ 0)\mathbf{AX} = 2X_0 - (1/2)X_2 = 0$ cioè $4X_0 - X_2 = 0$. Su s considero il punto $T[0,1,0]$ che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$. La polare t di T è la retta di equazione $(0\ 1\ 0)\mathbf{AX} = X_1 + X_2 = 0$. L'intersezione tra t e s è il punto $V[1,-4,4]$, la cui polare v ha equazione $(1\ \ -4\ \ 4)\mathbf{AX} = -8\,X_2 = 0$ cioè $X_2 = 0$ (come doveva, perché v coincide con la retta per S e T). Le rette s, t, v formano un triangolo autopolare.
c) Assumendo S, T, V come punti fondamentali del riferimento, la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ diventa diagonale. Scegliendo ad esempio il cambio $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{X}}$, con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, matrice di $\mathbf{\Gamma}$ diventa

$$\tilde{\mathbf{M}}^t\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

ove i termini fuori dalla diagonale si annullano perchè ciascuno dei 3 punti appartiene alle polari degli altri due, mentre i termini sulla diagonale si ricavano calcolando

$$b_1 = (1\ 0\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,\ b_2 = (0\ 1\ 0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,\ b_3 = (1\ -4\ \ 4)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -32.$$

Per ottenere il cambio di coordinate cercato $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$, occorre dividere la colonna j-ma di $\tilde{\mathbf{M}}$ per una radice quadrata di b_j $(j = 1,2,3)$, in modo che il corrispondente valore sulla diagonale diventi 1: ad esempio, si può dividere la prima colonna per $\sqrt{2}$ e la terza per $i\sqrt{32}$, lasciando immutata la seconda colonna. Si ricava

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 1 & -4/(i\sqrt{32}) \\ 0 & 0 & 4/(i\sqrt{32}) \end{pmatrix}$$

Coniche nel piano proiettivo complessificto

L'inclusione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induce una inclusione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, perché due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$. In particolare, ogni riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: un tale riferimento è detto reale. Nel seguente gruppo di esercizi consideriamo **solo riferimenti reali** di $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Problema 7.5. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 - 2X_1X_2 = 0$ *e siano* r *e* s *le rette di equazioni* $r : X_0 - 2X_1 - 2X_2 = 0$ *e* $s : X_0 - X_1 - X_2 = 0$ *rispettivamente.*
a) Determina i punti di intersezione intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ *con le rette* r*,* s *rispettivamente.*
b) Determina, nel fascio di rette generato da r *e* s*, le rette tangenti a* $\mathbf{\Gamma}$*.*

Soluzione. a) L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, X_0 = 2X_1+2X_2$, equivalente a $X_2^2 + 2X_1X_2 + 5X_1^2 = 0, X_0 = 2X_1 + 2X_2$. Risolvendo il sistema (il polinomio quadratico ha discriminante negativo), si ricava che tale intersezione è formata da due punti complessi coniugati, di coordinate $[-4+4i, 1, -3+2i]$, $[-4-4i, 1, -3-2i]$ rispettivamente.

Analogamente, l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e s è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, X_0 = -X_1-X_2$, equivalente a $X_2^2 + 4X_1X_2 + 3X_1^2 = 0, X_0 = -X_1 - X_2$. Risolvendo il sistema (il polinomio quadratico ha discriminante positivo), si ricava che tale intersezione è formata da due punti complessi coniugati, di coordinate $[0, 1, -1]$, $[2/3, 1, -1/3]$ rispettivamente.
b) Poichè, in base a quanto visto nel punto a), la retta s non è tangente a $\mathbf{\Gamma}$, per risolvere l'esercizio è possibile parametrizzare il fascio di rette generato da r e s mediante l'equazione:

$$X_0 - 2X_1 - 2X_2 + t(X_0 - X_1 - X_2) = (1+t)X_0 - (2+t)X_1 - (2+t)X_2 = 0, \quad t \in \mathbb{C}$$

(cioè escludendo la retta s). L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta del fascio corrispondente al parametro t è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema: $X_1^2+X_2^2+2X_0X_1-2X_1X_2 = 0, (1+t)X_0-(2+t)X_1-(2+t)X_2 = 0$; per $t \neq -1$, il sistema è equivalente a $X_2^2 + \frac{6+4t}{1+t}X_1X_2 + \frac{5+3t}{1+t}X_1^2 = 0, X_0 = \frac{2+t}{1+t}(X_0+X_2)$. Sempre assumendo $t \neq -1$, l'annullarsi del discriminante del polinomio quadratico impone la condizione: $4t^2 + 16t + 16 = 4(t+2)^2 = 0$, cioè $t = -2$, corrispondente alla retta $X_0 = 0$ (che risulta quindi tangente). La retta corrispondente al valore $t = -1$ ha equazione $X_2 + X_3 = 0$ interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti, e dunque non è tangente.

