3

Curve algebriche piane

In tutto il capitolo, consideriamo fissato un piano reale complessificato nel quale sia assegnato un riferimento cartesiano reale $\mathcal{R} = (O, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

3.1 Il caso di una variabile

Sia $f(x) = f_0 + f_1\, x + \ldots + f_d\, x^d$ un polinomio di grado $d > 0$ a coefficienti complessi nella indeterminata x. In base al teorema fondamentale dell'algebra, si ha che

$$f(x) = f_d(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$$

per opportuni $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ individuati a meno dell'ordine e numeri interi strettamente positivi $m_1, \ldots, m_r$. Si dice che il valore a_i è radice dell'equazione $f(x) = 0$ con *molteplicità algebrica* m_i. Una radice di $f(x) = 0$ è chiamata anche *zero* o *soluzione* dell'equazione $f(x) = 0$ o del polinomio $f(x)$.

Se il polinomio $f(x)$ ha coefficienti reali e a è una sua radice, allora a è reale, oppure, se a è immaginario, risulta che anche il coniugato $\overline{a}$ è una radice di f; inoltre a e $\overline{a}$ hanno la stessa molteplicità.

Fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ in una retta r, ogni punto P è individuato da una coordinata p; diciamo che *il punto* $P(p)$ *soddisfa l'equazione* $f(x) = 0$ *con molteplicità* m se la coordinata p è radice di f con molteplicità algebrica m.

Diciamo che *l'equazione* $f(x)$ *di grado* d *rappresenta (o definisce)* d *punti, contate le molteplicità* . Se $x = cx' + d$ è un cambio di variabile sulla retta, il polinomio $f(cx' + d)$, come polinomio in x', definisce lo stesso insieme di punti, con le stesse molteplicità.

3.2 Curve algebriche piane

Sia $f(x_1, x_2)$ un polinomio di grado $d \geq 1$ a coefficienti complessi nelle indeterminate x_1, x_2. Dato un punto $P(p_1, p_2)$ è possibile valutare il polinomio f nella coppia (p_1, p_2); se $f(p_1, p_2) = 0$ si dice che P annulla o soddisfa l'equazione f, o che P è uno zero di f (una soluzione di f, un punto di $f = 0$).

Le curve di grado 1 sono le rette. Le curve di grado 2 sono dette *coniche*; le curve di grado 3 sono dette *cubiche*.

Definizione 3.2.1. Una *curva algebrica piana di grado* d è il luogo dei punti P le cui coordinate soddisfano una equazione polinomiale $f(x_1, x_2)$ di grado $d \geq 1$:

$$\{P(p_1, p_2) | f(p_1, p_2) = 0\}.$$

Osservazione 3.2.2. La definizione è ben posta, non dipendendo dal riferimento scelto. Se infatti $\mathcal{R}' = (O', R')$ è un altro riferimento reale, le corrispondenti coordinate sono legate da una espressione della forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + c_1 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + c_2 \end{cases}.$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione $f(x_1, x_2) = 0$, si ottiene l'equazione $f(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + c_1, a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + c_2) = 0$, che è polinomiale di grado d in y_1, y_2 e definisce la curva algebrica nel nuovo riferimento. In particolare, la nozione di grado della curva algebrica è ben definita.

Osservazione 3.2.3. Una curva algebrica $f(x_1, x_2) = 0$ è un insieme infinito di punti. In base alla sezione 3.1, ciò è sicuramente vero se $f(x_1, x_2) = 0$ non dipende dalla variabile x_2. Se invece $f(x_1, x_2) = 0$ dipende dalla variabile x_2, si raccolgano i termini scrivendo f come polinomio in x_1 (avente per coefficienti polinomi in x_2):

$$f(x_1, x_2) = a_0(x_2)\, x_1^d + a_1(x_2)\, x_1^{d-1} + \ldots + a_d(x_2);$$

per ipotesi, non tutti i coefficienti $a_i(x_2)$ sono nulli; in particolare, $a_0(x_2), \ldots, a_d(x_2)$ hanno solo un numero finito di radici comuni, cioè di valori che li annullano contemporaneamente. Se $z_2 \in \mathbb{C}$ non è una radice comune dei coefficienti $a_0(x_2), \ldots, a_d(x_2)$, allora il polinomio $a_0(z_2)\, x_1^d + a_1(z_2)\, x_1^{d-1} + \ldots + a_d(z_2)$ è non nullo ed esistono solo un numero finito di valori $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_1, z_2) = 0$.

Osservazione 3.2.4. Anche se l'equazione di una curva algebrica è reale, è possibile che la curva non abbia nessun punto reale. Ad esempio, la curva $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ non ha punti reali. La curva $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ha invece un solo punto reale, l'origine.

Osservazione 3.2.5. **Equazioni e componenti di una curva algebrica** Se $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, allora i polinomi $f(x_1, x_2)$ e $c\, f(x_1, x_2)$ definiscono la stessa curva. Se f definisce una curva $\mathcal{C}$ e g una curva $\mathcal{D}$, allora il prodotto $f\, g$ definisce una curva i cui punti sono l'unione dei punti di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. In particolare, l'insieme delle soluzioni di $f(x_1, x_2) = 0$ coincide con l'insieme delle soluzioni di $[f(x_1, x_2)]^2 = 0$, o di tutte le potenze f^n, $n \in \mathbf{N}$. Utilizziamo la notazione:

$$f^n(x_1, x_2) = [f(x_1, x_2)]^n.$$

Introduciamo la definizione seguente:

Definizione 3.2.6. Un polinomio g si dice *irriducibile* se dalla scrittura $g = hk$ segue che h o k è costante.

Definizione 3.2.7. Una curva si dice *irriducibile* se è definita da un polinomio irriducibile. La curva si dice *riducibile* altrimenti.

Le curve irriducibili individuano la loro equazione a meno di un fattore costante non nullo:

Teorema 3.2.8. *Se $f = 0$ e $g = 0$ definiscono la stessa curva irriducibile, allora $f = c\,g$ con $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.*

Dato un qualsiasi polinomio $f(x_1, x_2)$ di grado $d > 1$, è possibile scriverlo, in modo essenzialmente unico, come prodotto di fattori irriducibili:

$$f(x_1, x_2) = f_1^{r_1}(x_1, x_2) \cdots f_n^{r_n}(x_1, x_2),$$

ove, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si abbia $r_i > 0, f_i$ sia irriducibile non costante e nessuno tra i polinomi f_1, ..., f_n sia multiplo costante di un altro.

Definizione 3.2.9. Nelle ipotesi precedenti, la curva $f = 0$ è l'unione delle curve distinte $f_1 = 0$, ..., $f_n = 0$ con molteplicità r_1, ..., r_n rispettivamente.

In base al teorema 3.2.8, ogni curva $\mathcal{C}$ può essere scritta in modo unico come unione di curve irriducibili $\mathcal{C}_i$ distinte con molteplicità $r_i > 0$. Ogni tale curva irriducibile è detta *componente irriducibile* e vale l'uguaglianza:

$$grado(\mathcal{C}) = \sum_i r_i\, grado(\mathcal{C}_i).$$

Ad esempio, se $\mathcal{C}$ è una conica, si presentano le seguenti possibilità: $\mathcal{C}$ è irriducibile, oppure, se è riducibile, le sue componenti sono due rette distinte o una retta con molteplicità 2.

Osservazione 3.2.10. **Curve reali** Se una curva è *reale* (cioè ha una equazione a coefficienti reali) allora le componenti sono reali o immaginarie coniugate, con la stessa molteplicità. Una conica reale riducibile formata da due componenti distinte ha due componenti reali (e in questo caso ha infiniti punti reali) oppure componenti complesse coniugata (e in tal caso ha 1 o 0 punti reali). Se una conica reale ha una unica componente irriducibile di molteplicità 2, tale componente è una retta reale, e la conica ha infiniti punti reali.

Esempio 3.2.11. Le curve algebriche di grado 2 sono dette *coniche*. Esempi sono dati dall'*ellisse* di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l' di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e la *parabola* di equazione $y^2 = 2px$ in $\mathbb{E}_2$ complessificato $(a, b, p \neq 0)$.

3.3 Circonferenza

Consideriamo fissato un piano euclideo complessificato nel quale sia assegnato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ monometrico ortogonale.

Definizione 3.3.1. Fissati un numero complesso r ed un punto $C(c_1, c_2)$, la *circonferenza* γ di *centro* C e *raggio* r è il luogo dei punti P la cui distanza da C sia uguale a $\pm r$.

Un punto $P(x_1, x_2)$ appartiene dunque alla circonferenza γ se e solo se

$$< \mathbf{PC}, \mathbf{PC} >= r^2.$$

Ricordando che $< \mathbf{PC}, \mathbf{PC} >= (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2$, si ricava che l'equazione dei punti di γ è data da

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \tag{3.1}$$

o da una qualsiasi equazione ottenuta moltiplicandola per una costante non nulla. Sviluppando i prodotti, l'equazione (3.1) assume la forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0 \tag{3.2}$$

ove la relazione tra i coefficienti dell'equazione e il raggio e il centro assegnati è data da:

$$a = -2\,c_1 \quad b = -2\,c_2\,, \quad c = c_1^2 + c_2^2 - r^2. \tag{3.3}$$

Invertendo tali uguaglianze, si ricava che

$$c_1 = -\frac{a}{2}\,, \qquad c_2 = -\frac{b}{2}\,, \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \tag{3.4}$$

ove la radice quadrata (una qualunque) è nel campo dei complessi. Si osservi che, viceversa, ogni equazione della forma (3.2), con a, b, c complessi, risulta essere l'equazione di una circonferenza nel riferimento assegnato, avente centro nel punto (c_1, c_2) e raggio r definiti da (3.4). Riassumendo:

Osservazione 3.3.2. Una circonferenza è una curva algebrica piana che ammette una equazione della forma

$$\alpha(x_1^2 + x_2^2) + \beta\,x_1 + \gamma\,x_2 + \delta = 0 \tag{3.5}$$

con $\alpha(\neq 0), \beta, \gamma, \delta$ numeri complessi; le coordinate (c_1, c_2) del centro sono date da $c_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $c_2 = -\frac{\gamma}{2\alpha}$ e l'equazione (3.5) è detta *equazione cartesiana della circonferenza*.

Esempio 3.3.3. La circonferenza di centro $C(2+i, 5i)$ e raggio $r = 3 + 2i$ ha equazione $(x_1 - 2 - i)^2 + (x_2 - 5i)^2 = (3 + 2i)^2$.

Esempio 3.3.4. L'equazione $x_1^2+x_2^2-(6+2i)x_1-(4i)x_2-19-14i=0$ è una circonferenza di centro $C(3+i,2i)$ e raggio $r=(5+2i)$.

Osservazione 3.3.5. **Metodo del completamento dei quadrati** Data l'equazione di una circonferenza, per determinare le coordinate del centro, è possibile utilizzare il *metodo del completamento dei quadrati*, scrivendo i termini in x_1 come $x_1^2+a\,x_1 = (x_1+\frac{a}{2})^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ e i termini in x_2 come $x_2^2+b\,x_2=(x_2+\frac{b}{2})^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Osservazione 3.3.6. **Circonferenze di raggio nullo** La circonferenza di raggio nullo e centro $C(c_1,c_2)$ ha equazione $(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2=0$; poichè

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2=[(x_1-c_1)+i(x_2-c_2)]\,[(x_1-c_1)-i(x_2-c_2)]$$

la circonferenza è riducibile ed è unione delle rette di equazione $x_1+ix_2-c_1-ic_2=0$ e $x_1-ix_2-c_1+ic_2=0$. *La circonferenza di centro C e raggio nullo è dunque l'unione delle rette isotrope per C.*

La curva coniugata della circonferenza di centro C e raggio $\pm r$ è la circonferenza di centro $\overline{P}$ e raggio $\pm\overline{r}$.

Osservazione 3.3.7. **Circonferenze reali** Una circonferenza γ è reale se e solo se coincide con la circonferenza coniugata. Posta l'equazione di γ nella forma (3.2), la circonferenza γ è reale se e solo se a, b, c sono reali: in particolare, il centro C della circonferenza deve essere reale. Il raggio r non è necessariamente reale: ciò accade se e solo se

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0. \tag{3.6}$$

Nel piano euclideo non complessificato, le circonferenze sono reali, con centro e raggio reale: in tale situazione, una curva di equazione (3.2) è detta circonferenza se e solo se i coefficienti sono reali e soddisfano la (3.6).

Esempio 3.3.8. La circonferenza di equazione $x_1^2+x_2^2-3=0$ è reale e ha infiniti punti reali.

Esempio 3.3.9. La circonferenza di equazione $x_1^2+x_2^2+1=0$ è reale ma non ha nessun punto reale.

Esempio 3.3.10. La circonferenza di equazione $x_1^2+x_2^2=0$ è reale e ha un unico punto reale, l'origine.

3.4 Intersezione e tangenza tra circonferenza e retta.

Siano assegnate una circonferenza γ di equazione $(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2-r^2=0$ ed una retta s di equazione $a'\,x_1+b'\,x_2+c'=0$. Un punto $P(p_1,p_2)$ appartiene all'intersezione di γ e s se e solo se le sue coordinate (p_1, p_2) soddisfano sia l'equazione di γ che quella di s, cioè le sue coordinate soddisfano il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} a'\,x_1 + b'\,x_2 + c' = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0 \end{cases}$$

Procedendo per sostituzione, si elimina una delle due variabili e ci si riconduce ad una equazione al più di secondo grado nell'altra variabile: ad esempio, se $a' \neq 0$, si può ricavare $x_1 = -\frac{b'\,x_2 + c'}{a'}$ e sostituirla nell'equazione della circonferenza, ottenendo l'espressione $(-\frac{b'\,x_2+c'}{a'})^2 + x_2^2 + a\,(-\frac{b'\,x_2+c'}{a'}) + b\,x_2 + c = 0$, che è una equazione di grado ≤ 2 in x_2 detta *risultante in* x_2 *del sistema*. Ogni radice del risultante in x_2 fornisce l'ordinata di un punto di intersezione tra γ e s: la corrispondente ascissa si determina per sostituzione grazie all'equazione della retta. Se invece $b' \neq 0$, si procede in modo analogo sostituendo l'espressione di x_2 e ricavando il *risultante in* x_1 *del sistema*. Ogni radice del risultante in x_1 fornisce l'ascissa di un punto di intersezione tra γ e s: la corrispondente ordinata si determina per sostituzione grazie all'equazione della retta.

Alternativamente, si può procedere all'analisi dell'intersezione tra la retta s e la circonferenza γ scrivendo la retta s in forma parametrica:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t\,l \\ x_2 = p_2 + t\,m \end{cases}, t \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

ove $P(p_1, p_2)$ sia un punto di s e $\mathbf{v} = (l, m)$ un suo vettore direttore (ad esempio, $l = -b'$ e $m = a$). Sostituendo l'espressione parametrica dei punti di s nell'equazione della circonferenza, si determina per quali valori del parametro t il punto della retta s appartiene anche alla circonferenza. Si ricava l'equazione:

$$(p_1 + t\,l)^2 + (p_2 + t\,m)^2 + a\,(p_1 + t\,l) + b\,(p_2 + t\,m) + c = 0$$

Svolgendo i conti e raccogliendo i termini in t, l'equazione ottenuta diventa:

$$(l^2 + m^2)t^2 + (2lp_1 + 2mp_2 + al + bm)t + (p_1^2 + p_2^2 + ap_1 + bp_2 + c) = 0. \tag{3.8}$$

Lemma 3.4.1. *I coefficienti dell'equazione (3.8) soddisfano le seguenti proprietà:*

i) Il termine di grado massimo si annulla se e solo se la retta s è isotropa. Dunque, l'equazione (3.8) è di secondo grado se e solo se la retta s non è isotropa.

ii) Il coefficiente del termine di grado 1 si annulla se e solo se la retta s è ortogonale al vettore **CP***, indicando con C il centro di γ.*

iii) Il termine noto si annulla se e solo se $P \in \gamma$.

Dimostrazione. i) Segue ricordando che una retta è isotropa se e solo se un suo vettore direttore è isotropo.

ii) La condizione $2lp_1+2mp_2+al+bm=0$ di annullamento del coefficiente di t può essere riscritta come:

$$2[l(p_1+\frac{a}{2})+m(p_2+\frac{b}{2})]=0 \tag{3.9}$$

Ricordando che le coordinate del centro $C(c_1,c_2)$ della circonferenza γ sono date da $c_1=-\frac{a}{2}$ e $c_2=-\frac{b}{2}$, la condizione di annullamento del termine di primo grado è data da

$$l(p_1-c_1)+m(p_2-c_2)=0$$

cioè dall'ortogonalità tra il vettore direttore (l,m) della retta s e il vettore **CP**.

iii) Il termine noto si annulla se e solo se il punto $P(p_1,p_2)$ appartiene alla circonferenza: tale punto, infatti, corrisponde alla radice $t=0$ dell'equazione (3.8).

□

Per il punto i) del Lemma precedente, se la retta s non è isotropa, l'equazione ammette due soluzioni distinte $t+ =$ e t_-, a meno che il discriminante dell'equazione non si annulli. In corrispondenza di tali valori del parametro, si determinano due punti distinti A_+ e A_- sulla retta s. Qualora il discriminante sia nullo, l'intersezione tra s e γ è formata da un unico punto A: diciamo che tale punto compare con molteplicità due nell'intersezione (attribuendo al punto la molteplicità algebrica del corrispondente parametro come soluzione di (3.8)).

Riassumendo:

Proposizione 3.4.2. Intersezione tra una circonferenza e una retta non isotropa *Se la retta s non è isotropa, l'intersezione tra s e una circonferenza γ è costituita da due punti, contata la molteplicità.*

Corollario 3.4.3. *Una retta non isotropa s interseca una circonferenza γ in un punto Q con molteplicità 2 se e solo se $Q\in s\cap\gamma$ e s è ortogonale al vettore* **CQ**. *Dunque una retta (non isotropa) s è tangente a γ in un punto $Q\in\gamma$ se e solo se s passa per Q ed è ortogonale a* **CQ**.

Dimostrazione. Il punto di tangenza $Q\in s\cap\gamma$ e possiamo porre $Q=P$ nelle equazioni (3.7) e il termina noto di (3.8) diventa nullo. Il punto Q ha allora molteplicità 2 nell'intersezione se e solo se la radice $t=0$ ha molteplicità 2, cioè se si annulla anche il termine di grado 1 in t. Ora basta applicare il Lemma 3.4.1, ii).

□

Se invece la retta s è isotropa, sicuramente l'equazione (3.8) non ha grado 2. Si possono presentare casi diversi:

i) se l'equazione (3.8) è di primo grado allora il vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m)$ della retta s e il vettore **CP** non sono tra loro ortogonali per il Lemma 3.4.1, ii). In particolare, essendo la retta isotropa, **CP** non può essere parallelo alla retta e s non passa per il centro C di γ. *L'equazione (3.8) ha grado 1 esattamente quando la retta s è isotropa e non passa per il centro C.* Dunque, *se la retta s è isotropa ma non passa per il centro C, allora l'intersezione tra la retta s e la circonferenza è costituita da un solo punto, con molteplicità 1.*

ii) Se si annulla anche il termine di primo grado (cioè la retta isotropa passa per il centro C), ma non si annulla il termine noto, l'equazione (3.8) ha esattamente grado 0 e non ammette alcuna soluzione. In tal caso, la retta s e la circonferenza non hanno punti di intersezione. Si osservi che, in tal caso, la retta isotropa è interamente formata da punti a distanza nulla da C, mentre il raggio della circonferenza è non nullo.

iii) Qualora si annullino tutti i termini dell'equazione (3.8), essa è soddisfatta per ogni valore del parametro t: dunque la retta s è interamente contenuta nella circonferenza γ e il quadrato del raggio della circonferenza è dato da $(p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 = 0$. Dunque la circonferenza γ ha raggio nullo, e s è una delle sue due componenti.

Riassumendo:

Proposizione 3.4.4. Intersezione tra una circonferenza e una retta isotropa *Se s è una retta isotropa passante per il centro C della circonferenza γ, allora o è interamente contenuta in γ (cioè la circonferenza ha raggio nullo) o non interseca γ . Se invece la retta isotropa non passa per il centro, allora interseca la circonferenza in un solo punto, con molteplicità 1.*

Abbiamo dimostrato, inoltre, la seguente proposizione:

Proposizione 3.4.5. Circonferenze riducibili *Una circonferenza è riducibile se e solo se ha raggio nullo.*

Definizione 3.4.6. Una retta s si dice *tangente* ad una circonferenza irriducibile γ se la loro intersezione è costituita da un punto A con molteplicità 2. Si dice anche che s è tangente a γ nel punto A.

Si osservi che una retta può essere tangente ad una circonferenza in al più un punto.

Illustriamo alcuni esempi in cui sia la retta che la circonferenza sono reali.

Esempio 3.4.7. Siano γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e s di equazione $x - y = 0$. La retta s passa per il centro O di γ. L'intersezione è formata da due punti distinti.

Esempio 3.4.8. Siano γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e s di equazione $x = 1$. La retta s è tangente. L'intersezione è formata dal punto $(1, 0)$.

Esempio 3.4.9. Siano γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e s di equazione $x - y = 15$. L'intersezione è formata da due punti immaginari complessi coniugati.

Se γ è una circonferenza irriducibile e $P(p_1, p_2) \in \gamma$, esiste una sola retta per P che sia tangente a γ:

Definizione 3.4.10. Se $P(p_1, p_2) \in \gamma$, l'unica retta per P che sia tangente a γ viene detta la *retta tangente a* γ *in* P.

Si osservi che *la retta tangente a* γ *in* P *è non isotropa e ortogonale al vettore* $\mathbf{CP}$, se C è il centro di γ. Ricordando le coordinate $C(c_1, c_2)$ del centro, si ricava il vettore $\mathbf{CP} = (p_1 - c_1, p_2 - c_2)$; *l'equazione della retta tangente a* γ *in* $P(p_1, p_2) \in \gamma$, *è dunque:*

$$(p_1 - c_1)(x_1 - p_1) + (p_2 - c_2)(x_2 - p_2) = 0. \tag{3.10}$$

Osservazione 3.4.11. Si sviluppi l'equazione della circonferenza γ nella forma:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0. \tag{3.11}$$

Ricordando che $P \in \gamma$, si ricava la relazione:

$$-(p_1^2 + p_2^2) = a\,p_1 + b\,p_2 + c; \tag{3.12}$$

Sostituendo tale uguaglianza nell'equazione (3.10) e ricordando il legame (3.4) tra le ccordinate del centro e l'equazione della circonferenza, l'equazione (3.10) della retta tangente a γ nel punto $P(p_1, p_2) \in \gamma$ diviene:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + a\frac{p_1 + x_1}{2} + b\frac{p_2 + x_2}{2} + c = 0. \tag{3.13}$$

Tale formula si ricostruisce dall'equazione (3.11) con la *regola degli sdoppiamenti* che consiste nel sostituire

- x_1^2 con $p_1\,x_1$,
- x_2^2 con $p_2\,x_2$,
- x_1 con $\frac{p_1+x_1}{2}$,
- x_2 con $\frac{p_2+x_2}{2}$.

Esempio 3.4.12. Se γ è la circonferenza di equazione $x_1^2 + x_2^2 - 7x_1 - 3 = 0$, facendo uso della regola degli sdoppiamenti si ricava che la tangente a γ in $P(1, 3) \in \gamma$ ha equazione $x_1 + 3\,x_2 - 7(\frac{x_1+1}{2}) - 3 = 0$.

Osservazione 3.4.13. Se la circonferenza γ passa per l'origine O, la sua equazione è della forma $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + a\,x_1 + b\,x_2 = 0$. La tangente a γ nell'origine è data da

$$a\,x_1 + b\,x_2 = 0 \tag{3.14}$$

e si ottiene considerando solo i termini lineari dell'equazione di γ.

Esempio 3.4.14. La tangente in O a γ di equazione $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 12\,x_2 = 0$ è la retta di equazione $-5x_1 + 12\,x_2 = 0$.

3.5 Polarità definita da una circonferenza

Sia γ una circonferenza irriducibile definita dall'equazione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0. \tag{3.15}$$

L'equazione (3.13) che predice l'equazione della tangente a γ in un suo punto, permette di associare una retta ad ogni punto del piano distinto dal centro della circonferenza:

Definizione 3.5.1. Retta polare di un punto rispetto ad una circonferenza Per ogni punto $P(p_1, p_2)$ distinto dal centro C della circonferenza irriducibile γ di equazione (3.15), la retta r_P definita dall'equazione

$$p_1x_1 + p_2x_2 + a\frac{p_1 + x_1}{2} + b\frac{p_2 + x_2}{2} + c = 0. \tag{3.16}$$

è detta *retta polare di P rispetto alla circonferenza γ.*

Si osservi che l'equazione (3.16) non definisce una retta se P è il centro della circonferenza.

