Corso di Laurea in

Matematica

Appunti di

Geometria

Prof. Ciro Ciliberto

(aa. 2005-06)

11 novembre 2005

Indice

Capitolo 1

Spazi Affini

1.1 La nozione di spazio affine.

Siano dati un insieme A non vuoto, i cui elementi si diranno *punti*, e uno spazio vettoriale V su un campo K. Sia data inoltre una applicazione:

$$\begin{array}{rccc} f: & A \times A & \rightarrow & V \\ & (P, Q) & \mapsto & f(P, Q). \end{array} \tag{1.1}$$

Noi denoteremo il vettore $f(P, Q)$ col simbolo $\{PQ\}$ oppure col simbolo $Q - P$.

Si dice che l'applicazione f determina una *struttura di spazio affine* su A se sono verificate le seguenti proprietá:

(AF1) per ogni punto P di A e per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste un unico punto Q di A tale che $\{PQ\} = Q - P = \mathbf{v}$;

(AF2) per ogni terna (P, Q, R) di punti di A si ha:

$$\{PQ\} + \{QR\} = \{PR\} \tag{1.2}$$

ossia

$$(Q - P) + (R - Q) = R - P. \tag{1.3}$$

Se f verifica le proprietá sopra enunciate, l'insieme A si dice uno *spazio affine sul campo* K; lo spazio vettoriale V è detto allora *lo spazio vettoriale dei vettori liberi* di A, e si denota pure col simbolo $V(A)$.

Se $V(A)$ ha dimensione finita, tale dimensione si dice *dimensione dello spazio affine* A sul campo K e si denota col simbolo $\dim_K A$, ovvero più semplicemente col simbolo $\dim A$ se si sottointende il campo K su cui A è spazio affine. Gli spazi affini di dimensione 1 (risp. 2) si dicono *rette* (risp. *piani*) *affini*.

Notiamo che ogni spazio affine A su un campo K è pure uno spazio affine su un qualunque sottocampo K' di K in quanto $V(A)$ è pure un K'-spazio vettoriale.

Esempio 1.1.1 Lo spazio affine della geometria euclidea. Sia Ω l'insieme dei punti dello spazio della geometria euclidea e sia $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}^3$ dei vettori geometrici dello spazio ([AL], cap. 1 e 2, di cui conserviamo qui le notazioni). L'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega \times \Omega & \to & \mathcal{V} \\ & (P, Q) & \mapsto & \{PQ\} \end{array} \tag{1.4}$$

determina una struttura di spazio affine reale di dimensione 3. Infatti la (AF1) vale in virtù della proposizione (2.1) di [AL]. Inoltre, la (AF2) vale per la definizione stessa di somma in $\mathcal{V}$. Con questa struttura di spazio affine, Ω si dice *lo spazio affine della geometria euclidea.*

Nello stesso modo si vede che i punti del piano (risp. di una retta) riempiono uno spazio affine di dimensione 2 (risp. 1) su $\mathbf{R}$.

Esempio 1.1.2 Lo spazio affine attaccato ad uno spazio vettoriale. Sia V un K-spazio vettoriale. L'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & V \\ & (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto & \mathbf{v} - \mathbf{w} \end{array} \tag{1.5}$$

determina, come subito si verifica, una struttura di spazio affine su V. Nel seguito, uno spazio vettoriale su un campo verrà sempre pensato come munito di tale struttura di spazio affine sullo stesso campo.

Esempio 1.1.3 Lo spazio affine numerico su un campo. Un caso particolare dell'esempio precedente è quello dello spazio affine numerico sullo spazio vettoriale K^n. Tale spazio affine si dice *spazio affine numerico di dimensione n sul campo K* e si denota col simbolo $\mathbf{A}^n_K$ o semplicemente col simbolo $\mathbf{A}^n$ se non vi è equivoco nella considerazione del campo K. Gli elementi di $\mathbf{A}^n$, che si dicono *vettori numerici di dimensione n su K*, verranno pensati come vettori riga ovvero come vettori colonna.

Esempio 1.1.4 Strutture indotte. Sia A uno spazio affine su un campo, sia B un insieme e sia $g : B \to A$ una biezione. L'applicazione:

$$\begin{array}{rccl} f: & B \times B & \to & V(A \\ & (P,Q) & \mapsto & \{g(P), g(Q)\} \end{array} \tag{1.6}$$

determina, come subito si verifica, una struttura di spazio affine anche su B, con $V(B) = V(A)$. Tale struttura si dice *indotta* su B dalla applicazione f. Si noti che a differenti biezioni corrispondono differenti strutture di spazio affine su B.

1.2 Proprietà elementari degli spazi affini.

Proviamo la seguente:

Proposizione 1.2.1 *Sia A uno spazio affine sul campo K. Si ha:*
a) per ogni punto $P \in A$ si ha $\{PP\} = \mathbf{0}$ ossia $P - P = \mathbf{0}$;
b) per ogni coppia (P,Q) di punti di A si ha $\{PQ\} = -\{QP\}$ ossia $Q - P = -(P - Q)$.

DIM. La a) segue dalla relazione $\{PQ\} + \{QR\} = \{PR\}$ ponendo $P = Q = R$. La b) segue dalla stessa relazione ponendo $P = R$. $\triangle$

In virtù della (AF2), possiamo definire una applicazione:

$$g : A \times V \to A$$

nel modo seguente. Data una coppia $(P, \mathbf{v}) \in A \times V$, $g(P, \mathbf{v})$ è per definizione, l'unico punto $Q \in A$ tale che $Q - P = \mathbf{v}$. In seguito scriveremo

$$P + \mathbf{v}$$

per denotare il punto $g(P, \mathbf{v})$ di A e $P - \mathbf{v}$ per denotare il punto $P + (-\mathbf{v})$.

Proposizione 1.2.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) per ogni $P \in A$ si ha $P + \mathbf{0} = P$;

(2) per ogni $P \in A$ e per ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di vettori di V si ha $P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (tale punto si denota con $P + \mathbf{v} + \mathbf{w}$);

(3) se P, Q, R ed S sono punti di A e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di V tali che $P = Q + \mathbf{v}$ e $R = S + \mathbf{w}$, allora $P - R = Q - S + (\mathbf{v} - \mathbf{w})$;

(4) se P, Q, R ed S sono punti di A tali che $Q - P = S - R$ allora si ha $S - Q = R - P$.

Dim. La (a) segue dalla (a) della proposizione (1.5). Proviamo la (b). Poniamo $Q = P + \mathbf{v}$ e $R = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. Si ha:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (Q - P) + (R - Q) = R - P \Leftrightarrow (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = R = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}). \tag{1.7}$$

Proviamo la (c). Si ha:

$$\begin{aligned} R + (Q - S) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= (S + \mathbf{w}) + [(Q - S) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})] = \\ &= (S + \mathbf{w}) + [(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + (Q - S)] = \\ &= [(S + \mathbf{w}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})] + (Q - S) = \\ &= [(S + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w} + \mathbf{v})] + (Q - S) = \\ &= [((S + \mathbf{w}) - \mathbf{w}) + \mathbf{v}] + (Q - S) = \\ &= (S + \mathbf{v} + (Q - S) = \\ &= S + (\mathbf{v} + (Q - S)) = \\ &= S + ((Q - S) + \mathbf{v}) = \\ &= (S + (Q - S)) + \mathbf{v} = \\ &= Q + \mathbf{v} = \\ &= P \end{aligned} \tag{1.8}$$

e dunque:

$$P - R = (Q - S) + \mathbf{v}. \tag{1.9}$$

Proviamo la (d). Si ha:

$$S - Q = (S - P) + (P - Q) = (S - P) + (R - S) = R - P. \tag{1.10}$$

△

Notiamo esplicitamente che la (d) della proposizione precedente si riduce, nel caso dello spazio affine della geometria euclidea, alla ben nota regola del parallelogramma.

Fissiamo ora un punto qualunque O di A e consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} g_O : \quad V(A) &\rightarrow A \\ \mathbf{v} &\mapsto O + \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dalla (AF2) segue che g_O è una biiezione. Essa induce una struttura di K-spazio vettoriale su A isomorfo a $V(A)$ il cui vettore nullo è O. Questa struttura dunque dipende da O, ossia è diversa per scelte diverse di O. Se si pensa A come K-spazio vettoriale con questa struttura lo si denota con il simbolo A_O e si dice che questo è lo spazio vettoriale dei vettori di A applicati in O.

In particolare si ha che dim A=0 implica che A consiste di un solo punto. Infatti, scelto un punto O si ha che dim A_O=0 e quindi $A_O = A$ consiste di un solo punto.

1.3 Generalità sulle affinità.

Siano A e A' spazi affini sullo stesso campo K. Una applicazione $\varphi : A \to A'$ si dice una *affinità* di A in A' se esiste una applicazione lineare $\varphi_l : V(A) \to V(A')$ tale che per ogni coppia di punti P, Q di A si abbia:

$$\{\varphi(P), \varphi(Q)\} = \varphi_l(\{PQ\}) \tag{1.12}$$

ossia:

$$\varphi(Q) - \varphi(P) = \varphi_l(Q - P). \tag{1.13}$$

Ciò significa che per ogni punto $P \in A$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in V(A)$ si ha:

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{v}). \tag{1.14}$$

L'applicazione φ_l si dice *l'applicazione lineare associata alla affinità* φ. Spesso, con abuso di notazione, indicheremo con lo stesso simbolo tanto la φ che la φ_l. Se $V(A)$ ha dimensione finita, il rango di φ_l si dice anche rango di φ e si denota col simbolo rg(φ).

Un punto P di A tale che $\varphi(P) = P$ è detto *punto fisso* per l'affinità φ.

Esempio 1.3.1 Le affinità di rango 0. Sia O un punto di A' e si consideri l'applicazione costante $\varphi_O : P \in A \to O \in A'$. Questa è una affinità la cui applicazione lineare associata è l'applicazione lineare nulla di $V(A) \to V(A')$. Pertanto rg(φ_O)=0.

Viceversa se $\varphi : A \to A'$ ha rango 0, l'applicazione φ_l è l'applicazione nulla e φ è costante. Infatti per ogni coppia (P, Q) di punti di A si ha $\varphi(Q) - \varphi(P) = \varphi_l(Q - P) = \mathbf{0}$, sicchè $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Esempio 1.3.2 L'affinità identica. Sia A uno spazio affine su un campo K. L'applicazione identica ι_A di A in sè è una affinità, la cui applicazione lineare associata è l'applicazione identica di $V(A)$.

Proviamo la seguente:

Proposizione 1.3.3 *Siano A e A' spazi affini sul campo K. Dati un punto P di A e uno P' di A' e data una applicazione lineare $\psi : V(A) \to V(A')$, esiste una ed una sola affinità $\varphi : A \to A'$ tale che $\varphi(P) = P'$ e $\varphi_l = \psi$.*

DIM. Se una tale affinità esiste, allora per ogni punto Q di A deve accadere che:

$$\varphi(Q) = \varphi(P) + \psi(Q - P) = P' + \psi(Q - P). \tag{1.15}$$

Dunque φ deve necessariamente coincidere con l'applicazione

$$\varphi : Q \in A \to P' + \psi(Q - P). \tag{1.16}$$

Per provare la proposizione, basta mostrare che la φ così definita è una affinità. Siano Q ed R punti arbitrari di A. Si ha:

$$\varphi(Q) - \varphi(R) = (P' + \psi(Q - P)) - (P' + \psi(R - P)) = \tag{1.17}$$

$$= (P' - P') + (\psi(Q - P) - \psi(R - P)) = \psi(Q - P) - \psi(R - P) = \tag{1.18}$$

$$= \psi((Q - P) - (R - P)) = \psi(Q - R) \tag{1.19}$$

e ciò prova l'asserto. △

Esempio 1.3.4 Affinità di uno spazio affine in sè. L'identità di uno spazio affine A è l'unica affinità che ammette almeno un punto fisso e la cui applicazione lineare associata sia identica. Più in generale, sia $\varphi : A \to A$ una affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità in $V(A)$. Sia P un punto di A e poniamo $\varphi(P) - P = \mathbf{v}$. Per ogni punto $Q = P + \mathbf{v}$ di A si ha:

$$\varphi(Q) = \varphi(P) + (Q - P) = P + \mathbf{v} + (Q - P) = Q + \mathbf{v}. \tag{1.20}$$

Una tale applicazione si dice una *traslazione* di vettore $\mathbf{v} \in A$ e si denota col simbolo $\tau_{\mathbf{v}}$.

Consideriamo ora una affinità $\varphi : A \to A$ che fissa un punto P e la cui applicazione lineare associata sia una omotetia ω_λ di rapporto λ in $V(A)$. Per ogni punto $Q = P + \mathbf{v}$ di A si ha:

$$\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{v} \tag{1.21}$$

e una tale affinità si dice una *omotetia* di A di *centro* P e *rapporto* λ.

In particolare, l'omotetia di centro P e rapporto 1 è l'identità, mentre quella di centro P e rapporto -1 associa ad ogni punto Q il punto Q' tale $Q' - P = P - Q$. In tal caso, P si dice il *punto medio* del segmento QQ' e Q e Q' si dicono *simmetrici* rispetto a P. La φ prende perciò il nome di *simmetria* di A rispetto a P (o di *centro* P).

1.4 Isomorfismi tra spazi affini. Riferimenti.

Proposizione 1.4.1 *Sia $\varphi : A \to A'$ una affinità tra spazi affini su un campo K. Allora φ è biiettiva se e solo se anche φ_l lo è (cioè è un isomorfismo). In tal caso anche $\varphi^{-1} : A' \to A$ è una affinità la cui applicazione lineare associata è la φ_l^{-1}.*

Dim. Sia P un punto di A e sia $P' = \varphi(P)$. L'applicazione$(g_{P'})^{-1} \circ \varphi \circ g_P : V(A) \to V(A')$ coincide, come subito si verifica, con la φ_l. Di qui, essendo g_P e $g_{P'}$ biettive, segue che φ è biettiva se e solo se anche φ_l lo è.

La parte rimanente dell'asserto è di banale verifica e si lascia al lettore. △

Una affinità biiettiva si dice un *isomorfismo* e due spazi affini legati da un isomorfismo si dicono *isomorfi*. Nel seguito noi studieremo le proprietà degli spazi affini che si conservano per isomorfismi (o, come si dice, a meno di isomorfismi). Ciò costituisce l'oggetto della *geometria affine*.

Dimostreremo ora due teoremi che mostrano come, nello studio della geometria affine, ci si può limitare allo studio di spazi affini assai particolari.

Teorema 1.4.2 *Ogni spazio affine A su un campo K è isomorfo allo spazio affine attaccato allo spazio vettoriale $V(A)$.*

Dim. Sia O un punto di A. In virtù della proposizione (1.9), l'applicazione $g_O : \mathbf{v} \in V(A) \to O + \mathbf{v} \in A$ è l'unica affinità che manda $\mathbf{0}$ in O e la cui applicazione lineare associata sia l'identità. Per la proposizione 8.21 essa è un isomorfismo. △

Teorema 1.4.3 *Siano V e V' spazi vettoriali sul campo K. Essi sono isomorfi come spazi affini se e solo se lo sono come spazi vettoriali.*

Dim. Segue immediatamente dalla proposizione 8.21. △

In conseguenza dei due precedenti teoremi, abbiamo il:

Corollario 1.4.4 *Sia A uno spazio affine di dimensione n sul campo K. A è isomorfo allo spazio affine numerico $\mathbf{A}_K^n$ su K.*

Dim. A è isomorfo allo spazio affine attaccato a $V(A)$, e questo ad $\mathbf{A}_K^n$, che è lo spazio affine attaccato a K^n, poiché $V(A)$ è isomorfo a K^n. △

Per costruire esplicitamente un isomorfismo di $\varphi : \mathbf{A}^n_K \to A$ si procede nel seguente modo. Dapprima bisogna dare un isomorfismo di $V(A)$ con K^n, ottenuto assegnando un riferimento $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $V(A)$. Poi si dà un isomorfismo di A con $V(A)$, assegnando, come visto nel teorema (1.12), un punto $O \in A$. L'isomorfismo φ allora è così definito:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbf{A}^n & \to & A \\ & \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & O + (x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_n\mathbf{v_n}). \end{array} \tag{1.22}$$

La coppia $\mathcal{R} = (O, R)$ si dice un *riferimento (cartesiano) affine* di A. Per ogni punto $P \in A$ la n-pla $\varphi^{-1}(P) = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ si dice la *n-pla delle coordinate (cartesiane)* di P nel riferimento $\mathcal{R}$. Ciò si esprime scrivendo $P(\mathbf{x})$ o $P(x_1, \ldots, x_n)$. Il punto O, che si dice *origine* del riferimento $\mathcal{R}$, ha coordinate tutte nulle in $\mathcal{R}$. I punti $P_i(\mathbf{e}_i)$, dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-simo vettore unitario di K^n, si dicono i *punti unitari* del riferimento. Il riferimento R di $V(A)$ si dice *associato* al riferimento $\mathcal{R}$.

Per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $V(A)$ la n-pla delle sue componenti in R si dice anche *n-pla delle componenti di $\mathbf{v}$ nel riferimento $\mathcal{R}$*. Se P e Q sono punti di A aventi in $\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, allora ovviamente il vettore $P - Q$ ha in $\mathcal{R}$ componenti $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

Esempio 1.4.5 L'introduzione di un riferimento cartesiano nello spazio (risp., nel piano, nella retta) della geometria euclidea coincide con l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane come illustrato in [AL], esempio (8.14).

Esempio 1.4.6 In $\mathbf{A}^n$ il riferimento $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n))$ si dice *riferimento naturale*. Un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ha, in tale riferimento, proprio il vettore $\mathbf{x}$ come n-pla delle coordinate.

Esempio 1.4.7 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K. Sia $\mathbf{v}$ un vettore di V e sia $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un riferimento di V quale spazio vettoriale. Allora $\mathcal{R} = (\mathbf{v}, R)$ è un riferimento di V quale spazio affine su K. Sia $\mathbf{v}=x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. Se $\mathbf{w}$ è un vettore di V tale che $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n$, si ha:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n \tag{1.23}$$

e quindi la n-pla delle coordinate cartesiane di $\mathbf{w}$ in $\mathcal{R}$ è $(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$.

1.5 Esercizi

1) $\star$ Sia A uno spazio affine su un campo K e sia K' un sottocampo proprio di K. Si provi che $\dim_K A > \dim_{K'} A$.

2) Sia A uno spazio affine sul campo K. Si provi che dim A=0 se e solo se A consiste di un solo punto.

3) $\star$ Sia A uno spazio affine su un campo K. Dati i punti P e Q di A, si dice *segmento* PQ di estremi P e Q la coppia non ordinata di elementi di A formata da P e Q ([AL], (6.1)). Si dice invece *segmento orientato* (PQ) di estremi P e Q la coppia ordinata $(P, Q) \in A \times A$. Il segmento orientato (PQ) si dice pure *vettore applicato* in P di secondo estremo Q. Se $P = Q$, tale vettore applicato si dice *nullo*. Sia $\mathcal{V}(A)$ l'insieme $A \times A$ dei vettori applicati di A. In $\mathcal{V}(A)$ definiamo la seguente relazione $\mathcal{R}$ detta di *equipollenza*:

$$(PQ)\mathcal{R}(P'Q') \Leftrightarrow Q - P = Q' - P'. \tag{1.24}$$

Si provi che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Si provi poi che l'insieme quoziente $\mathcal{V}(A)/\mathcal{R}$ si può identificare con $V(A)$ in modo tale che l'applicazione quoziente coincida con l'applicazione $f : A \times A \to V(A)$ che determina la struttura di spazio affine su A.

4) Siano $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ punti di uno spazio affine A su un campo K. Si provi che:

$$(A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_n - A_{n-1}) + (A_1 - A_n) = \mathbf{0}.$$

5) $\star$ Siano $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ punti di uno spazio affine A su un campo K e siano $a_1, \ldots, a_n$ elementi di K tali che $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$. Si provi che esiste uno e un solo punto X di A tale che

$$a_1(A_1 - X) + a_2(A_2 - X) + \ldots + a_n(A_n - X) = \mathbf{0}.$$

(Suggerimento: Sia O un qualunque punto dello spazio; si verifichi che il punto richiesto è l'unico punto X tale che

$$X - O = [a_1(A_1 - O) + a_2(A_2 - O) + \ldots + a_n(A_n - A)]/(a_1 + \ldots + a_n).$$

Il punto X si dice *baricentro* della n-pla di punti $(A_1, \ldots, A_n)$ *con il sistema di pesi* $(a_1, \ldots, a_n)$. Se $a_1 = \ldots = a_n = 1$, X si dice *baricentro geometrico* (o semplicemente baricentro) della n-pla di punti $(A_1, \ldots, A_n)$.)

Si provi che se $n = 2$, X è il punto medio del segmento A_1A_2.

6) $\star$ Continuando l'esercizio precedente, si provi che se A ha dimensione finita e se in un dato riferimento $\mathcal{R}$ di A i punti $A_1, \dots, A_n$ hanno rispettivamente vettori delle coordinate $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, allora il baricentro X della n-pla di punti $(A_1, \dots, A_n)$ con il sistema di pesi $(a_1, \dots, a_n)$ ha in $\mathcal{R}$ vettore $\mathbf{x}$ delle coordinate dato da

$$\mathbf{x} = (a_1\mathbf{a}_1 + \ldots + a_n\mathbf{a}_n)/(a_1 + \ldots + a_n)$$

In particolare il baricentro geometrico della n-pla $(A_1, \dots, A_n)$ ha vettore delle coordinate $\mathbf{x}$ dato da

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n)/n.$$

Se $P(\mathbf{a})$ e $Q(\mathbf{b})$ sono punti di A, il punto medio M del segmento AB ha vettore delle coordinate $\mathbf{x}$ dato da

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}))/2.$$

7) Sia A uno spazio affine su un campo, sia B un insieme e sia $g : B \to A$ una biezione. Mostrare che se B è munito della struttura di spazio affine indotta da g, allora g è un isomorfismo di B su A.

8) Siano V e W spazi vettoriali sul campo K. Si provi che $F : V \to W$ è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare $f : V \to W$ ed esiste un elemento $\mathbf{c} \in W$ tale che $F = \tau_{\mathbf{c}} \circ f$, dove $\tau_{\mathbf{c}} : W \to W$ è la traslazione di vettore $\mathbf{c}$ in W.

9) Si provi che una applicazione ottenuta componenedo due affinità è ancora una affinità. Più precisamente, si provi che se $\varphi : A \to A'$ e $\varphi' : A' \to A''$ sono affinità, allora $(\varphi' \circ \varphi)_l = \varphi'_l \circ \varphi_l$. Si provi poi che applicazioni composte di isomorfismi sono isomorfismi.

10) Si provi che gli isomorfismi di uno spazio affine A in sè formano, rispetto al prodotto di composizione, un gruppo che si denota col simbolo $\mathrm{Aff}(A)$ e che si dice *gruppo affine* di A.

11) Si provi che se V è uno spazio vettoriale non nullo, $\mathrm{GL}(V)$ è un sottogruppo proprio di $\mathrm{Aff}(V)$.

12) Siano A e A' spazi affini di dimensione finita sul campo K e sia $\varphi : A \to A'$ una affinità.

Si provi che φ è suriettiva se e solo se rg(φ)=dim A', e che φ è iniettiva se e solo se rg(φ)=dim A.

Capitolo 2

Sottospazi di uno spazio affine

2.1 La nozione di sottospazio di uno spazio affine.

Sia A uno spazio affine sul campo K. Un sottoinsieme S di A si dice un *sottospazio affine*, o semplicemente un *sottospazio*, di A, se esiste un punto $P \in A$ ed esiste un sottospazio vettoriale W di $V(A)$ tali che $S = \{P + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in W\}$. In altri termini S è costituito da tutti e solo i punti $Q \in A$ tali che $Q - P \in W$. Il sottospazio S si denota anche col simbolo $P + W$.

In particolare ogni punto P di A è un sottospazio, poiché coincide con $P + (\mathbf{0})$, e A stesso è un sottospazio poiché coincide con $P + V(A)$ con P punto qualunque di A. Ogni sottospazio di A diverso da A si dice un *sottospazio proprio*.

Proposizione 2.1.1 *Sono equivalenti le proposizioni:*

(a) $P + W = Q + W'$;

(b) $Q \in P + W$ *e* $W = W'$.

Dim. (a)$\Rightarrow$ (b) E' chiaro che $Q \in P + W$ perché $Q \in Q + W'$, e pertanto $Q - P \in W$. Proviamo che $W' \subseteq W$. Se $\mathbf{v} \in W'$ allora $Q + \mathbf{v} \in Q + W'$. Quindi $Q + \mathbf{v} = P + (Q - P) + \mathbf{v} \in P + W$ e perciò $(Q - P) + \mathbf{v} \in W$ da cui $\mathbf{v} \in W$. Similmente si prova che $W \subseteq W'$ e perciò $W = W'$.

(b)$\Rightarrow$ (a) Poiché $Q \in P + W$, si ha $Q - P \in W$. Se $X \in A$ si ha $X - Q = (X - P) + (P - Q)$ e quindi $X - Q \in W$ se e solo se $X - P \in W$, il che equivale a dire che $P + W = Q + W$. $\triangle$

Se $S = P + W$ si dice che S *passa per* P. Inoltre il sottospazio W di $V(A)$, univocamente determinato da S, si dice la *giacitura* di S e si denota anche col simbolo $V(S)$. I vettori di $V(S)$ si dicono *vettori liberi paralleli a* S.

E' importante osservare che:

Proposizione 2.1.2 *$S = P + W$ è uno spazio affine con spazio vettoriale associato W.*

DIM. Se restringiamo l'applicazione $f : A \times A \to V(A)$ al sottoinsieme $S \times S$ abbiamo una applicazione $f_S : S \times S \to W$. Infatti, in virtù della proposizione (2.1) del capitolo 1, se P e Q sono punti di S si ha $P - Q \in W$. Si vede subito che $f_S : S \times S \to W$ individua una struttura di spazio affine su S. $\triangle$

Ha dunque senso parlare di dimensione di un *sottospazio affine di dimensione finita*: essa è la dimensione della sua giacitura. I sottospazi di dimensione zero sono i punti di A, quelli di dimensione 1 si dicono *rette*, quelli di dimensione 2 *piani*. Se A ha dimensione finita e S ne è un sottospazio l'intero $\dim A - \dim S$ si dice *codimensione* di S in A. I sottospazi di codimensione 1 si dicono *iperpiani* di A.

Se S è una retta si dice pure che $V(S)$ ne è la *direzione* e un qualunque vettore non nullo di $V(S)$ si dice un *vettore di direzione* di S. Esso è definito a meno di proporzionalità.

Proviamo ancora la:

Proposizione 2.1.3 *Siano S e S' sottospazi di A e sia $S \subseteq S'$. Se S' ha dimensione finita allora anche S ha dimensione finita e si ha $\dim S \leq \dim S'$ e S è un sottospazio affine di S'. Vale l'uguaglianza se e solo se $S = S'$.*

DIM. Sia $P \in S$. Allora $S = P + W$ e $S' = P + W'$. Proviamo che $W \subseteq W'$ dal che segue facilmente l'asserto. Infatti se $\mathbf{v} \in W$ allora $P + \mathbf{v} \in S$ e quindi $P + \mathbf{v} \in S'$, da cui $\mathbf{v} \in W'$. $\triangle$

Esempio 2.1.4 *Sottospazi affini di uno spazio vettoriale.* Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. I sottospazi affini di V sono i traslati dei sottospazi vettoriali di V mediante i vettori di V (cfr. [AL], capitolo 15, n. 1).

Esempio 2.1.5 *Sottospazi affini dello spazio della geometria euclidea.* I sottospazi affini dello spazio affine della geometria euclidea coincidono con i punti (sottospazi di dimensione 0), le rette (sottospazi di dimensione 1), i piani (sottospazi di dimensione 2), lo spazio stesso (unico sottospazio di dimensione 3). Si veda [AL], esempio (5.14).

Esempio 2.1.6 *Sottospazi affini di* $\mathbf{A}^n$.I sottospazi affini di $\mathbf{A}^n$ sono già stati studiati in [AL], capitolo 15, n. 3. Sia dato un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ di m equazioni in n incognite, scritto in forma vettoriale come $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} \in M(m, n; K)$, $\mathbf{x}$ vettore colonna di indeterminate e $\mathbf{b}$ vettore colonna d'ordine m dei termini noti. L'insieme $M(\mathcal{A}) = \{\xi \in \mathbf{A}^n : \mathbf{A} \cdot \xi = b\}$ delle sue soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbf{A}^n$, la cui giacitura è il sottospazio vettoriale $M(\mathcal{A}^{om})$ di K^n, dove $\mathcal{A}^{om}$ è il sistema omogeneo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ associato ad $\mathcal{A}$. Ciò segue dal fatto che $M(\mathcal{A}) = \xi + M(\mathcal{A}^{om})$ (cfr. [AL], proposizione (5.12)). Se $p = \mathrm{rg}(\mathbf{A})$, allora la dimensione di $M(\mathcal{A})$ vale $n - p$.

Sostituendo $\mathcal{A}$ con un sistema normale ad esso equivalente si può sempre supporre che $\mathcal{A}$ sia costituito da p equazioni linearmente indipendenti, ossia da tante equazioni quant'è la codimensione del sottospazio in $\mathbf{A}^n$.

Infine per ogni sottospazio S di $\mathbf{A}^n$ esiste un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ tale che $S = M(\mathcal{A})$ (cfr. [AL], proposizione (15.3)). In particolare S è un iperpiano di $\mathbf{A}^n$ se e solo se è l'insieme dei vettori numerici $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ che sono soluzioni di una singola equazione lineare non nulla

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \tag{2.1}$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Per ulteriori considerazioni sui sottospazi di $\mathbf{A}^n$ si veda [AL], capitolo 15, n. 3.

Concludiamo queste generalità sui sottospazi con la:

Proposizione 2.1.7 *Siano A e A' spazi affini su un campo K e sia $\varphi : A \to A'$ una affinità. Se S è un sottospazio di A allora $\varphi(S)$ è un sottospazio di A'. Se S ha dimensione finita, anche $\varphi(S)$ ha dimensione finita e si ha* $\dim S \geq \dim\varphi(S)$.

Se φ è un isomorfismo si ha $\dim S = \dim \varphi(S)$.

DIM. Se $S = P + W$, si verifica facilmente che $\varphi(S) = \varphi(P) + \varphi_l(W)$. Da ciò segue subito l'asserto. $\triangle$

2.2 Intersezioni di sottospazi affini.

Proviamo la:

Proposizione 2.2.1 *Sia A uno spazio affine sul campo K e ne siano S e S' sottospazi affini. Se $S \cap S' \neq \emptyset$ allora $S \cap S'$ è il sottospazio affine di A passante per un punto $P \in S \cap S'$ e avente per giacitura l'intersezione delle giaciture di S e S'.*

Dim. Sia $P \in S \cap S'$ e $S = P + W$ e $S' = P + W'$. Si ha

$$Q \in S \cap S' \Leftrightarrow Q - P \in W \text{ e } Q - P \in W' \Leftrightarrow Q - P \in W \cap W' \Leftrightarrow Q \in P + (W \cap W') \qquad (2.2)$$

$\triangle$

Esempio 2.2.2 (a) Se S è una retta di A e S' è un sottospazio di A, allora si hanno le seguenti possibilità:

(1) $S \cap S' = \emptyset$;

(2) S' è un punto di S;

(3) $S' = S$;

(4) S' contiene propriamente S;

(5) $S \cap S'$ è un punto.

Infatti se nessuna delle possibilità (1), (2), (3) e (4) si avvera allora $S \cap S'$ è un sottospazio non vuoto e proprio di S, dunque è un punto.
(b) se A ha dimensione finita n, S ne è un iperpiano e S' un sottospazio di A tale che $S \cap S' \neq \emptyset$, allora si hanno le seguenti possibilità:

(1) S contiene S';

(2) $S \cap S'$ è un sottospazio di A di dimensione pari a $\dim S - 1$.

Infatti sia $P \in S \cap S'$ e $S = S = P + W$ e $S' = P + W'$. Se non si verifica la (1), W non contiene W'. Allora $\dim W \cap W' = \dim W' - 1$ (cfr. [AL], esempio (9.15)), e quanto asserito segue dalla proposizione (2.2.1).

Dalla proposizione (2.2.1) segue che l'intersezione di una famiglia di sottospazi di A, se non vuota, è ancora un sottospazio di A. In particolare, se X è un sottoinsieme non vuoto di A l'intersezione di tutti i sottospazi di A contenenti X è un sottospazio di A che si dice *sottospazio generato da* X e si denota col simbolo

$$\Omega(X).$$

Esso è il più piccolo sottospazio di A contenente X nel senso che ogni sottospazio contenente X contiene $\Omega(X)$. Se $S_1, \ldots\ldots, S_n$ sono sottospazi di A il sottospazio generato dall'unione di

$S_1, \ldots, S_n$ si denota col simbolo

$$S_1 \vee \ldots \vee S_n$$

e si dice *sottospazio congiungente* $S_1, \ldots, S_n$.

Proposizione 2.2.3 *Sia A uno spazio affine di dimensione n sul campo K e ne siano S e S' sottospazi affini tali che $S \cap S' \neq \emptyset$. Il sottospazio $S \vee S'$ è il sottospazio passante per un punto di P di $S \cap S'$ e avente per giacitura lo spazio congiungente le giaciture di S e S'.*

DIM. Sia $P \in S \cap S'$ e $S = P + W$ e $S' = P + W'$. Sia T un sottospazio che contiene S e S'. Allora $T = P + W''$ e W'' contiene tanto W che W', quindi W'' contiene $W + W'$. Pertanto $P + (W + W')$ è contenuto in T.

Ciò prova che $P + (W + W')$ è il più piccolo sottospazio contenente S e S', cioè coincide con $S \vee S'$. △

Corollario 2.2.4 (Formula di Grassmann negli spazi affini) *Sia A uno spazio affine di dimensione finita sul campo K e ne siano S e S' sottospazi affini tali che $S \cap S' \neq \emptyset$. Allora si ha*

$$\dim S \vee S' + \dim S \cap S' = \dim S + \dim S' \tag{2.3}$$

DIM. Ovvia conseguenza della proposizione (2.2.3) e della formula di Grassmann per gli spazi vettoriali. △

Esempio 2.2.5 Ritorniamo al caso (a) dell'esempio (2.2.2). Se si verifica la circostanza (5) allora, in virtù della formula di Grassmann si ha dim $S \vee S' =$ dim $S' + 1$. In particolare due rette che hanno un solo punto in comune generano un piano (o, come si dice, sono complanari). Una retta e un piano aventi in comune un punto generano uno spazio di dimensione 3, ecc.

Nel caso (b) dello stesso esempio invece, se si verifica la (2), si ha dim $S \vee S' =$ n, ossia S e S' generano tutto A.

Studiamo ora lo spazio generato da un insieme finito di punti di A. Proviamo la:

Proposizione 2.2.6 *Se $P_0, \ldots, P_s$ sono punti di uno spazio affine su un campo K, il sottospazio da essi generato ha dimensione $m \leq s$.*

Dim. Posto $W =< P_1 - P_0, \ldots, P_s - P_0 >$, è chiaro che $P_0 + W$ contiene $P_0, \ldots, P_s$ ed ha dimensione al più s. E' d'altra parte ovvio che $P_0 + W$ è il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_s$. Da ciò l'asserto. $\triangle$

Se $P_0, \ldots, P_s$ non appartengono a nessun sottospazio affine di dimensione $s - 1$ di A, si dice che $P_0, \ldots, P_s$ sono *punti indipendenti* di A. In tal caso il sottospazio da essi generato ha esattamente dimensione s.

Se A ha dimensione finita n, il massimo numero di punti indipendenti di A vale $n + 1$.

Esistono $(n + 1)$-ple di punti indipendenti di A. Per verificare ciò basta ridursi al caso $A = \mathbf{A}^n$. Allora $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ è una n-pla di punti indipendenti (ma, si badi, non di vettori numerici linearmente indipendenti).

In particolare in ogni sottospazio di dimensione m di A esistono $(m + 1)$-ple di punti indipendenti.

La (b) della proposizione (2.1.7) dice in particolare che per due punti distinti passa una e una sola retta, per tre punti distinti e non appartenenti ad una retta (o, come si dice non allineati) passa uno e un solo piano, per quattro punti che non stanno su un piano (o, come si dice non complanari) stanno in un unico spazio di dimensione 3, ecc.

Corollario 2.2.7 *Se S e S' sono sottospazi di dimensione finita di uno spazio affine A allora*

$$\dim S \vee S' \leq \dim S + \dim S' + 1 \tag{2.4}$$

e se vale l'uguaglianza si ha $S \cap S' = \emptyset$.

Dim. Poniamo s= dim S e s'= dim S'. Siano $P_0, \ldots, P_s$ punti indipendenti di S e $Q_0, \ldots, Q_{s'}$ punti indipendenti di S'. Poiché $S \vee S'$ chiaramente coincide con il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_s$ e $Q_0, \ldots, Q_{s'}$, dal corollario (2.2.7) abbiamo dim $S \vee S' \leq (s+1+s'+1)-1 = s+s'+1$ il che prova la prima parte dell'asserto. Quanto alla seconda asserzione, notiamo che, se si ha $\dim S \vee S' = \dim\, S + \dim\, S' + 1$ e se fosse $S \cap S' \neq \emptyset$, avremmo $\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' - \dim\,(S \cap S') \leq \dim S + \dim S'$, una contraddizione. $\triangle$

Ora ci rivolgiamo allo studio dei sottospazi di A la cui intersezione è vuota. Cominciamo col dare la seguente definizione. Due sottospazi S e S' di A si dicono *paralleli* se la giacitura di S è contenuta in quella di S' o la giacitura di S' è contenuta in quella di S. In particolare ciò accade se S contiene S' (o viceversa); in tal caso S e S' si dicono *impropriamente paralleli*, mentre si dicono *propriamente paralleli* se sono paralleli ma non accade che uno dei due contenga l'altro. Osserviamo che ogni punto è parallelo a ogni altro sottospazio e A stesso gode della medesima proprietà. Inoltre due rette sono parallele se e solo se hanno gli stessi vettori di direzione.

Notiamo che questa definizione restituisce quella di parallelismo nella geometria euclidea se la applichiamo appunto al caso dei sottospazi dello spazio Ω della geometria euclidea.

Proposizione 2.2.8 *Siano S e S' spazi paralleli di A. Si ha:*
(a) se $S \cap S' \neq \emptyset$ allora o S contiene S' oppure S' contiene S;
(b) se $S \cap S' \neq \emptyset$ e S e S' sono di dimensione finita e hanno la stessa dimensione, allora $S = S'$;
(c) se $S \cap S' = \emptyset$, e S e S' sono di dimensione finita, allora

$$\dim S \vee S' = max\{\dim S, \dim S'\} + 1. \tag{2.5}$$

Dim. (a) Sia $P \in S \cap S'$ e $S = P + W$ e $S' = P + W'$. Per l'ipotesi di parallelismo si ha, ad esempio $W \subseteq W'$. Ma allora $S = P + W \subseteq P + W' = S'$.

(b) Segue dalla (a) tenendo presente la proposizione (2.1.3).

(c) Supponiamo che $s = \dim S \geq \dim S'$. Sia $S = P + W$ e $S' = Q + W'$, e dunque $W' \subseteq W$. L'asserto segue per la formula di Grassmann, osservando che, in tal caso, $S \vee S' = S \vee Q$. Per mostrare quest'ultima uguaglianza, è sufficiente verificare che $S \vee S' \subseteq S \vee Q$: ma questo segue facilmente osservando che $S \vee Q$ contiene P e Q ed è parallelo a W ed a $W' \subseteq W$. △

Esempio 2.2.9 Dalla (a) della proposizione (2.2.8) segue che due sottospazi propriamente paralleli hanno intersezione vuota.

Un punto e un sottospazio S di dimensione s che non passa per esso generano un sottospazio di dimensione $s + 1$. In particolare un punto ed una retta sono complanari.

Due rette parallele distinte sono complanari. Una retta ed un piano propriamente paralleli generano uno spazio di dimensione 3. Anche due piani paralleli e distinti generano uno spazio di dimensione 3.

Due sottospazi S e S' di A non paralleli e tali che $S \cap S' = \emptyset$ si dicono *sghembi*. Invece due sottospazi non paralleli e tali che $S \cap S' \neq \emptyset$ si dicono *incidenti* (lungo $S \cap S'$). Le seguenti proposizioni illustrano situazioni in cui si hanno, o non si hanno, sottospazi sghembi.

Proposizione 2.2.10 *Se S e S' hanno dimensione finita, nessuno dei due è un punto e si ha*

$$\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' + 1 \tag{2.6}$$

allora S e S' sono sghembi (e si dicono totalmente sghembi*).*

Dim. Si ha $S \cap S' = \emptyset$ per il corollario (2.2.7). Inoltre S e S' non sono paralleli, altrimenti, per la proposizione (2.2.8) si avrebbe

$$max\{\dim\ S, \dim\ S'\} + 1 = \dim\ (S \vee S') \leq \dim\ S + \dim\ S' + 1 \tag{2.7}$$

da cui

$$max\{\dim S, \dim S'\} = \dim S + \dim S' \tag{2.8}$$

che implicherebbe dim $S = 0$ oppure dim $S' = 0$, contraddicendo che S e S' non sono punti. △

Proposizione 2.2.11 *Se A ha dimensione finita e S ne è un iperpiano, S non è sghembo con nessun sottospazio di A.*

Dim. Sia S' un sottospazio proprio di A non parallelo a S e supponiamo sia $S \cap S' = \emptyset$. Sia $S = P + W$ e $S' = Q + W'$. Per l'ipotesi di non parallelismo possiamo supporre vi sia un vettore $\mathbf{v} \in W'$ con $\mathbf{v} \in W$. Inoltre $Q - P$ non dipende linearmente da $\mathbf{v}$, altrimenti sarebbe $Q - P \in W'$ e quindi anche $P - Q \in W'$ da cui $P \in Q + W' = S'$, contro l'ipotesi che $S \cap S' = \emptyset$. Il sottospazio $< Q - P, \mathbf{v} >$ ha dimensione 2 e pertanto esiste qualche vettore non nullo $\mathbf{w} = \lambda(Q - P) + \mu\mathbf{v} \in W$. Poiché $\mathbf{v} \in W$ non può essere $\lambda = 0$. Possiamo perciò supporre $\lambda = 1$, e cioè che $(Q - P) + \mu\mathbf{v} \in W$. Ma allora $P + (Q - P) + \mu\mathbf{v} \in P + W = S$. Ma $P + (Q - P) + \mu\mathbf{v} = Q + \mu\mathbf{v} \in Q + W' = S'$ e si avrebbe perciò $P + (Q - P) + \mu\mathbf{v} \in S \cap S'$, una contraddizione. △

Proposizione 2.2.12 *Siano S e S' due sottospazi sghembi di dimensione finita di uno spazio affine A. Se uno di tali spazi è una retta, essi sono totalmente sghembi.*

Dim. Supponiamo S' sia una retta e sia P un punto qualunque di S'. Sia S'' il sottospazio congiungente P e S. S'' e S' sono incidenti. Infatti $P \in S' \cap S''$. Se S' e S'' fossero paralleli si avrebbe $S' \subseteq S''$ oppure $S'' \subseteq S'$. Nel primo caso S è un iperpiano in S''perché, a norma della proposizione (2.2.8), si ha dim $S'' =$ dim $S + 1$. Poiché S e S' non sono paralleli, S e S' sarebbero incidenti in virtù della proposizione (2.2.11), contro l'ipotesi che siano sghembi. Nel secondo caso avremmo $S \subseteq S'' \subseteq S'$ ancora una contraddizione, il che prova che S'' e S' sono incidenti. Inoltre ovviamente $S \vee S' = S'' \vee S'$. Possiamo applicare la regola di Grassmann, ottenendo

$$\begin{aligned} &\dim\, S \vee S' = \dim\, S'' \vee S' = \dim\, S'' + \dim\, S' - \dim\, (S' \cap S'') = \\ &= \dim\, S + 1 + \dim\, S' - \dim\, (S' \cap S''). \end{aligned} \tag{2.9}$$

L'asserto sarà provato se mostriamo che $\dim\, (S' \cap S'') = 0$, ossia se proveremo che S' e S'' si intersecano solo nel punto P. Supponiamo che ciò non accada. Allora S'' conterrebbe S' e abbiamo già visto che ciò non può verificarsi. $\triangle$

Esempio 2.2.13 Per la dimensione dello spazio congiungente due sottospazi sghembi non esiste in generale un risultato migliore del corollario (2.2.7), nel senso che se due sottospazi S e S' sono sghembi, essi possono tanto essere totalmente sghembi, allora si ha

$$\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' + 1 \tag{2.10}$$

che non totalmente sghembi, e allora

$$\dim S \vee S' < \dim S + \dim S' + 1 \tag{2.11}$$

Siano $P_0, \ldots, P_s$ punti indipendenti di uno spazio affine A. Sia i un intero tale che $0 < i < s$. Sia S il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_i$ e S' quello generato da $P_i, \ldots, P_s$. Questi due sottospazi sono totalmente sghembi. Infatti il sottospazio generato da S e S' coincide con quello generato dai punti $P_0, \ldots, P_s$ e quindi

$$\dim\, S + \dim\, S' + 1 = i + (s - i - 1) + 1 = s = \dim\, (S \vee S') \tag{2.12}$$

Diamo invece un esempio di due sottospazi sghembi, ma non totalmente sghembi. In uno spazio vettoriale V di dimensione 4 su un campo K consideriamo due sottospazi vettoriali W e W' di dimensione 2 tali che $W \cap W'$ abbia dimensione 1. Scegliamo poi un vettore $\mathbf{v} \in V \setminus (W + W')$. E' allora chiaro che $(\mathbf{v} + W) \cap W' = \emptyset$. D'altra parte $\mathbf{v} + W$ e W' sono sghembi perché $W \neq W'$. Tuttavia abbiamo

$$\dim\, (\mathbf{v} + W) + \dim\, W' + 1 = 5 > 4 = \dim\, V \geq \dim\, [(\mathbf{v} + W) \vee W'] \tag{2.13}$$

Dunque $\mathbf{v} + W$ e W sono sghembi, ma non totalmente sghembi.

2.3 Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi.

Sia A uno spazio affine su un campo K e ne sia $S = Q + W$ un sottospazio di dimensione finita m. Se $R' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ è un riferimento di W rimane individuato il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R} = (Q, R')$ di S e dunque l'isomorfismo di spazi affini

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbf{A}^m & \to & S \\ & (t_1, \ldots, t_m) & \mapsto & Q + (t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m) \end{array} \tag{2.14}$$

che assegna al punto

$$P = Q + (t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m) \tag{2.15}$$

di S le coordinate $(t_1, \ldots, t_m)$ e, al variare di $(t_1, \ldots, t_m)$ in K^m, il punto P di cui alla formula (2.15) descrive tutto S.

Supponiamo ora anche A di dimensione finita n e supponiamo fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ di A. Sia $\mathbf{q} \in K^n$ il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ del punto Q e continuiamo, anche se impropriamente, a denotare con $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ i vettori numerici d'ordine n delle componenti in R dei vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Se $\mathbf{x}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ del punto P variabile in S, la (2.15) si traduce nella seguente relazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m \tag{2.16}$$

Esplicitamente, posto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_{i1}, \ldots, \mathbf{w}_{in})$, $i = 1, \ldots, m$, questa relazione si legge

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1\mathbf{w}_{11} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{m1} \\ x_2 = q_2 + t_1\mathbf{w}_{12} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{m2} \\ \ldots \\ x_n = q_n + t_1\mathbf{w}_{1n} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{mn} \end{cases} \tag{2.17}$$

Queste espressioni, che al variare di $(t_1, \ldots, t_m)$ in K^m danno le coordinate dei punti di S, si dicono *equazioni parametriche* di S nel riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, e $t_1, \ldots, t_m$ si dicono i *parametri di tale rappresentazione* (cfr. [AL], esempio (15.4)).

In particolare consideriamo il caso in cui S sia generato da $m + 1$ punti indipendenti $P_0, \ldots, P_m$. Allora $S = P_0 + < P_1 - P_0, \ldots, P_m - P_0 >$, sicché la (2.15) diviene

$$P = P_0 + t_1(P_1 - P_0) + \ldots + t_m(P_m - P_0) \tag{2.18}$$

Se nel riferimento $\mathcal{R}$ i punti P_i hanno coordinate $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{in})$, $i = 0, \dots, m$, le equazioni parametriche assumono la forma (vettoriale)

$$\mathbf{x} = p_0 + t_1(p_1 - p_0) + \dots + t_m(p_m - p_0) \tag{2.19}$$

o quella (scalare)

$$\begin{cases} x_1 = p_{01} + t_1(p_{11} - p_{01}) + \dots + t_m(p_{m1} - p_{01}) \\ x_2 = p_{02} + t_1(p_{12} - p_{02}) + \dots + t_m(p_{m2} - p_{02}) \\ \dots \\ x_n = p_{0n} + t_1(p_{1n} - p_{0n}) + \dots + t_m(p_{mn} - p_{0n}) \end{cases} \tag{2.20}$$

Esempio 2.3.1 Sia A uno spazio affine di dimensione n in cui si è introdotto un riferimento $\mathcal{R}$. Sia r una retta di A. Si dicono *numeri direttori* di r in $\mathcal{R}$ le componenti in $\mathcal{R}$ di un qualunque vettore direttore di r. I numeri direttori di una retta non sono univocamente determinati, ma differiscono tra loro per un fattore di proporzionalità non nulla. Se $P(\mathbf{p})$ e $Q(\mathbf{q})$ sono punti distinti di r, una n-pla di numeri direttori di r è data dalle componenti di $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Se $\mathbf{v} \in K^n$ è una n-pla di numeri direttori di r, delle equazioni parametriche di r si scrivono come

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \tag{2.21}$$

al variare di t in K. Se $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, tali equazioni si scrivono (in forma scalare)

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ \dots \\ x_n = p_n + tv_n \end{cases} \tag{2.22}$$

al variare di t in K. In particolare se $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, la retta r per P e Q ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(p_1 - q_1) \\ x_2 = p_2 + t(p_2 - q_2) \\ \dots \\ x_n = p_n + t(p_n - q_n) \end{cases} \tag{2.23}$$

al variare di t in K. Chiaramente P si riottiene dando il valore 0 al parametro t e Q dando il valore -1 al parametro t.

Ad esempio se A è un piano affine reale e r è la retta passante per i punti $P(1,2)$, $Q(3,7)$, essa ha equazioni parametriche (nel dato riferimento)

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 5t \end{cases} \tag{2.24}$$

al variare di t in $\mathbf{R}$. Si noti che r ha anche rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3 + 10t \\ y = 7 + 25t \end{cases} \tag{2.25}$$

ove abbiamo sostituito P con Q quale punto corrispondente al valore 0 del parametro t, e abbiamo sostituito i numeri direttori $(-2,-5)$ con $(10,25)$ che sono ancora numeri direttori perchè proporzionali ai primi.

Se A ha dimensione 3 su $\mathbf{R}$ e si considerano i punti $P(1,0,8)$, $Q(8,3,2)$, $R(5,23,1)$, dove le coordinate si riferiscono ad un dato riferimento $\mathcal{R}$ di A, la retta r per i punti P e Q ha una rappresentazione parametrica in $\mathcal{R}$ data da

$$\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = -3t \\ z = 8 + 6t \end{cases} \tag{2.26}$$

al variare di t in $\mathbf{R}$. Inoltre i tre punti sono indipendenti. Infatti R non appartiene alla retta r in quanto il sistema

$$\begin{cases} 5 = 1 - 7t \\ 23 = -3t \\ 1 = 8 + 6t \end{cases} \tag{2.27}$$

non ha soluzioni in t. Il piano generato dai tre punti ha una rappresentazione parametrica data da

$$\begin{cases} x = 1 - 7t - 4s \\ y = -3t - 23s \\ z = 8 + 6t + 7s \end{cases} \tag{2.28}$$

al variare di (t,s) in $\mathbf{R}^2$.

Sia ancora A uno spazio affine di dimensione n su un campo K e sia $\mathcal{R} = (O,R)$ un riferimento cartesiano di A. Tenendo presente l'esempio (2.1.6) si vede subito che un sottoinsieme S di A è un sottospazio affine se e solo se esiste un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ di m equazioni in n incognite tale che S sia l'insieme dei punti di A le cui coordinate in $\mathcal{R}$ sono soluzioni di $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ si dice un *sistema di equazioni cartesiane di S nel riferimento* $\mathcal{R}$ e si dice pure che S *è rappresentato in* $\mathcal{R}$ *dal sistema di equazioni* $\mathcal{A}$. Naturalmente ogni sistema $\mathcal{A}'$ equivalente ad $\mathcal{A}$ rappresenta ancora S.

Per tali sistemi di equazioni possono ripetersi tutte le considerazioni già fatte nell'esempio (2.1.7). Ad esempio un iperpiano di A si rappresenta con un'equazione lineare del tipo

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \tag{2.29}$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Questa equazione è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. In particolare una retta in un piano affine si rappresenta in un dato riferimento con una equazione del tipo

$$ax + by + c = 0 \tag{2.30}$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$, mentre un piano in uno spazio affine di dimensione 3 in un dato riferimento con una equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.31}$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

In generale un sottospazio S di dimensione p si può rappresentare in un dato riferimento con un sistema normale $\mathcal{A}$ di $n - p$ equazioni lineari indipendenti, e questo è il minimo numero di equazioni che rappresenta S. La controparte geometrica di questa circostanza è che S si può ottenere come intersezione di $n - p$ iperpiani e non di meno. Il sistema normale $\mathcal{A}$ non è univocamente determinato da S, ma lo è solo a meno di equivalenza.

Ad esempio una retta in uno spazio affine di dimensione 3 in un dato riferimento $\mathcal{R}$ si può rappresentare con un sistema compatibile del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

la cui prima matrice abbia rango 2 (sicché quindi anche la seconda matrice ha rango 2 e il sistema risulta normale). Ciò corrisponde al fatto che la retta è intersezione di due piani. Questa coppia di piani, così come il sistema che rappresta la retta, non è univocamente determinata.

Dato un riferimento $\mathcal{R}$ in uno spazio affine A di dimensione n su K, si possono considerare i sottospazi rappresentati in $\mathcal{R}$ da sistemi normali del tipo

$$x_{i1} = \ldots = x_{ih} = 0 \tag{2.33}$$

con $1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n$. Questi sottospazi, che passano per l'origine del riferimento e sono caratterizzati dal fatto che i loro punti hanno alcune delle coordinate nulle, si dicono *sottospazi coordinati del riferimento* $\mathcal{R}$. Tra questi notiamo i sottospazi coordinati di dimensione 1, detti anche *assi coordinati del riferimento* $\mathcal{R}$. Di tali assi ve ne sono n, e sono rappresentati da sistemi di equazioni cartesiane del tipo

$$x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0 \tag{2.34}$$

$i = 1, \ldots, n$; l'asse rappresentato dal sistema suddetto, caratterizzato dal fatto che tutte le coordinate dei suoi punti, tranne l'i-sima, sono nulle (mentre l'i-sima varia descrivendo tutto K) si dice *l'asse* x_i del riferimento $\mathcal{R}$. Una n-pla di numeri direttori dell'asse x_i è data dal vettore $\mathbf{e}_i$ della base canonica. Anche di iperpiani coordinati ve ne sono n, e sono quelli di equazione $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

2.4 Determinazione di un sistema di equazioni cartesiane di un sottospazio.

Ora noi affronteremo la questione di determinare un sistema di equazioni cartesiane di un sottospazio (una risoluzione di questo problema è già prospettata in [AL], esempio (15.4)). Sia $S = Q + W$ un sottospazio affine di A, uno spazio affine di dimensione n su K; sia inoltre $R' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ un riferimento di W e si supponga fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ di A. Adottando le notazioni del n. 2, denotiamo con $\mathbf{q} \in K^n$ il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ del punto Q e continuiamo a denotare con $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ i vettori numerici d'ordine n delle componenti in R dei vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Esplicitamente porremo $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$, $i = 1, \ldots, m$. Un punto P di A, di vettore delle coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ appartiene a S se e solo se il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ dipende linearmente dal sistema di vettori $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$. Ciò equivale a dire che la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{q} \\ \mathbf{w}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \ldots & x_n - q_n \\ w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

di tipo $(m+1, n)$ su K, ha rango $\leq m$. Ma poiché questa matrice ha almeno rango m in quanto le sue ultime m righe sono linearmente indipendenti, la condizione affinché X stia in S si può esprimere scrivendo

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \dots & x_n - q_n \\ w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m1} & \dots & w_{mn} \end{pmatrix} = m. \tag{2.36}$$

Questa si dice una *equazione matriciale del sottospazio* S. Da essa si può facilmente dedurre un sistema di equazioni cartesiane di S.

Ad esempio se S è un iperpiano allora la matrice che compare in (2.36) è quadrata d'ordine n e quindi l'equazione matriciale (2.36) si traduce nella condizione

$$\det\begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \dots & x_n - q_n \\ w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{n-1,1} & \dots & w_{n-1,n} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.37}$$

Se si sviluppa il determinante che compare in (2.37) con la regola di Laplace applicata alla prima riga si ottiene una equazione cartesiana dell'iperpiano S data da

$$A_1(x_1 - q_1) + \ldots + A_n(x_n - q_n) = 0 \tag{2.38}$$

dove $A_1, \ldots, A_n$ sono i minori di ordine massimo della matrice

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{n-1,1} & \dots & w_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

presi con segni alterni. Si noti che, poiché questa matrice ha rango $n-1$, tali minori non sono tutti nulli, sicché nell'equazione (2.38) i coefficienti delle indeterminate non sono tutti nulli.

Se invece S è una retta l'equazione matriciale assume la forma

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \dots & x_n - q_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = 1 \tag{2.40}$$

dove abbiamo posto $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ invece di $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, \ldots, w_{1n})$. La (2.40) si può scrivere come

$$(x_1 - q_1)/w_1 = \ldots = (x_n - q_n)/w_n \tag{2.41}$$

se $w_1, \ldots, w_n$ sono tutti non nulli. Le (2.41) si dicono *equazioni della retta* S *sotto forma di rapporti uguali*.

Per ottenere un sistema normale di equazioni cartesiane della retta si procede così. Uno fra gli elementi della n-pla $(w_1, \ldots, w_n)$ è non nullo. Supponiamo sia w_1. La equazione matriciale (2.40) è soddisfatta se e solo se tutti gli orlati di w_1 nella matrice che compare in (2.40) sono nulli, ossia se e solo se si ha

$$\begin{cases} w_2(x_1 - q_1) - w_1(x_2 - q_2) = 0 \\ w_3(x_1 - q_1) - w_1(x_3 - q_3) = 0 \\ \ldots \\ w_n(x_1 - q_1) - w_1(x_n - q_n) = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

e questo è un sistema normale di equazioni cartesiane per la retta S. Similmente si procede se invece di essere $w_1 \neq 0$, è diversa da zero qualche altra componente di $\mathbf{w}$.

Nel caso generale si procede in modo analogo. Infatti poiché le ultime m righe della matrice che compare in (2.36) sono indipendenti, esiste un minore non nullo di ordine m subordinato da tali m righe e da certe m colonne. Supponiamo ad esempio si tratti del minore determinato dalle prime m colonne ossia che

$$\det \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mm} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{2.43}$$

La condizione matriciale (2.36) è soddisfatta se e solo se tutti gli $n - m$ orlati di questo minore nella matrice che compare in (2.36) sono nulli ossia se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \ldots & x_m - q_m & x_i - q_i \\ w_{11} & \ldots & w_{1m} & w_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mm} & w_{mi} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.44}$$

al variare di $i = m + 1, \ldots, n$. Sviluppando ciascuni dei determinanti che appaiono in queste equazioni con la regola di Laplace applicata alla prima riga si ottengono altrettante equazioni lineari che formano un sistema normale di $n - m$ equazioni in n incognite che rappresenta S.

Esempio 2.4.1 (a) Supponiamo dato, in un piano affine A su $\mathbf{R}$ in cui sia introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, il punto P di coordinate $(2, 3)$. L'equazione della retta r passante per P e avente numeri direttori $(3, 7)$ è, nella forma dei rapporti uguali

$$(x-2)/3 = (y-3)/7 \tag{2.45}$$

da cui si deduce subito l'equazione cartesiana

$$7x - 3y - 5 = 0 \tag{2.46}$$

(b) In uno spazio affine A di dimensione 3 su $\mathbf{R}$ con un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ siano dati il punto P di coordinate $(2, 3, 0)$ e le due rette r e r' di rappresentazioni parametriche

$$\begin{aligned} &x = 1 + 2t, \quad y = 5t, \qquad\quad z = 9 + t \\ &x = 6t, \qquad\quad\; y = 7 + 9t, \quad z = -1 - t\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Il piano π per P e parallelo a tali due rette ha giacitura generata dalle giaciture di r e r', e pertanto una sua equazione cartesiana è

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.48}$$

che esplicitamente si scrive

$$-86x + 2y + 18z + 166 = 0 \tag{2.49}$$

(c) Con le stesse notazioni di (a), la retta per P e parallela a r ha equazioni

$$(x-2)/2 = (y-3)/5 = z/9 \tag{2.50}$$

nella forma dei rapporti uguali. Un sistema di equazioni cartesiane è dato da

$$(x-2)/2 = (y-3)/5, (x-2)/2 = z/9 \tag{2.51}$$

ossia da

$$5x - 2y - 4 = 0, 9x - 2z - 18 = 0. \tag{2.52}$$

2.5 Condizioni di dipendenza e indipendenza di punti. Equazioni di sottospazi generati da punti indipendenti.

Sia A uno spazio affine di dimensione n su K e ne sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano. Dati dei punti $P_0, \ldots, P_m$ in A, aventi in $\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$, $i = 0, \ldots, m$, vediamo come si procede per determinare la dimensione del sottospazio S generato da $P_0, \dots, P_m$. Ricordando che la giacitura di S è generata dai vettori $P_1 - P_0, \dots, P_m - P_0$, si vede subito che $\dim S$ è pari al rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} p_1 - p_0 \\ p_2 - p_0 \\ \dots \\ p_m - p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} - p_{01} & \dots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \dots & p_{2n} - p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} - p_{01} & \dots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

di tipo (m, n) su K, che denotiamo col simbolo $\mathbf{M}(P_0, \dots, P_m)$.

In particolare i punti sono allineati se e solo se

$$rg(\mathbf{M}(P_0, \dots, P_m)) \leq 1 \tag{2.54}$$

sono complanari se e solo se

$$rg(\mathbf{M}(P_0, \dots, P_m)) \leq 2 \tag{2.55}$$

ecc. Supponiamo ora che $P_0, \dots, P_m$ siano indipendenti, ossia che $\mathbf{M}(P_0, \dots, P_m) = m + 1$. Per ottenere un sistema di equazioni matriciali del sottospazio generato da $P_0, \dots, P_m$ si procede come nel n. 3, in quanto tale sottospazio è quello passante per il punto $Q = P_0$ e ha la giacitura generata dal sistema linearmente indipendente di vettori $P_1 - P_0, \dots, P_m - P_0$. Una equazione matriciale di questo sottospazio si ottiene allora scrivendo:

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x_1 - p_{01} & \dots & x_n - p_{0n} \\ p_{11} - p_{01} & \dots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \dots & p_{2n} - p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} - p_{01} & \dots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix} = m \tag{2.56}$$

In particolare, nel caso $m = n-1$, e dunque il sottospazio generato dai punti sia un iperpiano, una sua equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - p_{01} & \dots & x_n - p_{0n} \\ p_{11} - p_{01} & \dots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \dots & p_{2n} - p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} - p_{01} & \dots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.57}$$

Lasciamo al Lettore il facile compito di verificare che questa equazione si può equivalentemente scrivere nel seguente modo

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ p_{01} & \dots & p_{0n} & 1 \\ p_{11} & \dots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & \dots & p_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ p_{m1} & \dots & p_{mn} & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.58}$$

Esempio 2.5.1 Adopereremo qui le notazioni dell'esempio (2.4.1).

(a) La retta per i punti $P(2,3)$ e $Q(7,2)$ ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.59}$$

e cioè

$$x + 5y - 17 = 0 \tag{2.60}$$

(b) La retta per i punti $P(2,3,0)$ e $Q(1,1,1)$ ha equazioni

$$(x-2)/1 = (x-3)/2 = -z \tag{2.61}$$

in quanto una terna di numeri direttori della retta è data dalle differenze delle coordinate di P e Q.

(c) Il piano per i punti P, Q e $R(0,3,1)$ ha equazione data da

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.62}$$

ossia

$$4x + y + 3z - 7 = 0 \tag{2.63}$$

2.6 Discussione di alcuni esempi.

(a) Determinazione dei numeri direttori di una retta di cui siano assegnate le equazioni cartesiane.

Sia A un spazio affine di dimensione n su K in cui si sia introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Sia data una retta r di A rappresentata in $\mathcal{R}$ da un sistema normale del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + a_n = 0 \end{cases} \tag{2.64}$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è una n-pla di numeri direttori di r, allora α è soluzione del sistema omogeneo associato a (2.27), e cioè di

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

Questo è un sistema omogeneo di $n-1$ equazioni linearmente indipendenti in n incognite, sicché (cfr. [AL], proposizione (18.9)) α è proporzionale alla n-pla dei minori di ordine massimo della matrice A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

presi con segni alterni. In definitiva possiamo dire che una n-pla di numeri direttori di r è data dai minori di ordine $n-1$ della matrice A presi con segni alterni. Ad esempio una retta del piano di equazione

$$ax + by + c = 0 \tag{2.67}$$

(con a e b non entrambi nulli) ha numeri direttori dati da $(-b, a)$. Una retta dello spazio di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{2.68}$$

ha numeri direttori dati da

$$(\det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}). \tag{2.69}$$

(b) Mutua posizione di iperpiani. Condizioni di parallelismo. Fasci di iperpiani.

Sia A come sopra e consideriamo in A gli iperpiani π e π' rappresentati in $\mathcal{R}$ dalle equazioni

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \end{cases} \tag{2.70}$$

rispettivamente. Essi sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura ossia se e solo se le due equazioni

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = 0 \end{cases} \tag{2.71}$$

sono proporzionali. Ciò si puo esprimere scrivendo la condizione

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ a'_1 & \ldots & a'_n \end{pmatrix} = 1 \tag{2.72}$$

ossia *due iperpiani sono paralleli se e solo se sono rappresentati in un dato riferimento da equazioni aventi i coefficienti delle incognite proporzionali.*

Per due iperpiani paralleli π e π' si possono presentare due possibilità: o $\pi = \pi'$ ovvero $\pi \cap \pi' = \emptyset$, caratterizzate dal fatto che sia uguale a 1 oppure a 2 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ a'_1 & \ldots & a'_n & a' \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

L'insieme degli iperpiani aventi la stessa giacitura di π si dice *fascio improprio* di iperpiani paralleli a π. In virtù di quanto precede tutti e soli gli iperpiani di questo fascio hanno equazione del tipo

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + k = 0 \tag{2.74}$$

con $k \in K$. La (2.74) si dice *equazione del fascio improprio di iperpiani paralleli a* π, e in essa si deve intendere k come un parametro in K, al cui variare l'iperpiano di equazione (2.74) descrive il fascio.

Se π e π' non sono paralleli allora non potendo essere sghembi (cfr. proposizione (2.2.11), si intersecano in un sottospazio S di codimensione 2 (cfr. esempio (2.2.2), (b)) che è rappresentato dal sistema normale

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \end{cases} \tag{2.75}$$

In tal caso π e π' sono incidenti, il che corrisponde all'essere

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ a'_1 & \ldots & a'_n \end{pmatrix} = 2. \tag{2.76}$$

L'insieme di tutti gli iperpiani passanti per S si dice *fascio proprio di asse* (o *centro*) S. Un iperpiano π'', di equazione

$$a''_1x_1 + \ldots + a''_nx_n + a'' = 0 \tag{2.77}$$

appartiene a tale fascio se e solo se ogni soluzione del sistema (2.75) è pure soluzione del sistema (2.77). Come risulta da [AL], proposizione (9.10), ciò accade se e solo se l'equazione (2.77) dipende dal sistema (2.75). In altri termini un iperpiano appartiene al fascio se e solo se ha una equazione del tipo

$$\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.78}$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Questa si dice *equazione del fascio determinato da* π e π'. Ancora una volta λ e μ vanno pensati come parametri in $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$ al variare dei quali l'iperpiano di equazione (2.78) descrive il fascio.

Proviamo che:

Proposizione 2.6.1 *L'equazione (2.78) e la*

$$\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.79}$$

rappresentano lo stesso iperpiano se e solo (λ, μ) *e* (λ', μ') *sono proporzionali.*

Dim. L'equazione (2.78) e la

$$\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.80}$$

rappresentano lo stesso iperpiano se e solo se sono proporzionali, cioè se e solo se esiste un $\rho \in K \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{aligned} &\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = \\ &= \rho(\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a'). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ciò accade se e solo se

$$(\lambda - \rho\lambda')(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + (\mu - \rho\mu')(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') \tag{2.82}$$

è il polinomio nullo. Ma poiché $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a$ e $a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a'$ sono polinomi linearmente indipendenti, ciò equivale a dire che $\lambda - \rho\lambda' = \mu - \rho\mu' = 0$ ossia $(\lambda, \mu) = \rho(\lambda', \mu')$.△

Dunque l'equazione

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.83}$$

al variare di μ rappresenta tutti gli iperpiani del fascio tranne π ciascuno una sola volta.

Esempio 2.6.2 Consideriamo due rette r e r' del piano (caso n=2) di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \tag{2.84}$$

Esse sono incidenti se e solo i coefficienti delle incognite nelle due precedenti equazioni non sono proporzionali, il che accade se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0 \tag{2.85}$$

Le due rette si intersecano allora in un punto P le cui coordinate si ottengono risolvendo (ad esempio con la regola di Cramer) il sistema (2.84). Il fascio determinato da r e r' ha equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{2.86}$$

e rappresenta la famiglia di tutte le rette per P.

Proposizione 2.6.3 *Tre iperpiani π, π' e π'' di equazioni*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + a' = 0, a_1''x_1 + \ldots + a_n''x_n + a'' = 0 \tag{2.87}$$

appartengono ad un fascio (proprio o improprio) se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ a_1' & \ldots & a_n' & a' \\ a_1'' & \ldots & a_n'' & a'' \end{pmatrix} \leq 2. \tag{2.88}$$

Dim. Se π, π' e π'' appartengono ad un fascio proprio allora o i tre piani coincidono, e allora l'asserto è ovvio, oppure almeno due di essi sono distinti, diciamo π e π', e il terzo appartiene al fascio da essi determinato, il che vuol dire che l'ultima riga della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ a_1' & \ldots & a_n' & a' \\ a_1'' & \ldots & a_n'' & a'' \end{pmatrix} \tag{2.89}$$

dipende dalle prime due, da cui di nuovo segue l'asserto. Se π, π' e π'' appartengono ad uno stesso fascio improprio allora la sottomatrice $\mathbf{A}(1, 2, 3; 1, \ldots, n)$ ha rango 1, e pertanto $\mathbf{A}$ non può avere rango 3.

Viceversa, se rg $(\mathbf{A}) \leq 2$, allora o la sottomatrice $\mathbf{A}(1,2,3;1,\ldots,n)$ ha rango 1, il che vuol dire che i tre piani appartengono ad un fascio improprio, oppure $\mathbf{A}(1,2,3;1,\ldots,n)$ ha rango 2. In tal caso il sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \\ a''_1x_1 + \ldots + a''_nx_n + a'' = 0 \end{cases} \tag{2.90}$$

è compatibile, ma non normale, essendo equivalente al sistema formato da soltanto due delle sue equazioni linearmente indipendenti. Ma allora il sistema (2.90) rappresenta un sottospazio S di codimensione 2 che è contenuto in π, π' e π'', sicché questi iperpiani appartengono al fascio di centro S. $\triangle$

Esempio 2.6.4 Nel piano tre rette di equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0 \tag{2.91}$$

appartengono ad un fascio proprio o improprio se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0. \tag{2.92}$$

(c) Mutua posizione di rette e iperpiani. Condizioni di parallelismo. Stelle di iperpiani.

Sia A come sopra e consideriamo in A un iperpiano π rappresentato in $\mathcal{R}$ dall'equazione

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \tag{2.93}$$

e una retta r rappresentata in $\mathcal{R}$ dal sistema di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ \ldots \\ x_n = p_n + tv_n \end{cases} \tag{2.94}$$

Per studiare l'intersezione di r con π basta sostituire le (2.94) nella (2.93). Così facendo si ottiene l'equazione lineare in t

$$(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)t + a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a = 0 \tag{2.95}$$

le cui soluzioni, sostituite in (2.94), forniscono le coordinate dei punti di $r \cap \pi$. Possono ora presentarsi tre casi:

(a) $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \neq 0 \Leftrightarrow$ l'equazione (2.95) ha l'unica soluzione

$$t = -(a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a)/a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \tag{2.96}$$

che corrisponde ad un unico punto di intersezione di π con r, che risultano pertanto incidenti;

(b) $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$, $a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a = 0 \Leftrightarrow$ l'equazione (2.95) è identicamente nulla e dunque ha tutte le possibili soluzioni. Ciò equivale a dire che r è contenuta in π, ossia che r e π sono impropriamente paralleli;

(c) $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0, a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a \neq 0 \Leftrightarrow$ l'equazione (2.95) non è compatibile, ossia r e π non hanno punti in comune, ovvero sono propriamente paralleli.

Riassumendo r e π *sono (propriamente o impropriamente) paralleli se e solo se vale la relazione*

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0 \tag{2.97}$$

dove $(v_1, \ldots, v_n)$ è una n-pla di numeri direttori di r.

Data la direzione d, determinata dalla n-pla di numeri direttori $(v_1, \ldots, v_n)$, l'insieme di tutti gli iperpiani di A che sono paralleli alle rette aventi la direzione d si dice *stella impropria di iperpiani di centro* d. Un iperpiano π di equazione (2.93) appartiene a tale stella se e solo se vale la condizione di parallelismo (2.97). Questa si può riguardare come una equazione nelle incognite $a_1, \ldots, a_n$. Come tale l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio di K^n di dimensione $n-1$. Ne sia $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$ una base, dove

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \tag{2.98}$$

$i = 1, \ldots, n-1$. Ad esempio, se $v_1 \neq 0$ si potrà prendere

$$\mathbf{a}_i = (v_i, 0, \ldots, 0, -v_1, 0, \ldots, 0) \tag{2.99}$$

dove $-v_1$ è la componente i-sima di a_i. Corrispondentemente possiamo considerare gli $n-1$ iperpiani distinti aventi equazioni:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \tag{2.100}$$

$i = 1, \dots, n-1$. E' chiaro allora che tutti e soli gli iperpiani della stella di centro d hanno equazione del tipo

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + \lambda_{n-1}(a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n) + \lambda_n = 0 \tag{2.101}$$

al variare di $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ in K^n, in modo che $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ non siano tutti nulli. La (2.101) si dice una *equazione della stella di iperpiani* di centro d.

In modo simile al precedente si risolve il problema di scrivere l'equazione di tutti gli iperpiani passanti per un dato punto P di A: l'insieme di tali iperpiani si dice *stella (propria) di iperpiani di centro* P. Infatti P, essendo un sottospazio di dimensione 0 si può rappresentare con un sistema normale di n equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n = 0 \end{cases} \tag{2.102}$$

Corrispondentemente P risulta intersezione degli n iperpiani $\pi_1, \dots, \pi_n$ rappresentati dalle n equazioni del sistema (2.102). Un iperpiano π passa per P, ossia appartiene alla stella di centro P, se e solo se tutte le soluzioni del sistema (2.102) sono soluzione dell'equazione di π, e ciò accade se e solo se l' equazione di π è combinazione lineare delle equazioni del sistema (2.102). In altri termini le equazioni degli iperpiani della stella sono del tipo

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1) + \ldots + \lambda_n(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n) = 0 \tag{2.103}$$

al variare di $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Ad esempio, se P ha coordinate $(p_1, \dots, p_n)$, come sistema (2.102) si può prendere

$$x_1 - p_1 = 0, \dots, x_n - p_n = 0 \tag{2.104}$$

e quindi un'equazione della stella di centro P è data da

$$\lambda_1(x_1 - p_1) + \ldots + \lambda_n(x_n - p_n) = 0 \tag{2.105}$$

Similmente alla proposizione (2.6.1), si può dimostrare la:

Proposizione 2.6.5 *Le equazioni (2.103) e*

$$\lambda'_1(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1) + \ldots + \lambda'_n(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n) = 0 \tag{2.106}$$

rappresentano lo stesso iperpiano della stella di centro P se e solo se i vettori $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ sono proporzionali. Una analoga affermazione vale per l'equazione (2.101).

Possiamo anche stabilire l'analogo della proposizione (2.35):

Proposizione 2.6.6 *Gli $n+1$ iperpiani $\pi_0, \dots, \pi_n$ di equazioni*

$$\begin{aligned} &a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n + a_0 = 0, \\ &a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_1 = 0, \\ &\dots, \\ &a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + a_n = 0 \end{aligned} \tag{2.107}$$

appartengono ad una stella (propria o impropria) se e solo se

$$det \begin{pmatrix} a_{01} & \dots & a_{0n} & a_0 \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n \end{pmatrix} = 0 \tag{2.108}$$

DIM. Supponiamo $\pi_0, \dots, \pi_n$ appartengano ad una stella propria. Ciò vuol dire che il sistema (2.107) è compatibile, in quanto ammette come soluzioni le coordinate del centro della stella. Pertanto le sue equazioni non possono essere linearmente indipendenti, e perciò vale la (2.108).

Supponiamo $\pi_0, \dots, \pi_n$ appartengano ad una stella impropria di centro la direzione d. Ciò vuol dire che il sistema omogeneo associato a (2.107) ha qualche soluzione non banale, e precisamente i numeri direttori di d. Pertanto la sua matrice ha rango $r \leq n-1$. Ciò vuol dire che le prime n colonne della matrice il cui determinante appare in (2.108) non sono linearmente indipendenti. Ciò chiaramente implica la (2.108).

Supponiamo ora valga la (2.108). Consideriamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n + a_0x_{n+1} = 0 \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_1x_{n+1} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + a_nx_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2.109}$$

Per la (2.108) esso ha qualche soluzione non nulla $(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$. Se $\xi_{n+1} \neq 0$ allora anche $(\xi_1/\xi_{n+1}, \dots, \xi_n/\xi_{n+1}, 1)$ è una soluzione dello stesso sistema e allora $(\xi_1/\xi_{n+1}, \dots, \xi_n/\xi_{n+1})$ è soluzione di (2.107), ossia il punto P di coordinate $(\xi_1/\xi_{n+1}, \dots, \xi_n/\xi_{n+1})$ appartiene a $\pi_0, \dots, \pi_n$, che perciò stanno nella stella di centro P. Se invece $\xi_{n+1} = 0$ allora $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ è una soluzione non nulla del sistema omogeneo associato a (2.107) e pertanto è una n-pla di componenti di un vettore ξ non nullo parallelo a $\pi_0, \ldots, \pi_n$, che dunque appartengono alla stella impropria di centro la direzione generata da ξ. $\triangle$

(d) Mutua posizione di due rette.

Dal corollario (2.2.7) segue che due rette r e r' stanno sempre in uno spazio affine di dimensione $n \leq 3$. Possiamo quindi limitarci a studiare la mutua posizione di due rette in uno spazio affine A di dimensione 3, in cui supporremo dato un riferimento $\mathcal{R}$.

Per la mutua posizione di r e r' abbiamo le seguenti possibilità: i) $r \cap r' \neq \emptyset \Leftrightarrow$ o $r = r'$ oppure $r \cap r'$ è un punto, ossia r e r' sono incidenti;

ii) $r \cap r' = \emptyset \Leftrightarrow$ o r è propriamente parallela a r' oppure r e r'sono sghembe.

Vediamo come queste possibilità si traducono analiticamente. Supponiamo r sia rappresentata in $\mathcal{R}$ dal sistema normale

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{2.110}$$

e r' dal sistema

$$\begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \tag{2.111}$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \tag{2.112}$$

e ne sia $\mathbf{A}$ la matrice completa e $\mathbf{A}'$ quella incompleta. Notiamo che rg $(\mathbf{A}') \geq 2$, in quanto i due sistemi che rappresentano r e r' sono normali, e dunque le rispettive matrici complete, entrambe subordinate ad $\mathbf{A}'$, hanno rango 2.

Si ha $r \cap r' \neq \emptyset$ se e solo se il sistema (2.112) è compatibile e dunque se e solo se rg $(\mathbf{A}') =$ rg $(\mathbf{A})$. Precisamente si ha

α) $r = r' \Leftrightarrow$ rg $(\mathbf{A}') =$ rg $(\mathbf{A}) = 2$;

β) r e r' sono incidenti in un punto $\Leftrightarrow$ rg $(\mathbf{A}')$= rg $(\mathbf{A}) = 3$.

Invece $r \cap r' = \emptyset$ se e solo se rg $(\mathbf{A}') \neq$ rg $((\mathbf{A})$ e precisamente

γ) r propriamente parallela a $r' \Leftrightarrow$ rg $(\mathbf{A}') = 2,$ rg $(\mathbf{A}) = 3$;

δ) r e r' sono sghembe $\Leftrightarrow$ rg $(\mathbf{A}') = 3,$ rg $(\mathbf{A}) = 4$.

Riassumendo possiamo affermare che:

(a) la condizione affinché r e r' siano (propriamente o impropriamente) parallele è che rg $(\mathbf{A}') = 2$;

(b) la condizione di incidenza tra r e r' è che rg $(\mathbf{A}') =$ rg $(\mathbf{A}) = 3$;

(c) la condizione di complanarità tra r e r' (che equivale alla incidenza ovvero al parallelismo) è che rg $(\mathbf{A}') < 4$ ossia det $\mathbf{A} = 0$;

(d) equivalentemente la condizione affinché r e r' siano sghembe si traduce nella condizione rg $(\mathbf{A}) = 4$ ossia det $\mathbf{A} \neq 0$.

2.7 Esercizi.

1) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, si consideri il sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3)$ tali che $x_1 + x_3 = 0\}$. Descrivere i punti di W e i punti di $(0,1,0) + W$. Fissati inoltre i punti $P(1,2,0)$ e $Q(0,2,1)$, dire se $P + W$ e $Q + W$ coincidono.

2) Determinare la giacitura e la dimensione del sottospazio affine $S = \{(x_1, x_2, x_3)$ tali che $2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 5x_2 = 7\}$ di $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$.

3) In $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ siano fissati i punti

$$\begin{aligned} &P_1(1,0,3), \quad Q_1(2,1,1),\\ &P_2(0,1,3), \quad Q_2(2,0,0),\\ &P_3(1,0,0), \quad Q_3(3,-1,0). \end{aligned} \tag{2.113}$$

Dire se esiste una affinità $\varphi : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1,2,3$, e, in caso affermativo, descriverla.

4) Determinare il vettore delle coordinate di $(2,-1,5) \in \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (P, R)$, ove $P(0,1,1)$ e $R = (\mathbf{v}_1 = (2,3,0), \mathbf{v}_2 = (4,0,3), \mathbf{v}_3 = (-1,0,0))$.

5) Determinare l'intersezione dei sottospazi affini S e T di $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$:

$$S = \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} ; \quad T = \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre dimensione e giacitura di tale intersezione.

6) Determinare un sistema di equazioni normali per il sottospazio affine $S = \{(5+2s+3t, 3+s, -1-s+6t), s, t \in \mathbf{R}\}$ di $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$.

7) Determinare dimensione, rappresentazione parametrica e cartesiana dei sottospazi affini congiungenti rispettivamente:

   (a) $P_1(4,0,1)$ e $Q(2,0,7)$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

   (b) $P_1(1,1,1)$, $P_2(0,1,-1)$, $P_3(2,1,7)$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

   (c) $P_1(1,1,1)$, $P_2(0,1,-1)$, $P_3(2,1,7)$, $P_4(1,2,0)$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

   (d) $r : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

   (e) $r = \{(2+3t, 1+5t, 3t, 4),\ t \in \mathbf{R}\}$ e $s = \{(-1+h, 7-3h, 4+2h, h),\ h \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$;

   (f) $r = \{(2+3t, 1+5t, 3t, 4),\ t \in \mathbf{R}\}$ e $s = \{(-1+3h, 7+5h, 4+3h, 1),\ h \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$.

8) In $\mathbf{A}^5(\mathbf{R})$, determinare equazioni cartesiane per $S = Q + W$, con $Q(1,1,1,2,2)$ e W generato da $\mathbf{w}_1 = (1,0,0,2,1)$ e $\mathbf{w}_2 = (3,5,0,0,0)$.

9) Dire se i seguenti punti di $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ sono indipendenti:

   (a) $P_1(2,0,1)$, $P_2(5,1,0)$;

   (b) $P_1(0,1,1)$, $P_2(0,1,-1)$, $P_3(1,1,7)$;

   (c) $P_1(0,1,1)$, $P_2(0,1,-1)$, $P_3(1,1,7)$, $P_4(0,0,1)$;

   (d) $P_1(0,1,1)$, $P_2(0,1,-1)$, $P_3(1,1,7)$, $P_4(0,0,1)$, $P_5(1,0,1)$.

10) Dire se i punti $P_0(1,-1,2)$, $P_1(0,1,-3)$, $P_2(1,0,-1)$, $P_3(1,1,-4)$ di $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ sono complanari.

11) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, determinare i numeri direttori della retta $r : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ ed equazioni per r nella forma dei rapporti uguali. .

12) Determinare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette in in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$:

   (a) $r = \{(2+3t, 1+5t, 3t),\ t \in \mathbf{R}\}$ e $s : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$;

(b) $r : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$;

(c) $r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$;

(d) $r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$.

13) Determinare la mutua posizione delle seguenti coppie di sottospazi affini (in caso essi siani sghembi, dire se sono totalmente sghembi; in caso siano paralleli, dire se sono propriamente o impropriamente paralleli):

(a) $\pi : x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ e $r : \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

(b) $\pi : x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ e $r = \{(2 + 3t, 1 + 5t, 4),\ t \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

(c) $r = \{(2 + 3t, 1 + 5t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$ e $s = \{(5 + 3h, 6 + 5h, 1 + h),\ h \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

(d) $r = \{(2 + 3t, 1 + 5t, 3t),\ t \in \mathbf{R}\}$ e $s = \{(5 + h, 2 - h, -1 + 3h),\ h \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

(e) $\pi = \{(2 + 4h + k, 1 + 6h + k, 3h),\ h, k \in \mathbf{R}\}$ e $r = \{(2 + 3t, 3t, 4),\ t \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$;

(f) $\pi : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = x_4 = 2$ e $S : \begin{cases} x_1 + 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ in $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$;

(g) $r : \begin{cases} x_1 + 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ e $s = \{(5 + h, 2 - h, -1 + 3h, 1 + h),\ h \in \mathbf{R}\}$ in $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$.

14) Dire se le seguenti terne di rette di $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ appartengono allo stesso fascio proprio o improprio:

(a) $r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $t = \{(1 + 5h, 3h, 4 + 2h),\ h \in \mathbf{R}\}$; $r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

15) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, determinare la stella di iperpiani per il punto $P(3, 0, 1)$, il fascio di iperpiani per la retta $r : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, ed il fascio di iperpiani per la retta $s = \{(1 - t, 1 + t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$.

16) In $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$, determinare la stella di iperpiani per il punto $P = (3, 3, 1, 1)$, ed la stella $\mathcal{H}$ di iperpiani per la retta $r = \{(1+3t, 1+t, 3t, 1+t),\ t \in \mathbf{R}\}$. Determinare inoltre, se esistono, gli iperpiani di $\mathcal{H}$ passanti per P.

17) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, determinare il fascio di piani avente per asse la retta $r : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

18) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, sia fissato il punto $P(2, 1, 0)$. Determinare, se esiste, una retta per P che incida $r : \frac{x_1+3}{2} = 1 - x_2 = -2x_3$ e $s : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

19) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, sia fissata la retta $r : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_8 = 0 \end{cases}$. Determinare la retta s parallela ad r e passante per $Q(1, 0, 1)$.

20) In $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, determinare il piano α parallelo al piano $\pi : 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0$ e passante per il punto medio di $A(1, 0, 7)$ e $B(2, -1, -4)$.

21) Mostrare che due rette $r = P + < \mathbf{v} >$ e $s = Q + < \mathbf{w} >$ in $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ sono sghembe se e solo se i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, P - Q$ sono indipendenti.

22) Scegliendo un opportuno sistema di riferimento, provare analiticamente che le mediane di un triangolo in $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ si intersecano in un punto.

Capitolo 3

Affinità e cambiamenti di riferimento.

3.1 Composizione di affinità e il gruppo affine.

Cominciamo con la seguente:

Proposizione 3.1.1 *Siano A, A', A'' spazi affini sullo stesso campo K e siano $\varphi : A \to A'$ e $\varphi' : A' \to A''$ affinità. Allora $\varphi' \circ \varphi$ è una affinità e $(\varphi' \circ \varphi)_l = \varphi'_l \circ \varphi_l$. In particolare se φ e φ' sono isomorfismi anche $\varphi' \circ \varphi$ lo è.*

Dim. Siano P e Q punti di A. Si ha

$$\begin{aligned} &(\varphi' \circ \varphi)(P) - (\varphi' \circ \varphi)(Q) = \varphi'(\varphi(P)) - \varphi'(\varphi(Q)) = \\ &= \varphi'_l(\varphi(P) - \varphi(Q)) = \varphi'_l(\varphi_l(P - Q)) = (\varphi'_l \circ \varphi_l)(P - Q) \end{aligned} \tag{3.1}$$

il che prova la prima parte dell'asserto. Il resto segue dalla proposizione (3.3) del capitolo 1. $\triangle$

In particolare se A è uno spazio affine, componendo affinità di A in sè si ottengono ancora affinità di A in sè e componendo isomorfismi di A in sè si ottengono ancora isomorfismi di A in sè. Consideriamo dunque l'insieme $\mathcal{A}(A)$ delle affinità di A in sè. La legge di composizione

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathcal{A}(A) \times \mathcal{A}(A) & \to & \mathcal{A}(A) \\ & (\varphi', \varphi) & \mapsto & \varphi' \circ \varphi \end{array} \tag{3.2}$$

è una operazione in $\mathcal{A}(A)$. Se si restringe questa operazione al sottoinsieme $\mathrm{Aff}(A)$ degli isomorfismi di A in sè, si ottiene un gruppo, che si dice *gruppo affine di A*.

Se $\psi : A \to A'$ è un isomorfismo, possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{A}(A) & \to & \mathcal{A}(A') \\ & \varphi & \mapsto & \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \end{array} . \tag{3.3}$$

L'applicazione Ψ è chiaramente biettiva, con inversa

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{-1} : & \mathcal{A}(A') & \to & \mathcal{A}(A) \\ & \varphi' & \mapsto & \psi^{-1} \circ \varphi' \circ \psi \end{array} , \tag{3.4}$$

e, inoltre, per ogni coppia $(\varphi', \varphi) \in \mathcal{A}(A)$, verifica

$$\Psi(\varphi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi' \circ \varphi \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) = \Psi(\varphi') \circ \Psi(\varphi) . \tag{3.5}$$

Poiché ψ è un isomorfismo e visto che

$$\Psi(\varphi)_l = (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})_l = \psi_l \circ \varphi_l \circ (\psi^{-1})_l , \tag{3.6}$$

risulta che $\Psi(\varphi)$ è un isomorfismo se e solo se lo è φ; più in generale, se A e A' sono di dimensione finita, φ e $\Psi(\varphi)$ hanno lo stesso rango, cioè Ψ conserva il rango delle affinità. Dunque Ψ induce una biezione

$$\Psi : \mathrm{Aff}(A) \to \mathrm{Aff}(A') \tag{3.7}$$

che è un isomorfismo.

Ai fini dello studio delle affinità, e in particolare del gruppo affine, è quindi possibile sostituire uno spazio affine A con uno ad esso isomorfo. In particolare ogni spazio affine A può essere sostituito con lo spazio affine associato allo spazio vettoriale $V(A)$ e, se A ha dimensione finita n, può essere sostituito con $\mathbf{A}^n$.

Proposizione 3.1.2 *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo K. Una applicazione $\varphi : V \to W$ è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare $f : V \to W$ ed esiste elemento $\mathbf{w} \in W$ tale che $\varphi = \tau_{\mathbf{w}} \circ f$; in tal caso $f = \varphi_l$.*

Dim. Se φ è una affinità, posto $f = \varphi_l$ e $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{0})$, si ha, per ogni vettore $\mathbf{a} \in V$

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{0}) + f(\mathbf{a}) = \mathbf{w} + f(\mathbf{a}) = (\tau_{\mathbf{w}} \circ f)(\mathbf{a}) \tag{3.8}$$

Viceversa è ovvio, e si lascia la facile verifica la Lettore, che $\tau_{\mathbf{w}} \circ f$ è una affinità la cui applicazione lineare associata è f. △

In particolare Aff(V) contiene GL(V) come sottogruppo, e contiene altresì tutte le traslazioni di V. Notiamo anzi che l'insieme $T(V)$ delle traslazioni di V costituisce un sottogruppo di Aff(V), isomorfo a $V(+)$. Infatti l'isomorfismo è dato da

$$\mathbf{v} \in V \to \tau_{\mathbf{v}} \in T(V). \tag{3.9}$$

Ogni elemento di Aff(V) si scrive come prodotto di un elemento di GL(V) e di una traslazione. Ciò si esprime dicendo che Aff(V) è generato da GL(V) e da $T(V)$.

3.2 Affinità tra spazi affini numerici.

Sia $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ una affinità tra spazi affini numerici su un campo K (i cui elementi interpretiamo qui come vettori colonna su K). L'applicazione lineare associata $\varphi_l : K^n \to K^m$ è individuata da una matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$ di tipo (m,n) su K, avendosi $\varphi_l(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} \in K^n$ è il vettore colonna $(x_1, \ldots, x_n)^t$. Sia $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = (y_1, \ldots, y_m)^t$. In virtù della proposizione (3.1.2), posto $\varphi_l(\mathbf{0}) = \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)^t$, si ha

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{3.10}$$

e questa si dice *equazione matriciale della affinità* φ. Esplicitamente questa equazione si scrive

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + c_m \end{cases} \tag{3.11}$$

Se $\varphi' : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^h$ è ancora una affinità di equazione matriciale

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{d} \tag{3.12}$$

dove $\mathbf{B}$ è la matrice di tipo (h,m) su K individuata da φ'_l e $\mathbf{d} \in \mathbf{A}^m$ è il vettore $\varphi'(\mathbf{0})$, allora $\varphi' \circ \varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^h$ ha equazione matriciale data da

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{d} = \mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) \tag{3.13}$$

Se poi $n = m$ e la affinità $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ è invertibile, per trovare l'equazione dell'affinità inversa φ^{-1}, basta risolvere (3.11) come sistema lineare nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, usando, ad esempio la regola di Cramer. Il risultato è che

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \tag{3.14}$$

Torniamo a considerare una affinità $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ di equazioni (3.10) o (3.11). Sia S un sottospazio di $\mathbf{A}^n$, di dimensione h. Per la proposizione (1.7) del Capitolo 2, anche $S' = \varphi(S)$ è un sottospazio affine di $\mathbf{A}^m$. Per determinarne le equazioni conviene procedere nel seguente modo:

(a) determinare $h+1$ punti $P_0, \ldots P_h$ che generano S, sicché i punti $\varphi(P_0), \ldots, \varphi(P_h)$ generano S' (ma non è detto siano indipendenti come punti di $\mathbf{A}^m$);

(b) S' ha dunque dimensione $h' \leq h$ e si può determinare un sistema di $h'+1$ punti indipendenti contenuto in $[\varphi(P_0), \ldots, \varphi(P_h)]$, sia esso il sistema $[Q_0, \ldots, Q_{h'}]$;

(c) a partire dal sistema indipendente sistema $[Q_0, \ldots, Q_{h'}]$ di punti che generano S' se ne possono scrivere delle equazioni parametriche.

Esempio 3.2.1 Consideriamo l'affinità $\varphi : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^3$ su $\mathbf{R}$ di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - y \\ z' = x + 2y + 2 \end{cases} \tag{3.15}$$

Vogliamo determinare l'immagine tramite φ della retta r di equazione $3x - 2y = 1$. La retta r è generata, ad esempio, dai punti $P = (0, -1/2)$ e $Q = (1/3, 0)$. I punti $\varphi(P) = (1/2, 1/2, 1)$ e $\varphi(Q) = (5/3, 1/3, 7/3)$ generano $\varphi(r)$. Poiché essi sono distinti (dunque indipendenti), $\varphi(r)$ è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = 1/2 + t(7/6) \\ y' = 1/2 + t(1/6) \\ z' = 1 + t(4/3) \end{cases} \tag{3.16}$$

che si possono altresì scrivere (cambiando per proporzionalità i numeri direttori di $\varphi(r)$)

$$\begin{cases} x' = 1/2 + 7t \\ y' = 1/2 + t \\ z' = 1 + 8t \end{cases} \tag{3.17}$$

Nel caso $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ sia invertibile allora S' ha la stessa dimensione di S, e per scriverne le equazioni, conoscendo quelle di S, si può procedere così. Sia

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{3.18}$$

un sistema di equazioni di S. Un punto $\mathbf{y} \in \mathbf{A}^n$ sta in S' se e solo se valgono contemporaneamente (3.10) e (3.18). Ricavando allora da (3.10) il vettore $\mathbf{x}$, ossia scrivendo l'equazione matriciale della affinità inversa di φ, si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \tag{3.19}$$

e sostituendo in (3.18) si trovano le equazioni di S' che risultano pertanto date da

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{d} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Esempio 3.2.2 Consideriamo l'affinità di $\mathbf{A}^2$ in sè di equazione

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases} \tag{3.21}$$

Essa è invertibile, in quanto il determinante della matrice dell'applicazione lineare associata è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2. \tag{3.22}$$

L'affinità inversa ha equazioni

$$\begin{cases} x = (x' + y' - 3)/2 \\ y = (-x' + y' - 1)/2 \end{cases} \tag{3.23}$$

come si vede risolvendo le equazioni di φ in x e y. La retta di equazione $3x + 7y - 9 = 0$ viene pertanto trasformata da φ nella retta di equazione

$$\begin{gathered} 3[(x' + y' - 3)/2] + 7[(-x' + y' - 1)/2] - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x' + y' - 3) + 7(-x' + y' - 1) - 18 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x' + 10y' - 34 = 0 \Leftrightarrow \\ 2x' - 5y' + 17 = 0 \end{gathered} \tag{3.24}$$

Inserire esempi di affinità piane assegnate mediante l'immagine di tre punti (o tre rette) indipendenti.

3.3 Riferimenti e affinità.

Siano A e A' spazi affini su un campo K di dimensioni rispettive n e m e sia $\varphi : A \to A'$ una affinità. Supponiamo dati in A e A' riferimenti affini $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$. Ricordiamo che essi determinano degli isomorfismi $\psi : \mathbf{A}^n \to A$ e $\psi' : \mathbf{A}^m \to A'$. Consideriamo l'affinità composta $\psi'^{-1} \circ \varphi \circ \psi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ e ne siano (3.10) o (3.11) le equazioni. Esse possono interpretarsi nel seguente modo. Dato il punto P di A, avente in $\mathcal{R}$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{x}$, il punto $Q = \varphi(P)$ ha in $\mathcal{R}'$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}$. In particolare $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in ψ' del punto immagine tramite φ dell'origine O di $\mathcal{R}$. Le (3.10) o (3.11) si dicono *equazioni della affinità φ nei riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$*. Si noti che in particolare la matrice $\mathbf{A}$ che appare in tali equazioni non è altro che la matrice di φ_l nei riferimenti R e R' di $V(A)$ e $V(A')$ rispettivamente. Naturalmente possono applicarsi a φ e alle sue equazioni in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ tutte le considerazioni svolte nel n. 2 in relazione ad affinità tra spazi affini numerici. In particolare si potranno trovare, come indicato nel n. 2, le equazioni in $\mathcal{R}'$ dell'immagine tramite φ di un sottospazio di A di cui siano note le equazioni in $\mathcal{R}$.

Supponiamo ora dati in A due riferimenti $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ e consideriamo le equazioni in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ della affinità identica di A in sè. Esse saranno del tipo (3.10), dove ora $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata d'ordine n su K e $\mathbf{c}$ è un vettore colonna d'ordine n su K. Esplicitamente esse assumono la forma

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \tag{3.25}$$

e va osservato che, essendo l'affinità identica invertibile, la matrice $\mathbf{A}$ è anche essa invertibile, ossia $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Le equazioni (3.10) o le (3.25) si possono ora interpretare nel senso che un punto P di A, avente in $\mathcal{R}$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{x}$, ha invece in $\mathcal{R}'$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{y}$. In altre parole le (3.10) o le (3.25) esprimono come cambiano le coordinate cartesiane di un punto di A quando si passa da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Per tale motivo esse prendono il nome di *formule del cambiamento del riferimento* nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Ad esempio $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ dell'origine O del riferimento $\mathcal{R}$. Si noti pure che la matrice $\mathbf{A}$ è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R' in $V(A)$.

Le formule del cambiamento di riferimento inverso, ossia del passaggio da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, si ottengono risolvendo le (3.10) o (3.25) in $x_1 \ldots, x_n$. Esse sono pertanto date da $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})$. Ripetendo le considerazioni del n. 2 non è difficile risolvere il problema di scrivere equazioni in $\mathcal{R}'$ di un sottospazio di cui siano note le equazioni in $\mathcal{R}$.

E' pure ovvio (e lo lasciamo per esercizio al Lettore) come, date le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, e quelle del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}'$ a un terzo riferimento $\mathcal{R}''$, si ottengano le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''$.

Esempio 3.3.1 Se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R)$, cioè se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ differiscono solo per l'origine, le formule del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ di O. Infatti la matrice $\mathbf{A}$ è quella identica, poiché è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R in $V(A)$. L'effetto del cambiamento di riferimento è allora una semplice traslazione delle coordinate. Per tale motivo $\mathcal{R}$ si dice ottenuto da $\mathcal{R}'$ mediante una traslazione dell'origine (di vettore $O' - O$).

Se invece $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O, R')$ hanno la stessa origine, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è la matrice della cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R'.

In generale se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$, si può pensare di passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ passando prima da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'' = (O', R)$ e quindi con una semplice traslazione dell'origine del riferimento, e poi da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$, e dunque lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento in $V(A)$. Ovvero si potrà prima passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''' = (O, R')$ lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento di $V(A)$ e poi passare da $\mathcal{R}'''$ a $\mathcal{R}'$ traslando l'origine. Il Lettore potrà mettere in relazione queste considerazioni con la proposizione (3.1.2).

Tornando infine a considerare due spazi affini A e A' su un campo K e una affinità $\varphi : A \to A'$, possiamo introdurre in A due riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ e in A' due riferimenti $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{S}'$. Si possono allora considerare le equazioni di φ in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ e quelle di φ in $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, nonché le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$. Lasciamo per esercizio al Lettore (che potrà ispirarsi al contenuto del n. 6 del capitolo 13 di [AL]) il compito di trovare le relazioni che sussistono tra tali formule ed equazioni.

3.4 Punti uniti e iperpiani uniti per una affinità.

a) Affinità del piano: punti uniti e rette unite. Sia $\varphi : A \to A$ una affinità del piano euclideo A. Fissato un riferimento per A, l'affinità ammette equazioni della forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Un punto $P(\mathbf{x})$ è unito per φ se e solo se $\varphi(P) = P$, cioè se e solo se le sue coordinate $\mathbf{x}$ sono soluzione del sistema lineare

$$(I - \mathbf{A})\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{c}, \tag{3.26}$$

ove si sia indicata con I la matrice identica di ordine 2. Se $\mathbf{B} = I - \mathbf{A}$ ha determinante non nullo, il sistema (3.26) ammette una unica soluzione, $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}$, e l'affinità φ ammette un unico punto unito.

Se invece il determinante di $\mathbf{B} = I - \mathbf{A}$ è nullo (cioè 1 è autovalore per la matrice $\mathbf{A}$), il sistema (3.26) può risultare incompatibile. Se il sistema è compatibile, cioè φ ammette punti uniti, l'insieme di tutti i punti uniti di φ costituisce un sottospazio affine.

Esempi

1) $n = 1$: una affinità $\varphi : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$, di equazione $y = ax + c$, ammette un punto unito $P(x)$ se e solo se il sistema $(1 - a)x = c$ è compatibile. Se $a \neq 1$, φ ammette un unico punto unito, di coordinata $x = \frac{c}{1-a}$. Se invece $a = 1$ occorre distinguere i casi $c \neq 0$ e $c = 0$. Se $a = 1$, $c \neq 0$ il sistema non ammette soluzione e φ non ha punti uniti (e infatti φ è una traslazione non identica). Se invece $a = 1$ e $c = 0$, φ è l'identità e tutti i punti sono uniti.

2) Nel piano euclideo, sia assegnata l'affinità φ di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 1 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Il sistema che caratterizza i punti uniti di φ è il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 - 1 \\ x_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

che ammette $(x_1, x_2) = (1, 1)$ come unica soluzione. Il punto $(1, 1)$ è dunque l'unico punto unito per φ.

3) Nel piano euclideo, sia assegnata l'affinità φ di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 = -3x_1 + 10\,x_2 \end{cases}.$$

Il sistema che caratterizza i punti uniti di φ è il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 = -3x_1 + 10\,x_2 \end{cases}$$

che equivale al sistema formato dalla sola equazione $x_1 = 3x_2$. L'affinità φ ammette dunque una retta interamente formata da punti uniti.

In generale, se una affinità φ ammette un punto unito P, le sue equazioni si semplificano se si considera il punto unito P come origine del riferimento. Una affinità φ del piano che ammette una retta r di punti uniti si dice *affinità omologica*, e la retta r è detta *retta omologica*. In un riferimento in cui la retta omologica sia l'asse x, una affinità omologica è rappresentata da equazioni particolarmente semplici. Infatti, imponendo alle equazioni generiche

$$\begin{cases} x' = a\,x \,+\, b\,y + c \\ y' = a'\,x \,+\, b'\,y + c' \end{cases}$$

che sia $\varphi(x,0) = (x,0)\ \forall\, x$, si vede che $c = c' = 0$, $a = 1$, $a' = 0$. Le equazioni di φ hanno dunque la forma:

$$\begin{cases} x' = x + \quad b\,y \\ y' = \qquad\quad b'\,y \end{cases} . \tag{3.27}$$

In particolare, la direzione del vettore $\varphi(P) - P$ non dipende dalla scelta del punto P esterno alla retta omologica:

$$\varphi(P) - P = (x\, + b\,y, b'\,y) - (x,y) = \, y\,(b, b' - 1).$$

Il vettore che congiunge un punto non unito con il suo trasformato ha dunque direzione fissa parallela al vettore $(b, b' - 1)$. Il caso $b = 0$, $b' = 1$ corrisponde all'identità e verrà escluso nel seguito.

Le equazioni (3.27) di una affinità omologica φ, permettono di studiare l'esistenza di rette s, diverse dalla retta omologica, che vengono complessivamente mutate in se stesse da φ, cioè $\varphi(s) = s$. Si osservi che ciò non implica necessariamente che s sia formata da punti uniti (anzi, sappiamo che r è l'unica retta di punti uniti se φ non è l'identità). Se $\varphi(s) = s$, diciamo che la retta s è *unita* per φ.

Una retta s è unita per φ se e solo se è unita per la sua inversa φ^{-1}. Se s ha equazione cartesiana $\alpha\,x' + \beta\,y' + \gamma = 0$, l'equazione di $\varphi^{-1}(s)$ è data da: $\alpha\,(x\, + b\,y) + \beta\,b'\,y + \gamma = 0$, cioè da $\alpha\,x\, + (\alpha b + \beta\,b')\,y + \gamma = 0$. La retta s è dunque unita se e solo se $\beta = \alpha\,b + \beta\,b'$ e dunque dall'annullarsi del determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & b' - 1 \end{pmatrix}.$$

Le rette (tranne al più la retta omologica) fisse per φ sono tutte e solo le rette parallele al vettore $(b, b'-1)$ e formano un fascio improprio. Se $b'=1$, le rette fisse sono tutte parallele alla retta omologica; in tal caso, φ è detta *scaling di rapporto* b ed ha equazioni $x' = x + by, y' = y$. Se invece $b' \neq 1$, ogni retta fissa $s \neq r$ interseca la retta omologica r in un punto, necessariamente fisso per φ. Tale punto di intersezione con r è l'unico punto unito su s. La retta s ha equazioni parametriche $x = x_0 + t\,b, y = t\,(b'-1)$ e un suo punto $P(x,y)$ viene trasformato da φ nel punto $\varphi(P) = (x,y) + y(b, b'-1) = (x_0 + t\;bb', t\,b'(b'-1))$. Se $b' = -1$, il punto medio tra P e $\varphi(P)$ è il punto fisso $(x_0, 0)$: φ è in tal caso la *simmetria rispetto alla retta r nella direzione parallela al vettore (b,-2)*; si osservi che ogni direzione non parallela alla retta omologica r è rappresentata da un vettore della forma $(d, -2)$ e la simmetria rispetto a r lungo una qualsiasi direzione non parallela a r è una affinità omologica.

Torniamo, più in generale, al caso $b' \neq 1$: in un sistema di riferimento in cui l'asse y sia parallelo alla direzione delle rette fisse, l'affinità omologica φ assume equazioni della forma: $x' = x, y' = b'y$ e dunque $b = 0$. Se infine, $b = 0$, $b' = -1$, l'affinità φ è la simmetria $(x,y) \mapsto (x,-y)$ rispetto alla retta omologica. In generale, in un piano euclideo, la simmetria ortogonale rispetto ad una retta r è una affinità omologica, avente r come retta omologica.

Esempio 3.4.1 Si vogliono scrivere le equazioni della simmetria piana φ rispetto alla retta r di equazione $3x + 2y + 1 = 0$, secondo la direzione della retta s di equazione $x = y$. La retta s è parallela al vettore $(1,1)$. L'immagine del punto $P(\xi, \eta)$ è il punto $P'(\xi', \eta')$, sulla retta r_P per P e parallela a s, tale che il punto medio tra P e P' sia l'intersezione tra r e r_P. La retta r_P per P e parallela ad s ha equazioni parametriche: $x = \xi + t, y = \eta + t$. L'intersezione tra r_P e r corrisponde al valore $t_0 = -\frac{3\xi+2\eta+1}{5}$ del parametro. Il punto P' è dunque $P' = P + 2t_0(1,1)$ e φ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x - 2\frac{3x+2y+1}{5} = \frac{-x-4y-2}{5} \\ y' = y - 2\frac{3x+2y+1}{5} = \frac{-6x-3y-2}{5} \end{cases}.$$

Esempio 3.4.2 Si consideri l'affinità $\varphi : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Si vogliono determinare le rette unite per φ, cioè le rette r tali che $\varphi(r) = r$. Poiché φ è un isomorfismo, è equivalente controllare che $\varphi^{-1}(r)$. Fissata una retta r di equazione cartesiana

$ax' + by' + c = 0$, l'equazione di $\varphi^{-1}(r)$ è data da $a\,(x + y - 1) + b\,(2x - y) + c = (a + 2b)\,x + (a - b)\,y + c - a = 0$. La retta $\varphi^{-1}(r)$ coincide con r (e dunque r è unita) se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+2b & a-b & c-a \end{pmatrix} = 1.$$

Se $a = 0$, deve essere necessariamente $b \neq 0$, perché r è una retta, e la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2b & -b & c \end{pmatrix}$$

che ha sempre rango 2, per ogni valore non nullo di b. Dunque, se $a = 0$, la retta r non è unita per φ.

Se invece $a \neq 0$, possiamo supporre $a = 1$ (moltiplicando eventualmente l'equazione per una costante); la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1+2b & 1-b & c-1 \end{pmatrix};$$

per il teorema degli orlati, essa ha rango 1 se e solo se b e c risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 1 - b - b\,(1+2b) = 0 \\ c - 1 - c\,(1+2b) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2b^2 + 2b - 1 = 0 \\ c = -\frac{1}{2b} \end{cases}.$$

Esistono dunque solo due rette unite, corrispondenti ai valori $b_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Poiché tali rette non sono parallele tra loro, il punto di intersezione deve essere un punto unito per φ.

b) Iperpiani uniti per una affinità.

Sia assegnata una affinità $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$, di equazioni $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, che sia un isomorfismo. Un iperpiano π di $\mathbf{A}^n$ si dice unito per φ se e solo se $\varphi(\pi) = \pi$ o, equvalentemente, se $\varphi^{-1}(\pi) = \pi$.

Sia $a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + \ldots + a_n\,y_n + c = 0$ l'equazione cartesiana di π, che può essere scritta in forma compatta $\mathbf{a}\,\mathbf{y} + c = 0$ introducendo il vettore $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. L'equazione di $\varphi^{-1}(\pi)$ è data da:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}) + c = (\mathbf{a}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + c = 0.$$

L'iperpiano π è unito per φ se e solo se esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{a}\,\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\,\mathbf{b} + c = \lambda c. \end{cases};$$

La prima equazione può essere riletta come $\mathbf{A}^t\,\mathbf{a}^t = \lambda\mathbf{a}^t$ e mostra che, affinché l'iperpiano sia unito, occorre che $\mathbf{a}$ sia un autovettore per $\mathbf{A}$ (si ricordi che $\mathbf{a}$ è sicuramente non nullo). D'altra parte, se $\mathbf{a}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$, di autovalore λ, occore distinguere i casi $\lambda = 1$ e $\lambda \neq 1$. Se $\lambda \neq 1$, e si sceglie $c = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{\lambda-1}$ risulta individuato un iperpiano unito per φ. Per un fissato autovalore $\lambda \neq 1$, tali iperpiani sono dunque parametrizzati dagli autovettori di $\mathbf{A}$ di autovalore λ, che formano un sottospazio (privato dell'origine) di dimensione pari alla molteplicità geometrica di λ.

Se invece $\lambda = 1$ e $\mathbf{a}$ è autovettore di $\mathbf{A}$ autovalore 1, il sistema (3.4) ammette soluzione se e solo se $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 0$, e, in tal caso, ogni scelta per c fornisce una soluzione. L'autovettore $\mathbf{a}$ individua, in tal caso, un fascio improprio di iperpiani uniti.

Esercizi.

Si considerino le affinità $\varphi : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^3$ e $\psi : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ su $\mathbf{R}$ di equazioni rispettivamente

$$\varphi : \begin{cases} x' = 3x + y + 2 \\ y' = x - y + 7 \\ z' = x - y + 2 \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} x'' = x' + y' + z' \\ y'' = 2x' + 3 \\ z'' = z' - y' + 2 \end{cases} \tag{3.28}$$

a) Determinare le equazioni della composizione $\psi\circ\varphi$ e l'applicazione lineare ad essa associata.

b) Determinare l'immagine tramite ψ della retta r di $\mathbf{A}^3$ passante per i punti $(0, 3, -1)$ e $(2, 5, 0)$ e del piano π di equazione $4x' + 2y' + z' = -3$.

c) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(P, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3))$, ove $P(6, -4, 5)$.

d) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(O, (\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3))$.

Capitolo 4

Spazi Euclidei

4.1 Definizione di spazio euclideo e generalità.

Sia A uno spazio affine di dimensione finita n su $\mathbf{R}$. Si dice che A è uno *spazio euclideo* se sullo spazio vettoriale reale $V(A)$ è assegnato un prodotto scalare definito positivo, che denoteremo con $\times$.

Il tipico esempio di spazio euclideo è lo spazio affine della geometria euclidea, laddove si consideri assegnato in $\mathcal{V}$, lo spazio dei vettori geometrici, il prodotto scalare euclideo $\times$ definito in [AL], cap. 18, par. 2.

Dato uno spazio euclideo A, due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $V(A)$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se lo sono rispetto al prodotto scalare $\times$. Per *lunghezza* di un vettore $\mathbf{v} \in V(A)$ si intende il numero reale

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \tag{4.1}$$

che si denota anche con il simbolo v. Poiché $\times$ è definito positivo, $\mathbf{v} = 0$ se e solo se $v = 0$. Un vettore di lunghezza 1 si dice un *versore*.

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz (cf. [AL], teorema (20.13)), per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $V(A)$, si ha che

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|, \tag{4.2}$$

da cui segue la doppia disuguaglianza (cf. [AL], corollario (20.14)):

$$|\,|\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|\,| \leq |\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}| \tag{4.3}$$

In uno spazio euclideo A la *distanza* $d(P,Q)$ di due punti P e Q è definita ponendo

$$d(P,Q) = |P - Q|. \tag{4.4}$$

Nel caso A coincida con $\mathcal{V}$, lo spazio della geometria euclidea, la definizione di distanza di due punti P e Q è esattamente la lunghezza del segmento PQ che unisce i due punti.

Le proprietà fondamentali della distanza così definita sono le seguenti:

(D1) *Positività*: per ogni coppia P, Q di punti di A si ha $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;

(D2) *Simmetria*: per ogni coppia P, Q di punti di A si ha $d(P,Q) = d(Q,P)$;

(D3) *Proprietà triangolare*: per ogni terna P, Q, R di punti di A si ha

$$|d(P,Q) - d(Q,R)| \leq d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R) \tag{4.5}$$

Le proprietà (D1) e (D2) sono immediata conseguenza del fatto che $\times$ è un prodotto scalare definito positivo, mentre (D3) segue dalla (4.3) (cfr. anche [AL], cap. 20, par. 5).

Dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $V(A)$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz la quantità $\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$ verifica la disuguaglianza

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} \leq 1; \tag{4.6}$$

esiste pertanto un numero $\vartheta \in [0,\pi]$ tale che

$$\vartheta = arccos\ (\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}) \tag{4.7}$$

e questo numero si dice *misura principale dell'angolo formato dai vettori* $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si denota col simbolo $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$. Invece ogni numero del tipo $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, si dice una *misura dell'angolo formato da* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, e con il simbolo $[\mathbf{v}\mathbf{w}]$ si denota l'insieme $\{\vartheta + 2k\pi k \in \mathbf{Z}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ di tutte le misure dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Le funzioni trigonometriche di $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ si dicono *funzioni trigonometriche dell'angolo* formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si ha pertanto

$$cos\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} sen\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} &= \sqrt{1 - cos^2\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}} = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{|\mathbf{v}|^2 \cdot |\mathbf{w}|^2}} = \qquad (4.9) \\ &= \sqrt{\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w})}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} \end{aligned}$$

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$, ossia se $cos\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = 0$.

4.2 Riferimenti cartesiani monometrici ortogonali.

Sia A uno spazio euclideo. Un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, R)$ di A si dice *monometrico ortogonale* se $R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $V(A)$ ortonormale rispetto a $\times$, cioè tale che

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \tag{4.10}$$

per ogni coppia di indici $i, j = 1, \dots, n$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, ossia vale 1 se $i = j$, vale 0 se $i \neq j$.

Se $\mathcal{R}$ è un riferimento monometrico ortogonale di A e se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di $V(A)$, aventi componenti $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ rispettivamente in R, si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \tag{4.11}$$

ossia il prodotto scalare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ coincide col prodotto scalare euclideo dei vettori numerici delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in R (cfr. [AL], cap. 18, esempio 18.10 (a)). In particolare la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}$ è data da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \tag{4.12}$$

mentre le funzioni trigonometriche di due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono date da

$$\begin{aligned} cos\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} &= \frac{(v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)}{\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + \ldots + w_n^2}} \\ sen\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} &= \sqrt{\frac{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Notiamo che, considerata la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \\ w_1 & \ldots & w_n \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

si ha

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t| = (v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2 \tag{4.15}$$

sicché la formula del seno può pure scriversi

$$sen\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.16}$$

e quindi, per il teorema di Binet

$$sen\, \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \sqrt{\Sigma_{i,j=1,\ldots,n} \frac{(v_i w_j - w_i v_j)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.17}$$

I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ risultano ortogonali se e solo se

$$v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = 0 \tag{4.18}$$

Se P e Q sono punti di A aventi in $\mathcal{R}$ coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$ e $(q_1, \ldots, q_n)$ rispettivamente, si ha

$$d(P, Q) = |P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2} \tag{4.19}$$

In particolare, se A ha dimensione 1 e P e Q hanno coordinate p e q rispettivamente, allora

$$d(P, Q) = |p - q| \,. \tag{4.20}$$

4.3 Ortogonalità.

Sia S un sottospazio affine dello spazio euclideo A. Su S resta indotta in modo naturale una struttura di spazio euclideo, mediante la restrizione a $V(S)$ del prodotto scalare fissato su $V(A)$, che è ancora definito positivo. Un vettore $\mathbf{v} \in V(A)$ si dice *ortogonale* o *perpendicolare* a S, e si scrive $\mathbf{v} \perp S$ oppure $S \perp \mathbf{v}$, se è ortogonale (rispetto al prodotto scalare $\times$) ad ogni vettore parallelo a S, cioè ad ogni vettore della giacitura $V(S)$ di S. Ossia

$$\mathbf{v} \perp S \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{w} \in V(S) \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \tag{4.21}$$

Siano S e S' sottospazi affini di uno spazio euclideo A. Si dice che S e S' sono *ortogonali* o *perpendicolari*, e si scrive $S \perp S'$, se ogni vettore parallelo a S è ortogonale ad ogni vettore parallelo a S'. Ossia

$$S \perp S' \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{v} \in V(S) \text{ e per ogni } \mathbf{w} \in V(S') \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \tag{4.22}$$

Si noti che $S \perp S'$ se e solo se ogni vettore parallelo a S è ortogonale a S', ovvero se ogni vettore parallelo a S' è ortogonale a S. Notiamo pure che, in base alla definizione che abbiamo dato, i punti sono gli unici sottospazi ortogonali ad ogni altro sottospazio.

Proposizione 4.3.1 *Sia S un sottospazio di A di dimensione m. Un sottospazio S' ortogonale a S ha dimensione al più uguale a $n - m$. Esistono sottospazi ortogonali a S di ogni dimensione $d = 0, \ldots, n - m$. I sottospazi S' di dimensione $n - m$ ortogonali a S sono tra loro paralleli e ciascuno di essi interseca S in uno e un solo punto.*

DIM. Sia $S = P + W$. Un sottospazio $S' = Q + W'$ è ortogonale a S se e solo se $W \subseteq W'^{\perp}$ il che equivale a dire che $W' \subseteq W^{\perp}$ (cfr. [AL], cap. 19, par. 1). Da ciò segue immediatamente la limitazione sulla dimensione di S' e il fatto che i sottospazi S' di dimensione $n-m$ sono tra loro paralleli, avendo giacitura $W^{\perp}$. Sia dato, ora, uno di questi sottospazi, $S' = Q + W^{\perp}$; poiché $V(A) = W \oplus W^{\perp}$, è unica la decomposizione $P - Q = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in W$ e $\mathbf{w} \in W^{\perp}$, sicché $P - \mathbf{v} = Q + \mathbf{w}$ è l'unico punto di $S \cap S'$. $\triangle$

Corollario 4.3.2 *Sia S un sottospazio di A di dimensione m e sia X un punto di A. Esiste uno e un solo sottospazio S' di dimensione $n - m$ ortogonale a S e passante per X.*

DIM. Se $S = P + W$ allora $S' = X + W^{\perp}$. $\triangle$

Corollario 4.3.3 *Sia S un sottospazio di A di dimensione m. S è individuato da un suo qualunque punto e da $n - m$ vettori ortogonali a S e linearmente indipendenti. In particolare un iperpiano è individuato da un suo qualsiasi punto e da un vettore non nullo ortogonale all'iperpiano.*

DIM. Sia $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}]$ un sistema linearmente indipendente di vettori ortogonali a S. Se W è la giacitura di S, $W^{\perp}$ è generato da $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}]$, sicché $W =< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m} >^{\perp}$. Di qui segue l'asserto. $\triangle$

Supponiamo ora introdotto in A un riferimento monometrico ortogonale $\mathcal{R}$ e siano S e S' sottospazi di A. Supponiamo che S abbia dimensione m e abbia in $\mathcal{R}$ un sistema normale $\mathcal{A}$ di equazioni del tipo

$$\mathcal{A} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n + a_{n-m} = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Proposizione 4.3.4 *S' è perpendicolare a S se e solo se per ogni vettore $\mathbf{v}$ parallelo a S' avente in $\mathcal{R}$ componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ si ha*

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n-m,1} & \ldots & a_{n-m,m} \\ v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = n - m. \tag{4.24}$$

DIM. Nel riferimento $\mathcal{R}$, la giacitura W di S ha come sistema di equazioni il sistema omogeneo $\mathcal{A}^{om}$ associato ad $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{om} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n = 0 \end{cases}, \tag{4.25}$$

cioè un vettore di componenti $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in $\mathcal{R}$ appartiene a W se e solo se ξ è una soluzione di $\mathcal{A}^{om}$. Sia ora $\mathbf{v}$ un vettore della giacitura W' di S' e ne siano $(v_1, \ldots, v_n)$ le componenti in $\mathcal{R}$. Se S è perpendicolare a S' allora ogni vettore di W è ortogonale ad ogni vettore di W', e quindi per ogni soluzione $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ di $\mathcal{A}^{om}$ si ha $v_1\xi_1 + \ldots + v_n\xi_n = 0$, ossia ξ è pure una soluzione dell'equazione

$$v_1x_1 + \ldots + v_nx_n = 0 \tag{4.26}$$

Ciò comporta che quest'ultima equazione (4.26) dipenda da $\mathcal{A}^{om}$, ossia che valga la (4.24). Viceversa se vale la (4.24) per ogni vettore $\mathbf{v}$ di W, l'equazione (4.26) dipende dal sistema $\mathcal{A}^{om}$, e quindi ne ha tutte le soluzioni. Ciò implica che ogni vettore di W è ortogonale ad ogni vettore di W', cioè S è ortogonale a S'. $\triangle$

Corollario 4.3.5 *(a) Se S' è una retta e S è un iperpiano avente in $\mathcal{R}$ equazione*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \tag{4.27}$$

allora S è perpendicolare a S' se e solo se una n-pla di numeri direttori di S' in $\mathcal{R}$ è data da $(a_1, \ldots, a_n)$.

(b) Se S e S' sono due rette di numeri direttori $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathcal{R}$, allora S è perpendicolare a S' se e solo se

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0 \tag{4.28}$$

Se poi, nel riferimento $\mathcal{R}$, la retta S ha equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

e la retta S' ha numeri direttori $(b_1, \dots, b_n)$, allora S e S' sono perpendicolari se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix} = 0 \tag{4.30}$$

DIM. Ovvia conseguenza della proposizione (4.3.4). △

Esempio 4.3.6 Sia A un piano euclideo e ne sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale. Due rette S e S' aventi in $\mathcal{R}$ equazioni

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0 \tag{4.31}$$

sono ortogonali se e solo se si ha

$$aa' + bb' = 0 \tag{4.32}$$

Infatti una coppia di numeri direttori di S [risp. di S'] è data da $(-b, a)$ [risp. $(-b', a')$]. Quindi la condizione di ortogonalità è

$$(-b)(-b') + aa' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad aa' + bb' = 0 \tag{4.33}$$

4.4 Orientazioni, questioni angolari e distanze.

(a) Orientazioni.

Sia A uno spazio affine di dimensione finita n su $\mathbf{R}$. Si dice che *è data una orientazione in A* se è data una orientazione sullo spazio vettoriale $V(A)$ (cfr. [AL], cap. 14, par. 7). Ricordiamo che esistono due distinte orientazioni su ogni spazio vettoriale V non nullo di dimensione finita su $\mathbf{R}$, e quindi due distinte orientazioni su ogni spazio affine reale di dimensione finita, che non sia un punto.

Esempio 4.4.1 *Orientazioni su una retta.* Per assegnare una orientazione su una retta basta dare un vettore $\mathbf{v}$ non nullo parallelo alla retta, perché questo è un riferimento della giacitura, e quindi determina una classe di riferimenti concordi. Un qualunque vettore $\mathbf{w}$ parallelo alla retta e non nullo determina la stessa orientazione di $\mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$, con $\lambda > 0$. Ovviamente

$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ determinano orientazioni opposte se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ con $\lambda < 0$. In particolare in uno spazio euclideo vi sono solo due versori paralleli alla retta, uno opposto dell'altro: essi individuano le due orientazioni opposte della retta.

Se φ è una affinità di A in sè si dice che φ *conserva le orientazioni* se l'applicazione lineare associata φ_l conserva le orientazioni di $V(A)$. Ciò accade se e solo se data l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.34}$$

di φ in un fissato riferimento $\mathcal{R}$ di A, la matrice quadrata $\mathbf{A}$ d'ordine n che compare in essa ha determinante positivo (cfr. [AL], cap. 14, par. 7, prop. 14.34).

Le affinità che conservano le orientazioni di A costituiscono un sottogruppo del gruppo affine, che denoteremo col simbolo $\mathrm{Aff}^+(A)$ e chiameremo *affinità dirette*.

(b) Angolo tra due rette orientate.

Sia A uno spazio euclideo di dimensione n e $\mathcal{R}$ sia un riferimento cartesiano monometrico ortogonale in A. Sia S una retta di A e sia assegnata una orientazione di S mediante il dato di un versore $\mathbf{v}$ parallelo a S (che si dice allora *concorde alla orientazione* di S). Se $\mathbf{v}$ ha in $\mathcal{R}$ componenti $(v_1, \ldots, v_n)$, tali componenti si dicono *coseni direttori della retta* S. Il motivo di tale denominazione risiede nel fatto che v_i è il coseno dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ con il versore $\mathbf{e}_i$ dell'asse x_i.

Date due rette orientate S e S', si dice *angolo formato dalle due rette* l'angolo formato dai due versori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ paralleli e concordi a S e S'. Tale angolo si denota col simbolo $\hat{SS'}$ e dipende dalle orientazioni scelte su S e S'. E' facile verificare che, se si cambia l'orientazione su entrambe le rette, l'angolo rimane lo stesso, mentre l'angolo cambia di π se si cambia l'orientazione su una sola delle due rette.

Se S e S' hanno coseni direttori $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$ rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} cos\,\hat{SS'} &= v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \qquad (4.35) \\ sen\,\hat{SS'} &= \sqrt{1 - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}\,. \end{aligned}$$

(c) Angolo tra iperpiani e tra rette e iperpiani.

Sia A uno spazio euclideo di dimensione n e $\mathcal{R}$ sia un riferimento cartesiano monometrico ortogonale in A. Siano S e S' iperpiani di A e siano assegnati un vettore $\mathbf{v}$ ortogonale a S e uno

$\mathbf{w}$ ortogonale a S'. Notiamo che tanto $\mathbf{v}$ che $\mathbf{w}$ sono definiti solo a meno del segno. Si definisce *angolo dei due piani* S e S' l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, che è definito solo a meno di multipli di π. I due iperpiani si dicono *ortogonali* se l'angolo da essi formato vale $\pi/2$. Se S e S' hanno, rispettivamente, equazioni

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + b = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

la condizione di ortogonalità tra S e S' è data da

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0\,. \tag{4.37}$$

Infatti $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ sono le componenti di vettori ortogonali rispettivamente a S e S'.

Se S è un iperpiano e S' è invece una retta, l'angolo tra S e S', sempre definito a meno di multipli di π, si definisce come l'angolo formato da S con un qualunque piano ortogonale a S'.

(d) Distanza di un punto da un sottospazio.

Sia A uno spazio euclideo di dimensione n, dotato di un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $\mathcal{R}$. Sia S un sottospazio di dimensione $m < n$ e P un punto di A. Esiste un unico sottospazio S' di dimensione $n - m$ di A ortogonale a S e passante per P. Sia Q il punto di intersezione di S' con S (cfr. proposizione (4.3.1)). Notiamo che Q è l'unico punto di S tale che $Q - P$ sia ortogonale a S. La distanza $d(P, Q)$ si definisce come *distanza* di P da S e si denota col simbolo $d(P, S)$.

Proposizione 4.4.2 *Per ogni punto $X \in S$ diverso da Q si ha $d(X, P) > d(P, S)$.*

Dim. Sia ha $X - P = (X - Q) + (Q - P)$. Allora

$$\begin{aligned} d(X,P)^2 &= (X - P) \times (X - P) = \\ &= (X - Q) \times (X - Q) + 2(X - Q) \times (Q - P) + (Q - P) \times (Q - P) = \\ &= d(X, Q) + d(P, Q) > d(P, S) \end{aligned}$$

in quanto $(X - Q) \times (Q - P) = 0$ perché $Q - P$ è ortogonale a S, $d(X, Q) > 0$ perché $X \neq Q$, e $\mathrm{d}(P, Q) = d(P, S)$ per definizione. $\triangle$

Calcoleremo ora $\mathrm{d}(P, S)$ in due casi particolari abbastanza semplici. Il primo è quando S è un iperpiano.

Esempio 4.4.3 *Distanza di un punto da un iperpiano.*

Proposizione 4.4.4 *Sia*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \tag{4.38}$$

un'equazione di un iperpiano S in $\mathcal{R}$ e sia P il punto di coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$. Allora

$$d(P, S) = \frac{|a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{4.39}$$

Dim. Le equazioni parametriche della retta S' ortogonale a S per il punto P sono date da

$$x_i = p_i + ta_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbf{R} \tag{4.40}$$

Le coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$ del punto $Q = S \cap S'$ corrispondono al valore t_0 del parametro t che sia radice dell'equazione

$$\begin{aligned} a_1(p_1 + ta_1) + \ldots + a_n(p_n + ta_n) + a = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a) + t(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = 0 & \end{aligned} \tag{4.41}$$

ossia a

$$t_0 = -\frac{a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \tag{4.42}$$

Quindi

$$\begin{aligned} d(P, S) = d(P, Q) &= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2} \\ &= \sqrt{(t_0a_1)^2 + \ldots + (t_0a_n)^2} = |t_0| \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \\ &= \frac{|a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} \end{aligned} \tag{4.43}$$

△

Esempio 4.4.5 *Distanza di un punto da una retta.* Un altro caso interessante è quello della distanza tra un punto P e una retta S in uno spazio euclideo $\mathbf{A}$ di dimensione 3.

Supponiamo S passi per il punto $R(\alpha, \beta, \gamma)$ ed abbia numeri direttori (λ, μ, ν). