8

Classificazione delle coniche

In questo capitolo verrà discussa la classificazione delle coniche dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; interpretando $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come il completamento dello spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{X_3 = 0\}$ o dello spazio euclideo $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{X_3 = 0\}$, ne deriveremo la classificazione affine e metrica delle coniche.

8.1 Classificazione proiettiva delle quadriche su una retta.

Quadriche della retta proiettiva complessa Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva nella retta complessa $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, si può scegliere il riferimento in modo tale che B abbia coordinate $B[0,1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 = 0$.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, il riferimento può essere scelto in modo tale che B_0 e B_1 abbiano coordinate, rispettivamente, $B_0[1,i]$ e $B_1[1,-i]$, e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

Le equazioni così determinate, si dicono *forma canonica proiettiva* per $\mathbf{\Gamma}$ e riflettono la proprietà che le forme quadratiche non degeneri su un campo algebricamente chiuso (di caratteristica diversa da 2) ammettono sempre una base ortonormale.

Quadriche reali della retta proiettiva reale o complessificata Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica reale di $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, esiste un riferimento in cui B ha coordinate $B[0,1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 = 0$, come nel caso complesso.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, occorre invece distinguere il caso in cui B_0 e B_1 siano reali, dal caso in cui B_0 e B_1 siano immaginari coniugati. Se B_0 e B_1 sono reali, allora in un opportuno riferimento, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 - X_1^2 = 0$: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente negativo. Se invece B_0 e B_1 sono immaginari coniugati, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$ in un riferimento opportuno: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente positivo.

Osservazione 8.1.1. La distinzione dei due casi possibili per le quadriche non degeneri reali corrisponde alla distinzione, tra le forme quadratiche reali di rango 2, tra le forme definite e le forme non definite. Come verrà ricordato nel seguito (cf.

8.9.5), la matrice associata alla forma quadratica in un qualsiasi riferimento permette facilmente di operare tale distinzione.

Osservazione 8.1.2. **Determinazione della forma canonica nel caso non degenere reale a punti reali.** Siano P un punto reale di $\mathbb{P}^1$ non appartenente ad una quadrica non singolare $\mathbf{\Gamma}$, e P' il suo polare. In un sistema di riferimento in cui $P[1,0]$ e $P'[0,1]$, la matrice associata a $\mathbf{\Gamma}$ è della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con a e b non nulli e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $aX_0^2 + bX_1^2 = 0$. Nel sistema di coordinate $Y_0 = \sqrt{|a|}X_0$, $Y_1 = \sqrt{|b|}X_1$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

8.2 Classificazione proiettiva delle coniche

In questa sezione, si vuole capire quando una conica può essere trasformata attraverso una proiettività in un'altra conica assegnata (diciamo che le coniche sono *proiettivamente equivalenti*). In altre parole, si vuole capire se due equazioni descrivono la stessa conica in sistemi di coordinate differenti. Questo confronto verrà compiuto cercando per ciascuna conica una equazione "ottimale" (detta *equazione canonica proiettiva*): risulterà che *due coniche sono proiettivamente equivalenti se hanno la stessa equazione canonica proiettiva.* Come consueto, potremo pensare che stiamo cercando un nuovo riferimento nel quale la conica è definita da una equazione più semplice.

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$; consideriamo una sua matrice

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Osservazione 8.2.1. **Punti fondamentali e coniche** Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ se e solo se nell'equazione f di $\mathbf{\Gamma}$ non compare il termine in X_0^2 (cioè se $a_{00} = 0$).

Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ è singolare per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la prima riga di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ la prima colonna di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare la variabile X_0. Vale analogo per gli altri punti fondamentali.

Una strategia affinché nella matrice della conica compaiano righe (e colonne) nulle è dunque quella di considerare riferimenti in cui sia massimo possibile il numero di punti fondamentali che siano anche punti singolari per la conica. Dunque, se il luogo singolare è una retta, potremmo posizionare su di essa due punti fondamentali (per convenzione, il secondo e il terzo punto fondamentale); se invece il luogo singolare è composto da un unico punto, lo sceglieremo come punto fondamentale (per convenzione, il terzo).

In generale, se $U_0[1,0,0]$ non è un punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ (potrebbe essere un punto semplice o non appartenere alla conica), allora la sua polare ha equazione $a_{33}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 = 0$, i cui coefficienti costituiscono la prima riga di $\mathbf{A}$. In particolare, il punto $U_1[0,1,0]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{01} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_1. Allo stesso modo, il punto $U_2[0,0,1]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{02} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_2. Ma per poter imporre che U_1 e U_2 stiano entrambi nella polare di U_0, sicuramente U_0 non può stare sulla conica: altrimenti, U_0 starebbe sulla propria polare, e i tre punti fondamentali sarebbero allineati. Vale analogo per gli altri punti fondamentali. *Una strategia per annullare nella matrice i termini fuori dalla diagonale è dunque quella di scegliere di posizionare, ove possibile, i punti fondamentali in punti ciascuno appartenente alle polari degli altri. E per poterlo fare, occorre sicuramente punti che non appartengono alla conica.*

Osservazione 8.2.2. **Classificazione proiettiva delle coniche degeneri**
a) Supponiamo che una conica $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 1. Se si sceglie un riferimento nel quale i punti $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ siano entrambi doppi, l'equazione della conica diventa $Y_0^2 = 0$ (detta *equazione canonica proiettiva*) e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

b) Supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 2. Se si sceglie un riferimento nel quale un punto doppio abbia coordinate omogenee $[0,0,1]$, l'equazione della conica $f(X_0, X_1) = 0$ dipende solo da due variabili e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Se si impone anche che $P_0[1,0,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1[0,1,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1 \in r_{P_0}$, si vede che la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad \neq 0. \tag{8.4}$$

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, con un cambio di coordinate $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, si ricava l'*equazione canonica proiettiva* $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, se $ad > 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$. Se invece $ad < 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

Cerchiamo ora di classificare le coniche non degeneri. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Definizione 8.2.3. Un triangolo autopolare per $\mathbf{\Gamma}$ è composto da tre rette s, t, v che si intersecano a due a due in 3 punti distinti S, T, V, in modo tale che $S \notin s$, $T \notin t$, $V \notin v$ e inoltre s è la retta polare di S, t è la retta polare di T, v è la retta polare di V.

Lemma 8.2.4. *Ogni conica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ammette infiniti triangoli autopolari.*

Dimostrazione. Sia S un punto che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e sia $T \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto sulla retta polare s di S rispetto a $\mathbf{\Gamma}$. La retta polare t di T (contiene S e) interseca s in un punto V necessariamente distinto da T: s, t, v formano dunque un triangolo autopolare. □

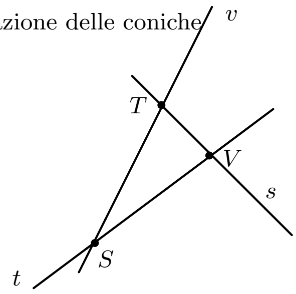

Figura 8.1. Un triangolo

Il Lemma 8.2.4 si estende al caso di una conica degenere? (cf. Problemi 7.8-7.9).

I triangoli autopolari permettono di determinare riferimenti nei quali l'equazione della conica diventa più semplice:

Osservazione 8.2.5. Si fissi un triangolo autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $S = [1, 0, 0]$, $T = [0, 1, 0]$ e $V = [0, 0, 1]$, di modo che s ha equazione $X_0 = 0$, t ha equazione $X_1 = 0$, v ha equazione $X_2 = 0$. Si vede facilmente che $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 = 0 \qquad (\text{con } abc \neq 0) \tag{8.5}$$

e la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è diagonale in questo riferimento.

Nel piano proiettivo complesso Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e sia $[X_1, X_2, X_3]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 8.2.5. Nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\, X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\, X_1$, $Y_2 = \sqrt{c}\, X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{8.6}$$

detta *equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$.

Vale dunque la seguente proposizione:

Proposizione 8.2.6. *Due coniche sono* proiettivamente equivalenti *in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *(cioè esiste una proiettività che muta l'una nell'altra) se e solo se hanno lo stesso rango.*

Si rimanda al Problema 8.4 per un esempio di classificazione proiettiva di coniche non degeneri.

Nel piano proiettivo reale o nel piano proiettivo reale complessificato Osserviamo che l'inclusione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induce una inclusione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, perché due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$. In particolare, ogni riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: un tale riferimento è detto *riferimento reale*. Nel resto del capitolo considereremo spesso solo riferimenti reali di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Diremo che stiamo lavorando nel *piano proiettivo reale ampliato con i punti immaginari.* I punti reali sono punti del piano che ammettono coordinate omogenee reali. Una conica è reale se ammette una equazione a coefficienti reali.

Sono ammessi solo cambi di riferimento reali. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica reale non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (o del suo complessificato) e sia $[X_0, X_1, X_2]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 8.2.5.
Il caso delle coniche reali non degeneri si discute in modo analogo al caso complesso, distinguendo due possibili casi. I coefficienti a, b e c che compaiono nell'equazione 8.5 sono reali non nulli, quindi almeno due di essi hanno lo stesso segno; eventualmente moltiplicando l'equazione per -1 e/o scambiando l'ordine delle coordinate, è possibile assumere che a e b siano positivi. Se anche c è positivo, nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\,X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\,X_1$, $Y_2 = \sqrt{c}\,X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{8.7}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ è in tal caso priva di punti reali
Se, invece, $c < 0$, allora nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\,X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\,X_1$, $Y_2 = \sqrt{|c|}\,X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0, \tag{8.8}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ ha in tal caso punti reali.

Riassumendo, *esiste sempre un riferimento nel quale l'equazione di una conica non degenere reale, nel piano proiettivo reale o complessificato, assume una (ed una sola) delle forme seguenti*:
i) $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$: *conica non degenere senza punti reali.*
ii) $Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0$: *conica non degenere a punti reali.*

Per discutere se una conica reale non degenere sia a punti reali o ne sia priva, è utile il seguente lemma, che permette di fornire la risposta studiando i coefficienti della matrice associata alla conica in un qualsiasi riferimento:

Lemma 8.2.7. *Una conica reale non degenere è priva di punti reali se e solo se* $\begin{cases} a_{22}\, det\mathbf{A} > 0 \\ det\mathbf{A}_{00} > 0 \end{cases}$ *, ove con* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *si denoti la matrice associata alla conica, con* $\mathbf{A}_{00}$ *la sottomatrice di* $\mathbf{A}$ *ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna.*

Dimostrazione. Se $a_{22} = 0$, la conica contiene il punto reale $[0, 0, 1]$. Possiamo dunque supporre $a_{22} \neq 0$ (e, analogamente, $a_{11} \neq 0$ e $a_{00} \neq 0$). La conica $\mathbf{\Gamma}$ è priva di punti reali se e solo se l'equazione in X_2:

$$a_{22}X_2^2 + 2(a_{12}X_1 + a_{02}X_0)X_2 + (a_{11}X_1^2 + 2a_{01}X_0X_1 + a_{00}X_0^2) = 0$$

non ha soluzione per qualunque scelta di X_0, X_1 reali non entrambi nulli. Ciò equivale a chiedere che sia sempre strettamente negativo il discriminante

$$\Delta = -4[A_{00}X_1^2 + 2A_{01}X_0X_1 + A_{11}X_0^2]$$

(ove con A_{ij} si denotia il determinante della sottomatrice $\mathbf{A}_{ij}$ di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima)). Poichè il discriminante Δ è a sua volta una equazione di secondo grado, chiedere che Δ sia sempre negativo equivale ad imporre che:

a) il coefficiente $-4A_{00}$ di X_1^2 deve essere negativo, cioè $A_{00} = det\mathbf{A}_{00} > 0$;

b) il discriminante $\Delta' = 4[A_{01}^2 - A_{00}A_{11}] = -4a_{22}det\mathbf{A}$ dell'equazione quadratica data da Δ deve essere strettamente negativo:

$$-a_{22}det\mathbf{A} < 0 \text{ cioè } a_{22}det\mathbf{A} > 0.$$

$\square$

Si rimanda agli Esercizi Svolti 8.3-8.8 per esempi di classificazione proiettiva di coniche non degeneri nel caso reale.

In dimensione superiore In modo completamente analogo agli esempi visti, si mostra il seguente:

Teorema 8.2.8. *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva complessa di $\mathbb{P}^n$ di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_r^2 = 0$. Due quadriche sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Teorema 8.2.9. Caso reale: Teorema di Sylvester *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva reale di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (o del complessificato) di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_q^2 - X_{q+1}^2 - \ldots - X_r^2 = 0$ e gli interi q ed r sono univocamente individuati da $\mathbf{\Gamma}$.*

La determinazione della forma canonica individuata nel teorema di Sylvester può essere facilmente ottenuta utilizzando il seguente:

Proposizione 8.2.10. (Criterio di Sylvester) *Sia φ un prodotto scalare reale e sia $\mathbf{A}$ la matrice ad esso associata in un riferimento.*
a) φ è definito positivo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ sono tutti > 0.
b) φ è definito negativo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ di ordine dispari sono tutti < 0 e quelli di ordine pari sono tutti > 0.

Corollario 8.2.11. *Una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ha punti reali se e solo se il prodotto scalare ad essa associato non è definito.*

Esempio 8.2.12. Le quadriche proiettive reali non degeneri di $\mathbb{P}^3$ ammettono, in un opportuno sistema di riferimento, una ed una sola equazione della seguente forma:
i) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ non degenere senza punti reali.
ii) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^3 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti ellittici.
iii) $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti iperbolici.

8.3 Coniche affini e loro completamento proiettivo

Nella parte rimanente del capitolo, cambieremo le notazioni, denotando con

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]$$

le coordinate omogenee nel piano proiettivo. Il motivo di questa variazione è legato alla maggiore semplicità delle formule così ottenute e alla maggiore semplicità di lettura della matrice di una conica, seguendo questa differente convenzione.

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ si interpreti la retta $X_3 = 0$ come la retta impropria π_∞, riguardando $\mathbb{P}^2$ come completamento di un piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ complessificato. Sia fissato un riferimento in $\mathbb{P}^2$ indotto da un riferimento reale nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$. Mettiamo in evidenza che, per definizione, i cambi di riferimento ammessi in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ mandano punti reali in punti reali. Denotiamo con (x, y) le coordinate affini in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, con $[X_1, X_2, X_3]$ le coordinate in $\mathbb{P}^2$, con $x = X_1/X_3$, $y = X_2/X_3$ ove $X_3 \neq 0$.

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica del piano proiettivo e sia $f(X_1, X_2, X_3) = 0$ una sua equazione. La restrizione di tale equazione ai punti di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, è data da $f(x, y, 1) = 0$, che definisce una equazione al più di secondo grado in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ che viene detta *equazione affine della conica* $\mathbf{\Gamma}$. L'equazione $f(x, y, 1) = 0$ non è di secondo grado in x, y se e solo se X_3 è un fattore di $f(X_1, X_2, X_3)$, cioè se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile e la retta impropria è una sua componente. Se ciò non accade, diciamo che $\mathbf{\Gamma}$ è una conica propria.

Definizione 8.3.1. Una conica $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ si dice *propria* se non contiene la retta impropria π_∞.

Consideriamo ora una conica propria $\mathbf{\Gamma}$. Decomposta in parti omogenee, l'equazione affine si scrive come:

$$f(x, y, 1) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0 = 0\,, \tag{8.9}$$

con f_i omogenee di grado i. Osserviamo che tale equazione definisce una conica del piano affine. Viceversa, se $g(x, y)$ è una equazione di secondo grado che definisce una conica del piano affine, l'equazione omogeneizzata (cf. Definizione 5.8.9)

$$g_h(X_1, X_2, X_3) = X_3^2\, g(X_1/X_3, X_2/X_3)$$

definisce una conica di $\mathbb{P}^2$, detta *completamento proiettivo* della conica affine.

C'è dunque corrispondenza biunivoca tra le coniche proprie di $\mathbb{P}^2$ e le coniche affini. In base a tale corrispondenza, parleremo di matrice associata ad una conica affine e di rango di una conica affine riferendoci alla matrice $\mathbf{A}$ del suo completamento proiettivo: in tal caso, l'equazione della conica affine è data da

$$(x, y, 1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.10}$$

Analogamente, è possibile definire la polare di un punto proprio $P(p_x, p_y)$ rispetto ad una conica affine: la polare è la retta di equazione $(p_x, p_y, 1)\mathbf{A}(x, y, 1)^t = 0$ purchè tale equazione definisca una retta affine (cioè purché la polare del punto $P[p_x, p_y, 1]$ rispetto al completamento proiettivo non sia la retta impropria).

Spesso useremo il simbolo γ per indicare l'insieme dei punti propri di una conica propria $\mathbf{\Gamma}$. Talora si utilizzerà uno solo dei due simboli per descrivere sia la conica affine che il suo completamento proiettivo, per non appesantire la descrizione.

Osservazione 8.3.2. **Molteplicità dei punti fondamentali del riferimento.** Esaminando l'equazione affine 8.26 di una conica affine γ, è possibile discute l'appartenenza dei punti fondamentali al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ e, in caso se essi siano semplici o doppi:

a) l'origine O appartiene a $\gamma \Leftrightarrow f_0 = 0$.
b) l'origine O è un punto doppio per $\gamma \Leftrightarrow f_1 = f_0 = 0$.
c) il punto $X_\infty[1, 0, 0]$ appartiene al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la coordinata x compare al più linearmente nell'equazione 8.26 $\Leftrightarrow$ il coefficiente di x^2 in f_2 è nullo.
d) il punto il punto X_∞ è doppio per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la coordinata x non compare in f.

e) il punto $Y_\infty[0,!,0]$ appartiene al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ $\Leftrightarrow$ la coordinata y compare al più linearmente nell'equazione 8.26 $\Leftrightarrow$ il coefficiente di y^2 in f_2 è nullo.
f) il punto il punto Y_∞ è doppio per $\mathbf{\Gamma}$ $\Leftrightarrow$ la coordinata y non compare in f.

La classificazione delle coniche affini si ottiene considerando tra loro *equivalenti* due coniche se e solo se esiste una affinità di rango 2 che le muta l'una nell'altra: in tale situazione, possiamo pensare che esse siano la stessa conica, descritta in due sistemi di riferimento eventualmente differenti. Qualora si studino coniche affini reali nel piano affine reale complessificato, le affinità considerate saranno solo le affinità reali. Per ciascuna classe di equivalenza di coniche, individueremo una equazione particolarmente semplice (che chiameremo *equazione canonica affine*), che descrive la conica in un opportuno sistema di riferimento: risulterà che due coniche sono affinemente equivalenti se e solo se hanno la medesima equazione canonica affine.

Iniziamo osservando che, se due coniche affini sono affinemente equivalenti, allora i loro completamenti proiettivi devono essere proiettivamente equivalenti (ma il viceversa è falso: trova un controesempio). In particolare, *due coniche affinemente equivalenti hanno sempre lo stesso rango*, essere degenere o non degenere è una proprietà affine e una conica affine è degenere se e solo se contiene una retta. Analogamente, la nozione di punto doppio di una conica si conserva per affinità.

Osservazione 8.3.3. **I punti all'infinito** Ogni affinità può essere riguardata come una particolare proiettività che lascia globalmente fissa la retta all'infinito. La classificazione affine delle coniche permette di capire se due coniche assegnate sono l'una l'immagine dell'altra tramite una affinità di rango massimo. Se ciò accade, le due coniche devono avere in comune tutte le caratteristiche che le affinità non possono modificare: oltre al rango, anche il numero di punti impropri del completamento proiettivo. Se l'equazione del completamento proiettivo è $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$, si denoti con $\mathbf{A}_{33}$ la sottomatrice (simmetrica) di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la terza riga e la terza colonna. Si osservi che l'equazione $(X_1, X_2)\mathbf{A}_{33}(X_1, X_2)^t = 0$ definisce la quadrica nella retta impropria data dall'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria π_∞ di equazione $X_3 = 0$: i suoi punti sono i punti impropri del completamento proiettivo. Tale intersezione è formata da un punto solo se e solo se $\mathbf{A}_{33} = 0$. *Il numero dei punti di intersezione con la retta all'infinito e il rango di* $\mathbf{\Gamma}$ *sono invarianti per isomorfismi affini e permettono di riconoscere differenti tipologie per le coniche affini.* Se la conica è reale e le affinità considerate mandano punti reali in punti reali, non è possibile modificare la natura dei punti all'infinito: *una conica con due punti distinti reali all'infinito (det* $\mathbf{A}_{33} < 0$*) non può essere trasformata in un'altra con una coppia di punti complessi coniugati all'infinito (det* $\mathbf{A}_{33} > 0$*).* (Per la caratterizzazione con il segno dei determinanti, vedi il paragrafo 8.1).

La polarità associata al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ di una conica affine γ fornisce ulteriori proprietà invarianti per affinità. L'equazione dei punti propri della retta polare del punto proprio $P[p_1, p_2, 1]$ rispetto alla conica di equazione 8.10 è data da

$$(p_1, p_2, 1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{8.11}$$

e tale equazione definisce una retta affine se e solo se P non è un punto doppio per γ e non è il polo della retta all'infinito π_∞. In particolare, è una proprietà affine l'(eventuale) esistenza di un punto proprio (che prenderà il nome di *centro*) la cui retta polare non è propria.

Osservazione 8.3.4. **L'involuzione sulla retta all'infinito indotta da una conica** Prendiamo ora in considerazione le polari dei punti della retta all'infinito. Per quanto osservato, è ben definita la quadrica $\mathbf{\Gamma} \cap \pi_\infty$, ottenuta intersecando la retta all'infinito π_∞ con il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$. Ogni conica propria γ, induce quindi una *involuzione* su π_∞ data dalla polarità rispetto alla quadrica $\mathbf{\Gamma} \cap \pi_\infty$: ad ogni punto $\delta \in \pi_\infty$ (che può essere interpretato come una direzione del piano affine) corrisponde la *direzione coniugata* $\delta' = \omega_\delta \cap \pi_\infty$ (ove la polare ω_δ può essere intesa come la polare rispetto alla conica γ). Per la Proposizione 7.3.5, se $\mathbf{\Gamma} \cap \pi_\infty = B_0 + B_1$, i punti impropri della conica e una coppia di direzioni coniugate formano una quaterna armonica, cioè $(B_0 B_1 \delta \delta') = [1, -1]$.

Ricordando l'Osservazione 7.3.7, la polarità in π_∞ definita dalla quadrica $\mathbf{\Gamma} \cap \pi_\infty$ induce una *involuzione* su ogni fascio di rette avente centro in un punto proprio Q: alla retta r per Q di direzione $\delta = r \cap \pi_\infty$ corrisponde la retta r' passante per Q e avente per direzione la direzione coniugata di δ, cioè il punto polare $\delta' = \omega_\delta \cap \pi_\infty$ di δ rispetto a $\mathbf{\Gamma} \cap \pi_\infty$.

La nozione di punto medio tra due punti è una nozione affine, alla base delle proprietà di simmetria che saranno molto importanti:

Definizione 8.3.5. Una retta r del piano affine si dice *asse di simmetria di γ per la direzione δ* se, per ogni retta s avente direzione δ, indicati con B_0 e B_1 i punti di $s \cap \gamma$ (eventualmente coincidenti), si ha che il punto medio M tra B_0 e B_1 appartiene a r.

Le affinità mandano assi di simmetria in assi di simmetria, facendone corrispondere le direzioni. La Proposizione 7.3.5 può essere applicata anche allo studio dell'involuzione indotta da γ su una retta r non contenuta e non tangente alla conica:

Proposizione 8.3.6. *Sia $\mathbb{P}(r)$ il completamento proiettivo di una retta propria r che interseca il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ della conica affine γ in (esattamente) due punti distinti B_0 e B_1. Siano P un punto di r e $P' = \omega_p \cap r$ il suo coniugato.*
a) La quaterna B_0, B_1, P, P' è armonica, cioè ha birapporto $(B_0\, B_1\, P\, P') = [1, -1]$.
b) Se B_1 è un punto improprio, il punto P' è il simmetrico di P rispetto a B_0, cioè B_0 è il punto medio di P e P'.
c) Se B_0 e B_1 sono punti propri, il coniugato armonico M del punto improprio r_∞ di $\mathbb{P}(r)$ rispetto a $\mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{P}(r)$ è il punto medio di B_0 e B_1 .

Dimostrazione. a) e b) Seguono direttamente dalla Proposizione 7.3.5: in un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(r)$ in cui $B_0[1, 0]$ e $B_1[0, 1]$, il coniugato di $P[1, p]$ è $P'[1, -p]$ (che coincide con il coniugato armonico e con il simmetrico di P rispetto all'origine).
c) Possiamo scegliere il riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(r)$ in modo che $B_0 = [1, 0]$, $B_1[1, 1]$; applicando il punto a) e denotando con $r_\infty[1, p]$ e $M[1, m]$ le coordinate dei due punti coniugati, si ricava che

$$[1, -1] = (B_0\, B_1\, r_\infty\, M) = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} \right] = [m - 1, m]. \tag{8.12}$$

Dunque $m - 1 = -m$, cioè $m = 1/2$ e M è il punto medio (affine) tra B_0 e B_1. □

Corollario 8.3.7. *Se $\delta \in r_\infty$ non è un punto improprio di $\mathbf{\Gamma}$, la polare ω_δ di δ è asse di simmetria per γ nella direzione δ.*

Dimostrazione. La retta polare ω_δ di δ deve essere una retta propria (altrimenti conterrebbe il proprio polo δ, che dovrebbe appartenere a $\mathbf{\Gamma}$), e la sua direzione è δ', per le proprietà della polarità. Se $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, per l'Esercizio Svolto 7.8, la polare ω_δ è l'unica componente di $\mathbf{\Gamma}$, ed è dunque asse di simmetria (nella direzione indicata). Se $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 2, per l'Esercizio Svolto 7.9, la polare ω_δ passa per l'unico punto doppio Q di $\mathbf{\Gamma}$. Se il punto doppio Q è un punto improprio, allora ω_δ è parallela alle due componenti di $\mathbf{\Gamma}$; ogni retta propria r di direzione δ interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti, il cui punto medio è il coniugato armonico di δ rispetto a $\mathbf{\Gamma} \cap r$; per la Proposizione 7.3.10, il coniugato di δ coincide con $\omega_\delta \cap r$, e deve dunque appartenere a ω_δ. Se, invece, il punto doppio Q di $\mathbf{\Gamma}$ è un punto proprio, nuovamente ogni retta propria r di direzione δ interseca $\mathbf{\Gamma}$ in Q o in due punti distinti, e il ragionamento precedente si applica anche in questo caso.

Se, infine, $\mathbf{\Gamma}$ è non degenere, l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e una qualsiasi retta propria r di direzione δ è composta da un punto o da due punti distinti: in ogni caso, il punto medio dei punti di intersezione appartiene a ω_δ, in base a un ragionamento analogo ai precedenti. $\square$

Definizione 8.3.8. Nel piano affine reale (o reale complessificato), sia assegnata una conica reale γ. Un punto reale $P(p_x, p_y)$ si dice *interno* a γ se ogni retta reale per P interseca γ in due punti reali. Un punto reale $P(p_x, p_y)$ si dice *esterno* a γ se esiste una retta reale per P la cui intersezione con γ non contiene punti reali.

Nel Problema 8.31 si trova un esempio relativo a tale definizione e si discute il problema grafico di come determinare la polare di un punto interno ad una conica.

8.4 Classificazione affine delle coniche

Nel piano affine sia fissata una conica γ e si denoti con il simbolo $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ il completamento proiettivo.

Osservazione 8.4.1. **Classificazione affine delle coniche degeneri.** Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica propria degenere di $\mathbb{P}^2$, cioè una conica propria di equazione $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ con $\det \mathbf{A} = 0$.

a) Caso $rg(\mathbf{\Gamma}) = 2$. La conica propria $\gamma = \mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ è composta da due rette incidenti se $\det \mathbf{A}_{33} \neq 0$ e da due rette parallele e distinte se $\det \mathbf{A}_{33} = 0$.

Se l'equazione di γ è reale ed essa è composta da due rette affini incidenti, tali rette sono entrambe reali o complesse coniugate. Se le componenti sono reali, $\det \mathbf{A}_{33} < 0$, i due punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono reali e distinti, e in un opportuno sistema di riferimento la conica γ può assumere l'*equazione canonica affine* $x^2 - y^2 = 0$; se le componenti sono complesse coniugate, allora $\det \mathbf{A}_{33} > 0$, i due punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono complessi coniugati e in un opportuno sistema di riferimento la conica assume l'*equazione canonica affine* $x^2 + y^2 = 0$ (che coincide con l'equazione canonica affine nel piano affine complesso).

Se l'equazione di γ è reale ed essa è composta da due rette distinte tra loro parallele, tali rette sono entrambe reali (e in tal caso hanno infiniti punti reali e in un opportuno sistema di riferimento la conica può assumere l'equazione $x^2 - 1 = 0$) oppure sono complesse coniugate (e in tal caso non hanno punti propri reali e in un opportuno sistema di riferimento la conica può assumere l'equazione $x^2 + 1 = 0$).