Problema 7.6. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 1 *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $X_0^2 + 4X_2^2 + 4X_1X_2 = 0$.
a) Determina l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$*.*
b) Determina un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) L'esercizio è perfettamente analogo all'esercizio 7.1 svolto nel caso del piano proiettivo senza restrizione ai possibili cambi di riferimento. Infatti, la conica $\mathbf{\Gamma}$ è reale di rango 1, e dunque è una retta reale con molteplicità 2 e il cambio di coordinate proposto nell'esercizio 7.1 per metterla in forma canonica proiettiva era un cambio reale (purché si scelgano due punti reali sulla conica).
La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, e dunque è una retta doppia e la sua equazione canonica è $Y_0^2 = 0$.
b) L'equazione della componente di $\mathbf{\Gamma}$ si ricava dalla prima riga della matrice, ed è $X_0 + 2X_1 = 0$: due punti doppi distinti di $\mathbf{\Gamma}$ sono $B_1[0, 1, 0]$, $B_2[2, 0, -1]$. In un qualunque sistema di cui $[1, 0, 0]$, B_1, B_2 siano i punti fondamentali (con libertà di

scegliere il punto unità) la conica è in forma canonica. Ad esempio, si può scegliere il cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 7.7. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con un unico punto reale *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$X_0^2 + 5X_1^2 + X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_2X_2 = 0.$$

a) Determina l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determina un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$ *che muti l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *nell'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ della conica ha rango 2 e quindi la conica ha per componenti due rette distinte, che possono essere complesse coniugate, oppure entrambe reali. L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta $X_2 = 0$ è una quadrica di equazione $X_0^2 + 5X_1^2 4X_0X_1 = 0$, $X_2 = 0$, formata da due punti complessi coniugati: in particolare, tale retta non passa per l'unico punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ e i due punti di intersezione appartengono a due componenti distinte di $\mathbf{\Gamma}$. Le componenti di $\mathbf{\Gamma}$ non possono dunque essere reali, perchè ogni retta reale contiene il coniugato di ogni suo punto immaginario. La conica $\mathbf{\Gamma}$ è dunque composta da due rette reali e la sua equazione canonica proiettiva reale è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio Q, le cui coordinate sono soluzione di $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Risolvendo il sistema, si trova $Q[-2, 1, -1]$. Il punto $[1, 0, 0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché

$$(1, 0, 0)\mathbf{A}(1, 0, 0)^t = 1 \neq 0;$$

la sua polare, di equazione $X_0 + 2X_1 = 0$, contiene il punto $[0, 0, 1]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0, 0, 1)\mathbf{A}(0, 0, 1)^t = 1 \neq 0$.
Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

Problema 7.8. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con infiniti punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:* $2X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.
a) Determina l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale.*
b) Determina un cambio (reale) di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$ *attraverso il quale la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *assuma l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La conica ha come componenti le due rette reali e distinte di equazioni $r_1 : X_1 = 0$ e $r_2 : X_0 + X_2 = 0$. In particolare, ha rango due ed ha infiniti punti reali: dunque la sua equazione canonica proiettiva è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.
b) Nel riferimento cercato, le componenti di $\mathbf{\Gamma}$ devono assumere le equazioni $Y_0 - Y_1 = 0$ e $Y_0 + Y_1 = 0$ rispettivamente. Nel riferimento originario, il punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ è $Q[1, 0, -1]$, ottenuto intersecando le componenti di $\mathbf{\Gamma}$; la componente r_1 è la retta per Q e per $P_1[1, 0, 0]$, mentre r_2 è la retta per Q e per $P_2[0, 1, 0]$. La

conica $\mathbf{\Gamma}$ è in forma canonica in un qualsiasi riferimento in cui Q abbia coordinate $[0,0,1]$, P_1 abbia coordinate $[1,1,0]$ e P_2 abbia coordinate $[1,-1,0]$. Ad esempio, è possibile scegliere il cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 7.9. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 2 con infiniti punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + 4X_2^2 + 2X_0X_1 + 6X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0.$$