Proposizione 3.5.2. *Sia fissata una circonferenza irriducibile γ di centro C. La polarità è una applicazione biettiva tra il piano, privato del centro C, e l'insieme delle rette del piano che non passano per il centro C.*
Inoltre, se P è un punto distinto dal centro C e si denota con r_P la polare di P rispetto a γ, valgono le seguenti proprietà:
a) $P \in r_P$ se e solo se $P \in \gamma$.
b) la retta polare r_P è ortogonale al vettore $\mathbf{CP}$.
c) se $P \in \gamma$, allora r_P coincide con la tangente a γ in P.

Dimostrazione. Per mostrare a), basta sostituire le coordinate di P nell'equazione (3.16)della retta polare. L'affermazione c) è conseguenza di b), in base al Corollario 3.4.3. Basta quindi mostrare b). Raccogliendo i termini dell'equazione 3.16 nelle variabili x_1 e x_2, si ottiene l'equazione cartesiana $(p_1 + \frac{a}{2})x_1 + (p_2 + \frac{b}{2})x_2 + \frac{ap_1}{2} + \frac{bp_2}{2} + c = 0$ della retta polare di P: si deduce immediatamente che il vettore $\mathbf{CP} = (p_1 + \frac{a}{2}, p_2 + \frac{b}{2})$ è ortogonale alla polare r_P.

□

Esercizi svolti

Si consideri il piano euclideo complessificato, nel quale sia fissato un riferimento reale ortonormale.

CIRCONFERENZE

Problema 3.1. *Sia γ la circonferenza di centro $C(3-i, 1+2i)$ e raggio $r = (5-i)$. Determinare l'equazione di γ.*

Soluzione. L'equazione è data da $[x_1 - (3-i)]^2 + [x_2 - (1+2i)]^2 = (5-i)^2$, cioè $x_1^2 + x_2^2 - (6-2i)x_1 - (2+4i)x_2 - 17 + 8i = 0$.

Problema 3.2. *Determina una equazione cartesiana della circonferenza γ di centro $C(3-i, 1+2i)$ e passante per il punto $B(1+i, 2-i)$.*

Soluzione. Il raggio della circonferenze γ è pari alla distanza tra C e B, ed è dunque $\sqrt{[1+i-(3-i)]^2 + [2-i-(1+2i)]^2} = \sqrt{[-2+2i]^2 + [1-3i]^2} = \sqrt{-8-14i}$. L'equazione di γ è quindi data da $(x_1 - 3 + i)^2 + (x_2 - 1 - 2i)^2 = -8 - 14i$.

Problema 3.3. Intersezione tra retta e circonferenza *Sia γ la circonferenza di equazione $x_1^2 + x_2^2 - 2ix_1 - x_2 - 2 = 0$.*
a) Determinare al centro e il raggio di γ.
b) Determinare le intersezioni di γ con la retta s_1 di equazione $2ix_1 + x_2 = 0$.
c) Determinare le intersezioni di γ con la retta s_2 di equazione

$$2x_1 - x_2 - 2 - 2i = 0.$$

d) Determinare le intersezioni di γ con la retta u di equazione $ix_1 + x_2 = 0$.
e) Dopo aver verificato che il punto $D(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ appartiene a γ, determinare una equazione cartesiana per la retta tangente a γ in D.
f) Determinare i punti di intersezione tra γ e l'asse x_2. Per ogni tale punto Q, determinare una equazione cartesiana della tangente a γ in Q.
g) Determinare una equazione cartesiana per la retta polare di $E(2, 3-i)$ rispetto a γ (la retta polare è definita in E?)

Soluzione. a) Applicando le relazioni (3.4), si ricavano le coordinate del centro $C(c_1, c_2)$ e il raggio r:

$$c_1 = -\frac{-2i}{2} = i\,, \qquad c_2 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}\,, \qquad r = \sqrt{(-i)^2 + (1)^2 + 2} = \sqrt{2}.$$

b) Osserviamo che s_1 non è isotropa. Dunque, per la Proposizione 3.4.2, l'intersezione sará composta da due punti distinti con molteplicità 1 oppure da un punto con molteplicità 2. Per determinare i punti nell'intersezione tra γ e s_1, si cercano le soluzioni del sistema $x_1 + 2ix_2 = 0, x_1^2 + x_2^2 - 2ix_1 - x_2 - 2 = 0$. Procedendo come proposto all'inizio del paragrafo 3.4, si studia il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 = -2ix_2 \\ (-2ix_2)^2 + x_2^2 - 2i(-2i)x_2 - x_2 - 2 = -3x_2^2 - 5x_2 - 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -3(x_2 - \frac{-5+\sqrt{17}}{2})(x_2 + \frac{5+\sqrt{17}}{2}) = 0 \end{cases}$$

L'intersezione tra s_1 e γ è composta da due punti distinti $A_1((5-\sqrt{17})i, \frac{-5+\sqrt{17}}{2})$ e $A_2(i(5+\sqrt{17}), \frac{-5-\sqrt{17}}{2})$, entrambi con molteplicità 1.
c) Osserviamo che la retta s_2 non è isotropa. Dunque, per la Proposizione 3.4.2, l'intersezione sará composta da due punti distinti con molteplicità 1 oppure da un punto con molteplicità 2.

Primo modo Per determinare i punti nell'intersezione tra γ e s_2, si cercano le soluzioni del sistema $2x_1 - x_2 - 6 - 2i = 0, x_1^2 + x_2^2 - 2ix_1 - x_2 - 2 = 0$. Procedendo come proposto all'inizio del paragrafo 3.4, si studia il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2 - 2i \\ x_1^2 + (2x_1 - 2 - 2i)^2 - 2ix_1 - (2x_1 - 2 - 2i) - 2 = \\ \qquad = 5x_1^2 - (10+10i)x_1 + 10i \end{cases}$$

L'equazione quadratica $x_1^2 - (2+2i)x_1 + 2i = 0$ nel sistema ha discriminante $(2+2i)^2 - 8i = 0$ e un'unica soluzione $x_1 = 1+i$. L'intersezione tra s_2 e γ è dunque composta da un unico punto $B(1+i, 0)$, che necessariamente compare con molteplicità 2 perché la retta s_2 non è isotropa.

Secondo modo Per determinare i punti nell'intersezione tra γ e s_2, pongo s_2 in equazione parametrica:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2 - 2i + 2t \end{cases} .$$

Sostituendo le equazioni parametriche di s_2 nell'equazione di γ trovo l'equazione

$$t^2 + (-2-2i+2t)^2 - 2it - (-2-2i+2t) - 2 = 5t^2 - (10+10i)t + 10i = 0$$

le cui soluzioni individuano i valori del parametro t corrispondenti a punti dell'intersezione, nella parametrizzazione utilizzata. L'equazione ha una unica soluzione $t = 1+i$ con molteplicità algebrica 2. Dunque s_2 interseca γ in un unico punto B, con molteplicità di intersezione 2. Il punto B è il punto di s_2 corrispondente al valore $t = 1+i$, e dunque $B(1+i, 0)$.
d) Osserviamo che la retta u è isotropa. Dunque, per la Proposizione 3.4.4, l'intersezione sará u (ed in tal caso la circonferenza ha raggio nullo) oppure è vuota o composta da un punto con molteplicità 1. Poichè, in base al punto a), la circonferenza γ ha raggio non nullo, si esclude la prima ipotesi.

Procedendo come proposto all'inizio del paragrafo 3.4, si studia il sistema

$$\begin{cases} x_2 = -ix_1 \\ x_1^2 + (-ix_1)^2 - 2ix_1 - (-ix_1) - 2 = -ix_1 - 2 = -i(x_1 - 2i) \end{cases}$$

L'intersezione tra s_2 e γ è composta dal punto $E(2i, 2)$ con molteplicità 1.
e) Per controllare l'appartenenza di D a γ, basta controllare che le sue coordinate soddisfano l'equazione di γ. Sostituendo le coordinate di D nell'equazione di γ si trova $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - 2 = 0$: dunque $D \in \gamma$. La tangente a γ in D si ricava equivalentemente dalla formula (3.10) o (3.13), ed è uguale a : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2 - ix_1 - \frac{1+\sqrt{5}+2x_2}{4} - 2 = -ix_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x_2 - \frac{5+\sqrt{5}}{4} = 0$.
f) Per determinare un punto $Q(0, q)$ nell'intersezione tra γ e l'asse x_2 occorre trovare una soluzione del sistema $x_1 = 0, x_1^2 + x_2^2 - 2ix_1 - x_2 - 2 = 0$ o, equivalentemente, $x_1 = 0, x_2^2 - x_2 - 2 = 0$. Poichè $x_2^2 - x_2 - 2 = (x_2 - 2)(x_2 + 1)$, si ricava che