Si rimanda ai Problemi 8.21-8.22 per la discussione di alcuni esempi numerici.

b) Caso $rg(\mathbf{\Gamma}) = 1$. La conica propria $\gamma = \mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ è composta da una retta contata due volte. In particolare, $\det \mathbf{A}_{33} = 0$ e tutti i punti di $\mathbf{\Gamma}$ sono singolari.

Se l'equazione di γ è reale, anche la retta che la compone è reale. In un opportuno riferimento, si può fare in modo che essa coincida con l'asse delle y e la conica γ assuma l'*equazione canonica affine* $x^2 = 0$.

Nel Problema 8.20 trovi la discussione di un esempio.

Coniche affini non degeneri

Passiamo ora a studiare la classificazione delle coniche non degeneri. Come più volte osservato, i cambi di coordinate affini sono particolari proiettività che lasciano complessivamente fissa la retta impropria π_∞. In particolare, se π_∞ è tangente al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ in un riferimento affine, ciò accadrà in ogni riferimento affine. Poiché il polo della retta impropria è un punto proprio se e solo se la conica interseca la retta impropria in due punti distinti, si introduce la seguente definizione:

Definizione 8.4.2. Una conica γ non degenere affine si dice *parabola* se il suo completamento proiettivo è tangente alla retta impropria π_∞.

Definizione 8.4.3. La conica γ si dice *conica a centro* se l'intersezione tra il suo completamento e la retta impropria è formata da due punti distinti; in tal caso, il *centro* di γ è il polo della retta impropria π_∞.

Una conica reale non degenere a centro di matrice $\mathbf{A}$ è una

a) *ellisse* se i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono una coppia di punti complessi coniugati

b) *iperbole* se i punti impropri di $\mathbf{\Gamma}$ sono una coppia di punti reali.

Osservazione 8.4.4. Come osservato nel paragrafo precedente, se $\mathbf{A}$ è la matrice della conica $\mathbf{\Gamma}$, la matrice della quadrica intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e la retta impropria è data dalla sottomatrice $\mathbf{A}_{33}$. In particolare, *la conica non degenere* $\mathbf{\Gamma}$ *è una parabola se e solo se det* $\mathbf{A}_{33} = 0$. *La conica* $\mathbf{\Gamma}$ *è una conica a centro se e solo se det* $\mathbf{A}_{33} \neq 0$. In tal caso, il centro è il punto di intersezione delle polari dei punti fondamentali all'infinito, e le sue coordinate affini sono soluzione di $\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} = 0 \\ a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23} = 0 \end{cases}$, e quindi sono date da $(\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}, \frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2})$. Una conica (non degenere) a centro è una ellisse se e solo se $det\mathbf{A}_{33} > 0$, ed è una iperbole se e solo se cioè se $det\mathbf{A}_{33} < 0$.

Le polari proprie dei punti impropri assumono specifici nomi:

Definizione 8.4.5. Gli *asintoti* di una conica propria $\mathbf{\Gamma}$ non degenere sono le tangenti proprie di $\mathbf{\Gamma}$ nei suoi punti impropri.

Gli asintoti sono rette proprie che non hanno punti propri di intersezione con la conica.

Definizione 8.4.6. Un *diametro* di una conica non degenere γ è la retta polare di un punto improprio (cioè una direzione) non appartenente a $\mathbf{\Gamma}$ (diciamo che il diametro è associato alla direzione di cui è la polare). Due diametri di una conica a centro si dicono *coniugati* se ciascuno di essi è la polare del punto improprio dell'altro (cioè i loro punti impropri sono coniugati nell'involuzione indotta dalla conica sulla retta impropria).

Il diametro polare della direzione $\delta = (l, m, 0)$ è la retta di equazione

$$(l,m,0)\mathbf{A}(x,y,1)^t = (l,m,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

e due direzioni $\delta = (l,m,0)$ e $\delta' = (l',m',0)$ sono coniugate se e solo se

$$(l,m)\mathbf{A}_{33}\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} = 0. \tag{8.13}$$

Con la presente terminologia, il Corollario 8.3.7 afferma che *ogni diametro è asse di simmetria rispetto alla direzione coniugata* (secondo la definizione 8.3.5).

Se γ è una parabola, non ammette asintoti e tutti i diametri passano per il punto improprio di $\mathbf{\Gamma}$; in particolare, i diametri sono rette tra loro parallele, ciascuna delle quali interseca la parabola in un solo punto proprio.

Una conica a centro, invece, ha due asintoti, che sono le polari dei suoi due punti impropri, e si intersecano nel centro. Il centro è anche l'intersezione di una qualsiasi coppia di diametri distinti, e i diametri appartengono al fascio di rette per il centro.

Osservazione 8.4.7. **Classificazione affine delle parabole** Sia γ una parabola. Ricordiamo che la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ che la rappresenta in un sistema di riferimento è di rango massimo, mentre $\mathbf{A}_{33}$ ha determinante nullo.

Se d è un diametro di γ, è possibile scegliere un sistema di riferimento nel quale il diametro sia l'asse x, l'origine sia l'intersezione di tale diametro con la parabola e la tangente alla parabola nell'origine sia l'asse y. In tale riferimento, la matrice della conica ha le seguenti caratteristiche:

i) $a_{33} = 0$ perché la conica passa per l'origine,
ii) $a_{11} = 0$ perché la conica passa per il punto improprio $[1,0,0]$ del suo diametro, l'asse x,
iii) $a_{12} = a_{21} = 0$ perché l'intersezione con la retta impropria è solo $[1,0,0]$,
iv) $a_{32} = a_{23} = 0$: infatti, la polare dell'origine ha equazione $a_{31}x + a_{32}y = 0$ e tale retta deve coincidere con l'asse y.

In questo riferimento, la conica γ ha una equazione della forma $a_{22}y^2 + 2a_{32}x = 0$, con $a_{22} \neq 0$. Dividendo, l'equazione diventa:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0.$$

Con un cambiamento di coordinate $x' = 2px$, $y' = y$, l'equazione della parabola diventa:

$$y^2 = x \tag{8.14}$$

detta l'*equazione canonica affine* della parabola.

In particolare, da un punto di vista affine, tutte le parabole sono uguali tra loro, nel senso che esiste sempre una trasformazione affine che muta l'una nell'altra.

Si rimanda al Problema 8.23 per un esempio in cui si determina esplicitamente un sistema di coordinate in cui una parabola è rappresentata dall'equazione canonica.

Osservazione 8.4.8. **Classificazione affine delle coniche a centro**
Il termine centro è giustificato dalle sue particolari proprietà di simmetria:

Definizione 8.4.9. Un punto $C \in \mathbb{A}$ si dice *centro di simmetria* per una conica non degenere γ se per ogni retta r per C non tangente a γ, indicati con B_1 e B_2 i punti di $r \cap \gamma$, si ha che C è il punto medio tra B_1 e B_2. In tal caso, si dice che B_1 è il simmetrico di B_2 rispetto a C.

Teorema 8.4.10. *Una conica propria non degenere ammette un centro di simmetria $C \in \mathbb{A}$ se e solo se il polo di π_∞ è un punto proprio, e in tal caso il centro di simmetria C è il polo di π_∞.*

Dimostrazione. Sia $\delta \in \pi_\infty$ una direzione, non appartenente al completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ di γ. In base alla Proposizione 8.3.6, se una retta r interseca γ in due punti propri B_1 e B_2 tra loro distinti, allora il punto medio M di B_1 e B_2 è esattamente il coniugato armonico (cioè il coniugato) di r_∞ rispetto alla quadrica $\mathbf{\Gamma} \cap r$. In particolare, il punto M deve appartenere alla polare di r_∞ rispetto a $\mathbf{\Gamma}$. Al variare della retta r, il punto M, per essere centro di simmetria, deve appartenere alle polari di ogni punto improprio (oltre ad essere un punto proprio). Dunque, il polo della retta impropria deve essere un punto proprio. □

Data una conica a centro γ, si fissino due diametri coniugati d e d' e si scelga un riferimento nel quale essi siano gli assi coordinati. In particolare, l'origine è il centro della conica. Poichè ciascun diametro è asse di simmetria per la direzione dell'altro, se il punto $P(x, y)$ appartiene a γ, anche i punti $(x, -y)$ e $(-x, y)$ devono appartenere a γ. L'equazione di γ deve dunque essere invariante per la sostituzione $x \mapsto -x$ e per la sostituzione $y \mapsto -y$. Dunque $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Analoga conclusione si ricava imponendo che

i) $a_{12} = a_{23} = 0$ perché la polare di $[0, 1, 0]$ deve essere l'asse x,
ii) $a_{12} = a_{13} = 0$ perché la polare di $[1, 0, 0]$ deve essere l'asse y.

Dividendo l'equazione per a_{33} (che è non nullo perché il centro non appartiene a γ), si ottiene una equazione della forma

$$ax^2 + by^2 + 1 = 0.$$

Nel piano complesso, ponendo $x' = \sqrt{a}\,x$, $y' = \sqrt{b}\,y$ possiamo far assumere, ad una qualsiasi conica a centro, l'equazione

$$x'^2 + y'^2 + 1 = 0, \tag{8.15}$$

detta l'*equazione canonica affine della conica a centro nel piano complesso*.

Si rimanda al Problema svolto 8.23 per un esempio in cui si determina esplicitamente un sistema di coordinate in cui una conica a centro è rappresentata dall'equazione canonica (8.15).

Nel piano reale $\mathbb{P}_\mathbb{R}$, si può operare solo la trasformazione $x' = \sqrt{|a|}\,x$, $y' = \sqrt{|b|}\,y$. I casi possibili sono 3:

i) a, $b > 0$: l'equazione diventa $x'^2 + y'^2 + 1 = 0$ e la conica è detta *ellissi immaginaria* o *ellissi senza punti reali*;
ii) $a > 0$, $b < 0$ oppure $a < 0$, $b > 0$: l'equazione diventa $x'^2 - y'^2 - 1 = 0$ (eventualmente ridenominando le variabili) e la conica è detta *iperbole*;
iii) a, $b < 0$: l'equazione diventa $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$ e la conica è detta *ellisse reale ellissi a punti reali*.

Osservazione 8.4.11. Una ellisse ha punti reali se $a_{33}\, det\mathbf{A} < 0$, mentre è priva di punti reali se $a_{33}\, det\mathbf{A} > 0$. Gli asintoti di una ellisse, sono immaginari e coniugati e si incontrano nel centro, che è reale. Il luogo dei punti reali dell'ellisse non interseca la retta impropria.

Osservazione 8.4.12. Gli asintoti di una iperbole sono reali e si intersecano nel centro. Essi non intersecano la conica in punti propri (e sono le uniche rette proprie con tale proprietà).

Si rimanda ai Problemi 8.24-8.27 per esempi con coniche nel piano affine reale.

8.5 Classificazione metrica delle coniche reali

Nel presente paragrafo, si considera il completamento proiettivo del piano euclideo $\mathbb{E}^2$, assumendo di utilizzare solo cambi di riferimento proiettivi associati a cambi di riferimento isometrici (cioè che conservano il lunghezze e angoli) nel piano euclideo.

Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ sia fissato un sistema di riferimento ortonormale, con coordinate (x, y). Si interpreti $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ come il completamento proiettivo di $\mathbb{E}^2$, con coordinate omogenee $[X_1, X_2, X_3]$ tali che $x = X_1/X_3, y = X_2/X_3$ ove $X_3 \neq 0$. I punti della retta π_∞ definita dall'equazione $X_3 = 0$ possono essere interpretati come direzioni delle rette di $\mathbb{E}^2$ e come coordinate omogenee di π_∞ si possono utilizzare $[X_1, X_2]$. L'osservazione 8.5.1 nel seguito mostra come sia possibile leggere, nel piano proiettivo, la nozione di ortogonalità tra rette, facendo ricorso alla polarità rispetto all'assoluto: due direzioni ortogonali nel piano euclideo corrispondono a due punti impropri del piano proiettivo tra loro coniugati rispetto all'assoluto.

Osservazione 8.5.1. **Polarità rispetto all'assoluto** Le direzioni isotrope di $\mathbb{E}^2$ corrispondono ai punti di una quadrica di π_∞, definita dall'equazione

$$X_1^2 + X_2^2 = 0,$$

detta l'*assoluto*, formata dai due punti $I^+ = [1, i, 0]$ e $I^- = [1, -i, 0]$, che vengono detti *punti ciclici*. Dato un punto $[l, m, 0]$ di π_∞, il suo punto coniugato rispetto all'assoluto è il punto definito dall'equazione $X_3 = 0$, $lX_1 + mX_2 = 0$, cioè il punto $[m, -l, 0]$, corrispondente alla direzione ortogonale di $[l, m, 0]$ in senso euclideo: *punti coniugati di π_∞ nella polarità rispetto all'assoluto, corrispondono a direzioni tra loro ortogonali.*
Ricordando l'osservazione 7.3.7, consideriamo il fascio di rette avente per centro un punto proprio Q: la polarità su π_∞ rispetto all'assoluto induce sul fascio l'involuzione che ad una retta per Q associa la retta per Q ad essa ortogonale.

In $\mathbb{E}^2$, nel riferimento ortonormale fissato, sia assegnata una conica γ reale di equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0 \tag{8.16}$$

e matrice associata:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}. \tag{8.17}$$

Osservazione 8.5.2. **Classificazione metrica delle coniche degeneri.** Supponiamo che γ sia degenere e ricordiamo l'Osservazione 8.5.2.
a) Caso $rg(\gamma) = 2$. La conica propria γ è composta da due rette parallele e distinte se $\det \mathbf{A}_{33} = 0$, mentre è composta da due rette reali incidenti se $\det \mathbf{A}_{33} < 0$, e da due rette complesse coniugate incidenti se $\det \mathbf{A}_{33} > 0$.

Se γ è composta da due rette parallele e distinte, sia δ la direzione ortogonale a tali rette e sia ω_δ la retta polare di tale direzione. Per il Corollario 8.3.7, la retta ω_δ è asse di simmetria rispetto alla direzione δ, e dunque è un asse di simmetria ortogonale. In un sistema di riferimento in cui ω_δ sia l'asse y, la conica γ assume l'equazione $x^2 = p$ (con $p > 0$), detta *equazione canonica metrica*. Se $p' \neq p$, $p', p > 0$, la coppia di rette $x^2 = p$ non può essere trasformata nella coppia $x^2 = p'$ tramite una isometria di $\mathbb{E}^2$.