a) Determina l'equazione canonica proiettiva (reale) di $\mathbf{\Gamma}$.
b) Determina un cambio di coordinate reali $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite che muti l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *nell'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ della conica ha rango 2 e quindi la conica ha per componenti due rette distinte, che possono essere complesse coniugate, oppure entrambe reali. Se le rette sono complesse coniugate, il loro unico punto reale è il punto doppio. Poichè $\mathbf{\Gamma}$ contiene il punto reale $[0,1,0]$ che è distinto dal punto doppio, la conica è composta da due rette reali e la sua equazione canonica proiettiva reale è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio Q, le cui coordinate sono soluzione di $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Risolvendo il sistema, si trova $Q[1,1,-1]$.
Il punto $[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché

$$(1,0,0)\mathbf{A}(1,0,0)^t = 2 \neq 0;$$

la sua polare, di equazione $2X_0 + X_1 + 3X_2 = 0$, contiene il punto $[0,3,-1]$, che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ perché $(0,3,-1)\mathbf{A}(0,3,-1)^t = -2 \neq 0$.
Il cambio di coordinate

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}',$$

muta l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nell'equazione $2{X'}_0^2 - 2{X'}_1^2 = 0$.
Un cambio cercato è dunque

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}i & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Problema 7.10. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 3 a punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 6X_1X_2 = 0.$$

Determina l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale e un cambio (reale) di coordinate* $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *tramite il quale l'equazione di* $\mathbf{\Gamma}$ *diventi l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. **Primo modo** La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Osserviamo che il punto $S[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$, e dunque può essere utilizzato come vertice di un triangolo autopolare. La polare di S è la retta s di equazione $(1\,0\,0)\mathbf{AX} = 2X_0+X_1+X_2 = 0$; si osservi che $(1\,0\,0)\mathbf{A}(1\,0\,0)^t = 2$ ha segno positivo. Sulla retta s, si consideri un punto T: ad esempio, si può scegliere $T[0,1,-1]$. La polare di T è la retta t di equazione $(0\,1\,-1)\mathbf{AX} = -2X_1 + 2X_2 = 0$; si osservi che $(0\,1\,-1)\mathbf{A}(0\,1\,-1)^t = -4$ è non nullo (e dunque $T \notin \mathbf{\Gamma}$) e ha segno negativo. Si ponga V il punto di intersezione tra s e t: svolgendo i conti, si determinano le coordinate $V[0,1,1]$ che verificano la relazione $(0\,1\,1)\mathbf{A}(0\,1\,1)^t = 8 > 0$. L'equazione canonica di $\mathbf{\Gamma}$ è quindi $Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0$ e la conica è a punti reali.

Tramite il cambio $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{Y}}$, con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, i vertici del triangolo autopolare diventano punti fondamentali del rivestimento e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ diventa $\tilde{\mathbf{Y}}^t\, \tilde{\mathbf{M}}^t\, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}\, \tilde{\mathbf{Y}} = 2\tilde{Y}_0^2 + 8\tilde{Y}_1^2 - 4\tilde{Y}_2^2 = 0$. Basta, quindi, scegliere $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Secondo modo Dopo aver controllato che $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 3, per determinarne l'equazione canonica proiettiva si può applicare il lemma 7.2.7, osservando che $a_{11}det\mathbf{A} < 0$, e quindi la conica ha punti reali.

Problema 7.11. Classificazione proiettiva reale di una conica di rango 3 senza punti reali *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *la conica di equazione:*

$$2X_0^2 + 4X_1^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 - 2X_1X_2 = 0.$$

a) Determina l'equazione proiettiva canonica di $\mathbf{\Gamma}$ *come conica reale.*
b) Determina un cambio (reale) di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{MY}$ *attraverso il quale la conica* $\mathbf{\Gamma}$ *assuma l'equazione canonica proiettiva.*

Soluzione. **Primo modo** La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Osserviamo che il punto $S[1,0,0]$ non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$, e dunque può essere utilizzato come vertice di un triangolo autopolare. La polare di S è la retta s di equazione $(1\,0\,0)\mathbf{AX} = 2X_0 - X_2 = 0$; si osservi che $(1\,0\,0)\mathbf{A}(1\,0\,0)^t = 2$ ha segno positivo. Sulla retta s, si consideri un punto T: ad esempio, si può scegliere $T[1,2,0]$. La polare di T è la retta t di equazione $(1\,2\,0)\mathbf{AX} = 2X_0 + 4X_1 - 3X_2 = 0$; si osservi che $(1\,2\,0)\mathbf{A}(1\,2\,0)^t = 6$ è non nullo (e dunque $T \notin \mathbf{\Gamma}$) e ha segno positivo. Si ponga V il punto di intersezione tra s e t: svolgendo i conti, si determinano le coordinate $V[1,1,2]$ che verificano la relazione $(1\,1\,2)\mathbf{A}(1\,1\,2)^t = 2 > 0$. L'equazione canonica di $\mathbf{\Gamma}$ è quindi $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$ e la conica è senza punti reali.

Tramite il cambio $\mathbf{X} = \mathbf{M}'\mathbf{Y}'$, con $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, i vertici del triangolo autopolare diventano punti fondamentali del rivestimento e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ diventa $\mathbf{Y}'^t\ \mathbf{M}'^t\ \mathbf{A}\mathbf{M}'\ \mathbf{Y}' = 2Y'^2_0 + 6Y'^2_1 + 2Y'^2_2 = 0$. Basta, quindi, scegliere $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Secondo modo Dopo aver controllato che $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 3, per determinarne l'equazione canonica proiettiva si può applicare il lemma 7.2.7, osservando che det $\mathbf{A}_{00} > 0$ e $a_{22} det \mathbf{A} > 0$, e quindi la conica non ha punti reali.

Coniche affini

Nel piano affine (reale o complesso) sia fissato un sitema di riferimento con coordinate (x, y). Si consideri il completamento proiettivo con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ tali che $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ ove $X_0 \neq 0$. Negli esercizi successivi il piano proiettivo verrà pensato come il completamento proiettivo del piano affine.

Problema 7.12. *Determina l'equazione omogenea del completamento proiettivo* $\mathbf{\Gamma}$ *della conica affine* γ *di equazione:* $2x^2 - 3y^2 + 5x - 2y + 3 = 0$.

Soluzione. L'equazione cercata di $\mathbf{\Gamma}$ è $2X_1^2 - 3X_2^2 + 5X_1X_0 - 2X_2X_0 + 3X_0^2 = 0$, ottenuta sostituendo x con X_1, y con X_2 e rendendo omogenea di secondo grado l'equazione tramite la variabile X_0.

Problema 7.13. *Determina l'equazione affine del luogo dei punti propri della conica proiettiva* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione omogenea:* $2X_1^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_0 + 4X_2X_0 = 0$.

Soluzione. Un punto proprio ha coordinate omogenee della forma $[1, x, y]$, ove (x, y) siano le corrispondenti coordinate affini. I punti propri di $\mathbf{\Gamma}$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione (nelle variabili (x, y)) ottenuta dall'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ sostituendo X_1 con x, X_2 con y e valutando X_0 in 1. L'equazione del luogo cercato è dunque $2x + 1 + 2x\,y + 2x\, + 4y = 0$: il luogo dei punti propri di $\mathbf{\Gamma}$ è una conica affine e $\mathbf{\Gamma}$ è una conica propria.

Problema 7.14. *Discuti se le seguenti coniche proiettive sono proprie:*
a) $\mathbf{\Gamma}_1$ *di equazione:* $X_2X_0 + X_0^2 + 3X_1X_0 = 0$;
b) $\mathbf{\Gamma}_2$ *di equazione:* $X_1^2 + 3X_2^2 + 5X_0^2 + 2X_2X_0 = 0$.

Soluzione. a) In base alla Definizione 7.3.1, la conica $\mathbf{\Gamma}_1$ non è propria perché la sua equazione è divisibile per X_0.
b) La conica $\mathbf{\Gamma}_2$ è propria perché la sua equazione non è divisibile per X_0, perché contiene termini in cui X_0 non compare.

Problema 7.15. Molteplicità dei punti fondamentali del riferimento. *Decomponi in parti omogenee l'equazione affine di una conica affine* γ*:*

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0 = 0\,, \tag{7.20}$$

con f_i *omogenee di grado* i. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *il completamento proiettivo di* γ. *Prova che:*

a) γ *passa per l'origine* $O \Leftrightarrow f_0 = 0$.
b) γ *è singolare nell'origine* $O \Leftrightarrow f_1 = f_0 = 0$.

c) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *passa per* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *compare al più linearmente nell'equazione* $\Leftrightarrow$ *il coefficiente di* x^2 *in* f_2 *è nullo.*
d) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *non compare in* f.
e) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *passa per* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *compare al più linearmente nell'equazione* $\Leftrightarrow$ *il coefficiente di* y^2 *in* f_2 *è nullo.*
f) Il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *non compare in* f.

Soluzione. Si applica l'osservazione (7.2.1).

Problema 7.16. Punti semplici nei punti fondamentali. *Decomponi in parti omogenee l'equazione affine di una conica affine* γ*:*

$$f(x,y) = f_2(x,y) + f_1(x,y) + f_0 = 0\,, \tag{7.21}$$

con f_i *omogenee di grado* i. *Sia* $\mathbf{\Gamma}$ *il completamento proiettivo di* γ. *Prova che:*

a) L'origine O *è semplice per* $\gamma \Leftrightarrow f_0 = 0$ *ma* f_1 *non è identicamente nullo. In tal caso, l'equazione della retta tangente a* γ *in* O *è* $f_1 = 0$.
b) X_∞ *è semplice per il completamento* $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *compare linearmente, ma non con grado 2, in* f. *In tal caso, l'equazione della retta tangente a* $\mathbf{\Gamma}$ *in* X_∞ *è il coefficiente di* x *in* f.
c) Il completamento $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $X_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* x *non compare in* f.
d) Y_∞ *è semplice per il completamento* $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *compare linearmente, ma non con grado 2, in* f. *In tal caso, l'equazione della retta tangente a* $\mathbf{\Gamma}$ *in* Y_∞ *è il coefficiente di* y *in* f.
e) Il completamento $\mathbf{\Gamma}$ *è singolare in* $Y_\infty \Leftrightarrow$ *la coordinata* y *non compare in* f.

Soluzione. Si applica l'osservazione (7.2.1).

Problema 7.17. *Sia* γ *una conica affine di equazione:*

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

e sia $P(p_x, p_y)$ *un punto del piano che non sia un punto doppio per* γ. *Se la conica* γ *è a centro, si richiede che* P *non sia il centro di* γ. *Determina l'equazione affine della polare di* P *rispetto al completamento proiettivo* $\mathbf{\Gamma}$ *di* γ.

Soluzione. La matrice di γ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$. La polare di P rispetto a γ ha equazione affine

$$(1\ p_x\ p_y)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (p_x a + p_y c + d)\,x + (p_x c + p_y b + e)\,y + (p_x d + p_y e + f) = 0.$$

Problema 7.18. *Sia* γ *la conica affine il cui completamento proiettivo sia la conica proiettiva* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:*

$$2X_1^2 - X_2^2 + X_0^2 + 2X_1X_2 + 4X_2X_0 = 0.$$

a) Determina i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ *e dedurre che la conica è a centro.*
b) Determina il centro di $\mathbf{\Gamma}$.

Soluzione. a) La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La conica ha due punti impropri distinti, perché $\det \mathbf{A}_{00} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. Tali punti si ottengono imponendo $X_0 = 0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ e sono quindi dati da $X_0 = 0$, $2X_1^2 - X_2^2 + 2X_1X_2 = 0$. Si ricava che i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono i punti $B_1[0, -1+\sqrt{3}, 2]$ e $B_2[0, -1-\sqrt{3}, 2]$. Osservando che la conica $\mathbf{\Gamma}$ è non degenere e ha due punti impropri distinti, si conclude che $\mathbf{\Gamma}$ è una conica a centro.
b) **Primo modo** Il centro è il punto di intersezione delle polari di una qualsiasi coppia di punti impropri distinti: ad esempio, basta intersecare le polari dei punti impropri $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$. La polare di $[0, 1, 0]$ è $2X_1 + X_2 = 0$ (è l'equazione corrispondente alla seconda riga di $\mathbf{A}$) e la polare di $[0, 0, 1]$ è $X_1 - X_2 + 2X_0 = 0$ (corrispondente alla terza riga di $\mathbf{A}$). Intersecando le due polari si ricavano le coordinate del centro $C[-3, 2, -4]$; le coordinate affini del centro è $C(-2/3, -4/3)$.
Secondo modo Poiché nel punto a) sono stati calcolati i punti impropri B_1 e B_2 di $\mathbf{\Gamma}$, è possibile calcolare le coordinate del centro come punto di intersezione delle polari di B_1 e B_2. La polare di B_1 ha equazione $(2\sqrt{3} + 2)X_1 + (-3 + \sqrt{3})X_2 + 4X_0 = 0$, mentre la polare di B_2 ha equazione $(-2\sqrt{3} + 2)X_1 + (-3 - \sqrt{3})X_2 + 4X_0 = 0$. Intersecando le due polari si ricavano le coordinate del centro $C[-3, 2, -4]$, le cui coordinate affini sono $C(-2/3, -4/3)$.

Problema 7.19. Centro di una conica a centro$\mathbf{\Gamma}$ *a) Determina il centro della conica affine a centro* $\mathbf{\Gamma}$ *di equazione:* $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$.
b) Usa il metodo utilizzato nel punto precedente per calcolare le coordinate affini del centro della conica di equazione $x^2 + 3y^2 - 2xy + 4y + 2 = 0$.

Soluzione. a) La matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$, ove $\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$. Il centro della conica è il polo della retta all'infinito e si ottiene intersecando le polari delle direzioni x_∞ e y_∞ degli assi coordinati. La polare di x_∞ è la retta $(0\ 1\ 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = ax + cy + d = 0$, mentre la polare di y_∞ è la retta $(0\ 0\ 1)\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = cx + by + e = 0$.

b) La matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, che ha rango 3. Poichè $\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$, la conica $\mathbf{\Gamma}$ è una conica a centro. Il centro della conica è il polo della retta all'infinito e si ottiene intersecando le polari delle direzioni x_∞ e y_∞ degli assi coordinati. La polare di x_∞ è la retta $(0\ 1\ 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = x - y = 0$, mentre la polare di y_∞ è la retta $(0\ 0\ 1)\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = -x + 3y + 2 = 0$. Il centro ha come coordinate la soluzione del sistema $x - y = 0, -x + 3y + 2 = 0$, e dunque è il punto $C(-1, -1)$.

Problema 7.20. *Determina gli asintoti della conica affine γ di equazione:*

$$10x^2 - 7y^2 + 9xy + y + 1 = 0.$$

Soluzione. **Primo modo** Immergendo il piano affine nel piano proiettivo, con le consuete notazioni, il completamento proiettivo di γ è la conica proiettiva $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $10X_1^2 - 7X_2^2 + 9X_1X_2 + X_2X_0 + X_0^2 = 0$. I punti impropri $[0, X_1, X_2]$ di $\mathbf{\Gamma}$ si calcolano risolvendo l'equazione $10X_1^2 - 7X_2^2 + 9X_1X_2 = 0$ ottenuta imponendo $X_0 = 0$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$: tali punti impropri sono $B_1[0, 1, 2]$ e $B_2[0, 7, -5]$. Poiché $\mathbf{\Gamma}$ ha due punti impropri, gli asintoti esistono e sono le polari dei punti impropri; la polare di B_1 ha equazione omogenea $38X_1 - 19X_2 + 2X_0 = 0$, mentre la polare di B_2 ha equazione omogenea $95X_1 + 123X_2 - 5X_0 = 0$. Tornando in coordinate affini, gli asintoti sono le rette di equazione cartesiana $38x - 19y + 2 = 0$ e $95x + 123y - 5 = 0$, rispettivamente.
Secondo modo Gli asintoti sono le rette affini che non intersecano γ.

Problema 7.21. *a) Sia γ una conica di equazione: $ax^2 + bx + c = 0$. Mostra che la conica è degenere e composta da rette parallelle all'asse y.*
b) Se γ' è una conica composta da rette parallele all'asse y, è vero che nella sua equazione non compaiono termini in y?

Soluzione. a) L'equazione della conica è data da un polinomio complesso di secondo grado in una variabile, che dunque si fattorizza in fattori lineari: la conica γ è dunque riducibile. Le componenti hanno equazione della forma $x - d = 0$ e sono rette parallele all'asse y (sia che le componenti siano distinte o no).
b) Le rette parallele all'asse y hanno equazione della forma $x - d = 0$: il prodotto di due equazioni di questa forma è un polinomio di secondo grado privo di termini in y, come si voleva.