Se γ è composta da due rette proprie incidenti, allora la conica induce una involuzione sulla retta all'infinito r_∞ (che interseca il completamento proiettivo $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti B_0 e B_1). Per 8.21, la direzione $[l, m, 0]$ è coniugata alla direzione $[-lb - mc,\, l\,a + \,m\,b, 0]$. Le due direzioni coniugate sono ortogonali se:

$$b\,l^2 + \,m\,(a-c)\,l - \,m^2 b = 0 \tag{8.18}$$

La condizione di ortogonalità (8.18) è identicamente nulla (cioè è sempre soddisfatta) se e solo se $b = 0$ e $a = c$, cioè la conica ha equazione $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ e l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r_∞ coincide con l'assoluto (e due direzioni coniugate sono sempre ortogonali). Se la condizione di ortogonalità (8.18) non è identicamente nulla, il discriminante $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$ è sempre positivo ed esiste dunque una coppia di direzioni coniugate che sono tra loro ortogonali. Con un cambio di coordinate isometrico, è quindi possibile supporre che gli assi coordinati abbiano direzioni tra loro coniugate e ortogonali, e che passino per il punto doppio di γ. In un tale sistema di riferimento, la conica assume l'*equazione canonica metrica* $x^2 + py^2 = 0$ ($p \neq 0$). Le componenti di γ sono complesse coniugate se $p > 0$, mentre sono reali per $p < 0$.
b) Caso $rg(\gamma) = 1$. La conica propria γ è composta da una retta con molteplicità 2. In un riferimento ortonormale in cui l'asse y coincida con la componente, γ assume l'*equazione canonica metrica* $x^2 = 0$. In particolare, tutte le coniche di rango 1 sono metricamente equivalenti.

Sia γ una conica non degenere reale nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di dimensione 2 e si denoti con $\mathbf{\Gamma}$ il suo completamento proiettivo. Per la Definizione 8.4.6, una retta propria è un *diametro* per γ se il suo completamento proiettivo è un diametro per $\mathbf{\Gamma}$ (cioè è la polare ω_δ di un punto δ in π_∞ che non appartenga a $\mathbf{\Gamma}$). Un diametro ω_δ per γ è *asse di simmetria ortogonale* (o, più semplicemente, *asse di simmetria*) se e solo se è ortogonale a δ.

Osservazione 8.5.3. **Classificazione metrica delle parabole** Se γ è una parabola, esiste un unico asse di simmetria ortogonale; infatti, se Q è l'unico punto improprio di $\mathbf{\Gamma}$, tutti i diametri passano per Q; si denoti con Q' la direzione ortogonale a Q: il diametro polare di Q' è asse di simmetria ortogonale per γ. Il *vertice* di una parabola è l'intersezione della parabola con il suo asse di simmetria. In un sistema di riferimento in cui tale diametro sia l'asse x e l'asse y sia ortogonale all'asse x e passante per l'intersezione tra l'asse x e γ (cioè l'asse y sia la retta tangente a γ nel vertice), la conica ha equazione

$$y^2 = 2px;$$

orientando opportunamente gli assi, è possibile assumere che $p > 0$ e l'equazione prende il nome di *equazione canonica metrica.* Al variare di p, si ottengono infinite parabole che non possono essere trasformate l'una nell'altra con cambi di riferimento ortonormali (tutte equivalenti come coniche affini).

Lemma 8.5.4. *Una parabola γ ha un unico asse di simmetria ed esso ha come direzione il punto improprio del completamento proiettivo di γ (corrispondente all'autospazio di autovalore nullo di $\mathbf{A}_{33}$). Se (8.16) è una equazione che rappresenta la parabola e $(a, b) \neq (0, 0)$, l'asse di γ è parallelo alla retta di equazione:*

$$a\,x + b\,y = 0.$$

Si rimanda al Problema 8.33 per un esempio di calcolo di asse di simmetria e vertice di una parabola.

Se γ è una conica a centro di equazione 8.16, il punto $[l, m, 0]$ ha retta polare di equazione affine

$$(l\,a + m\,b)x + (l\,b + m\,c)y + (l\,d + m\,e) = 0,$$

di direzione $[-lb - mc,\, l\,a + m\,b, 0]$, detta *direzione coniugata* di $[\,l\,,\,m\,, 0]$. Le due direzioni coniugate sono ortogonali se:

$$b\,l^{\,2} + m\,(a - c)\,l\; -\; m^{\,2}b = 0 \tag{8.19}$$

La condizione di ortogonalità (8.19) è identicamente nulla (cioè è sempre soddisfatta) se e solo se $b = 0$ e $a = c$, cioè la conica passa per entrambi i punti ciclici.

Se la condizione di ortogonalità (8.19) non è identicamente nulla, il discriminante $\Delta = (a-c)^2+4b^2 > 0$ è positivo ed esiste esattamente una coppia di assi di simmetria ortogonale.

Osservazione 8.5.5. **Classificazione canonica metrica delle coniche a centro** In un sistema di riferimento in cui gli assi di simmetria ortogonale siano gli assi coordinati, una conica a centro assume un'equazione della forma:

$$p\,x^2 + q\,y^2 + 1 = 0 \tag{8.20}$$

che può essere scritta, in modo unico, in una delle seguenti forme, dette *equazioni canoniche metriche*:

a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$ e la conica è una *ellissi senza punti reali* o *ellisse immaginaria*;
b) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica è una *ellissi reale*;
c) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica è una *iperbole.*

Osservazione 8.5.6. $\boldsymbol{\Gamma}$ è una circonferenza se e solo se contiene i punti ciclici $[1, i, 0]$, $[1, -i, 0]$. In tal caso, la sua equazione è $x^2 + y^2 + \gamma = 0$.

Osservazione 8.5.7. La condizione di ortogonalità (8.19) può essere riletta osservando che $[l, m, 0]$ è la direzione di un asse di simmetria se e solo se risultano coincidere le direzioni ad essa coniugate nella polarità indotta da γ e nella polarità indotta dall'assoluto:

$$(l, m)\mathbf{A}_{33} = \rho(l, m)\mathbf{I}_3 \qquad \exists\rho \neq 0. \tag{8.21}$$

Equivalentemente, la condizione si scrive come $\mathbf{A}_{33}(l, m)^t = \rho\mathbf{I}_3(l, m)^t$, che impone la proporzionalità tra $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ e $\mathbf{A}_{33}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\,a + m\,b \\ l\,b + m\,c \end{pmatrix}$. *Dunque ogni asse di simmetria è la polare di un autovettore di* $\mathbf{A}_{33}$ *ed ha come direzione un autovettore di* $\mathbf{A}_{33}$.

Lemma 8.5.8. *Una conica a centro γ ha almeno una coppia di assi di simmetria tra loro ortogonali. In particolare, se (8.16) è una equazione che rappresenta la conica e (λ_0, μ_0) è un autovettore di $\mathbf{A}_{33}$, la retta polare di $[\lambda_0, \mu_0, 0]$, di equazione*

$(a\lambda_0 + b\mu_0)x + (b\lambda_0 + c\mu_0)y + (d\lambda_0 + e\mu_0) = 0$, *è un asse di simmetria. Gli autovalori di* $\mathbf{A}_{33}$ *sono radici del polinomio caratteristico* $t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$*. In dettaglio:*
a) se la matrice $\mathbf{A}_{33}$ *ha due autovalori distinti* k_1 *e* k_2*, allora gli assi di simmetria hanno per direzione gli autovettori corrispondenti, di equazione*

$$\begin{pmatrix} a - k_i & b \\ b & c - k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2.$$

Le intersezioni proprie tra la conica e un asse di simmetria prendono il nome di vertici *di* γ*.*
b) Se la matrice $\mathbf{A}_{33}$ *ha un unico autovalore, la conica a centro è una circonferenza e tutti i diametri sono assi di simmetria; in tal caso, basta prendere una coppia di diametri tra loro ortogonali.*

Si rimanda al Problema 8.32 per un esempio di calcolo di assi di simmetria di coniche a centro.

8.6 Invarianti e coniche in forma canonica

Sia $(x, y, 1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ l'equazione di una conica reale $\mathbf{\Gamma}$. Si denoti con $\mathbf{A}_{33}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando l'ultima e l'ultima colonna; come visto, $\mathbf{A}_{33}$ è la matrice della intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria, nel riferimento associato. Con A_{33} o $|\mathbf{A}_{33}|$ si denota invece il determinante della matrice $\mathbf{A}_{33}$.

Osservazione 8.6.1. det $\mathbf{A}$*, det* $\mathbf{A}_{33}$ *e la traccia di* $\mathbf{A}_{33}$ *sono invarianti metrici di* $\mathbf{\Gamma}$*, cioè sono costanti per cambiamenti di riferimento ortonormale.* Infatti, le formule di cambiamento di riferimento ortogonale sono:

$$\begin{aligned} x &= m_{11}x' + m_{12}y' + d_1 \\ y &= m_{21}x' + m_{22}y' + d_2 \end{aligned} \tag{8.22}$$

che possono essere scritte come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & d_1 \\ m_{21} & m_{22} & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

con $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ matrice ortogonale e $\tilde{\mathbf{M}}^t = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}$. Si osservi, in particolare, che la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & d_1 \\ m_{21} & m_{22} & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a ± 1. Cambiando riferimento, la matrice associata alla conica è $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M}$ e, in particolare, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ hanno lo stesso determinante. Inoltre, la sottomatrice di $\mathbf{A}'$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna è $\mathbf{A}'_{33} = \tilde{\mathbf{M}}^t\mathbf{A}_{33}\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}_{33}\tilde{\mathbf{M}}$ (ricordando che $\tilde{\mathbf{M}}$ è ortogonale). La tesi segue, osservando che, allora, $\mathbf{A}'_{33}$ e $\mathbf{A}_{33}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, i cui coefficienti sono il determinante e la traccia della matrice.

Esempio 8.6.2. Ogni parabola $\mathbf{\Gamma}$ ammette una equazione della forma $a\,y^2 = 2qx$ o anche

$$y^2 = 2\,p\,x \qquad con\, p = (q/a) > 0$$

detta *equazione canonica metrica*; i coefficienti a e q possono essere determinati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} tr\,\mathbf{A}_{33} &= a \\ det\,\mathbf{A} = det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & a & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix} &= -aq^2 \\ q &= \sqrt{-\frac{det\mathbf{A}}{tr\mathbf{A}_{33}}}. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Si rimanda al Problema 8.30 per un esempio numerico.

Esempio 8.6.3. Ogni conica a centro $\mathbf{\Gamma}$ ammette una equazione della forma $ax^2+by^2+c = 0$. Osservando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ det\,\mathbf{A} &= a\,b\,c \\ det\,\mathbf{A}_{33} &= a\,b \\ tr\,\mathbf{A}_{33} &= a + b; \end{aligned}$$

si vede facilmente che a e b *sono gli autovalori di* $\mathbf{A}_{33}$ e $c = \frac{det\mathbf{A}}{det\mathbf{A}_{33}}$.

Osserviamo che è sempre possibile supporre che $|a| < |b|$. L'equazione

$$(a/c)x^2 + (b/c)y^2 + 1 = 0$$

è l'*equazione canonica metrica della conica a centro*.
Discutiamo ora quali casi si presentano, a partire dalla classificazione affine.
i) **Ellisse immaginaria**: $0 < (a/c) < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

ii) **Ellisse a punti reali**: $(a/c) \leq (b/c) < 0$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = -c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

Osserviamo che l'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$: Il valore α è detto *semiasse maggiore*. L'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $x = 0$ è data dai punti $(0, \beta)$ e $(0, -\beta)$: il valore β è detto *semiasse minore*. Nel primo quadrante, i punti reali di $\mathbf{\Gamma}$ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ (per $0 \leq x \leq \alpha$): maggiore è il rapporto β/α e "più schiacciata" risulterà l'ellisse.

Se $\alpha = \beta$, la conica è una circonferenza.

iii) **Iperbole**: $(a/c) < 0 < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha > \beta.$$

L'asse x è detto *asse trasverso*, mentre l'asse y (che non interseca l'iperbole in punti reali) è detto *asse non trasverso*.

Osserviamo che l'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$. L'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $x = x_0$ non ha punti reali per $x_0 < \alpha$. Nel primo quadrante, i punti reali di $\mathbf{\Gamma}$ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ (per $x \geq \alpha$). Gli asintoti hanno equazione $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$. Al crescere dell'ascissa, tende a zero la distanza tra i punti nel primo quadrante aventi la stessa ascissa e appartenenti all'iperbole o all'asintoto.

Si rimanda ai Problemi 8.28-8.29 per esempi relativi alla classificazione metrica.

Ricordando l'Osservazione 7.3.15, se $P \notin \mathbf{\Gamma}$ è un punto che non appartiene ad una conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$, la conica definisce una involuzione naturale sul fascio di rette di centro P: data una retta r per P, si considera il punto di intersezione $Q = r \cap \omega_P$ con la retta polare di P; l'immagine di r nell'involuzione è la retta polare ω_Q, che passa per P per dualità. Le due rette per P tangenti a $\mathbf{\Gamma}$ sono fisse per tale involuzione. Ci si può domandare se, per opportuni punti P, l'involuzione indotta da $\mathbf{\Gamma}$ sul fascio di centro P coincida con l'involuzione indotta dall'assoluto, cioè muti ogni retta per P nella retta per P ad essa ortogonale. I punti con tale proprietà sono detti fuochi della conica:

Definizione 8.6.4. Un *fuoco* F di una conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$ è un punto proprio tale che le tangenti a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da F sono rette isotrope.

Un fuoco è intersezione di due tangenti proprie a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da punti ciclici. Dunque, una conica non degenere ha al massimo 4 fuochi.

Osservazione 8.6.5. Una parabola ha un unico fuoco, poichè per ogni punto ciclico passa una unica retta propria tangente a $\mathbf{\Gamma}$. In un riferimento in cui la parabola ha equazione canonica metrica $x^2 = 2py$, il fuoco ha coordinate $F(0, \frac{p}{2})$. La sua polare, la retta di equazione $y = -\frac{p}{2}$, è detta la *direttrice* della parabola ed è indicata con la lettera d. Si dimostra facilmente che *la parabola $x^2 = 2py$ è il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d.* In particolare, p è la distanza del fuoco dalla direttrice della parabola.

Osservazione 8.6.6. Una ellisse a punti reali (che non sia una circonferenza) ha due fuochi reali e due immaginari coniugati. In un riferimento in cui l'ellisse assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ (con $\alpha > \beta$), i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse maggiore. I punti reali della ellisse sono caratterizzati dalla proprietà che la somma delle distanze da due fuochi reali sia costante.

Osservazione 8.6.7. Una iperbole ha due fuochi reali e due fuochi immaginari coniugati. In un riferimento in cui l'iperbole assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse trasverso, mentre i rimanenti fuochi $(0, \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ appartengono all'asse non trasverso.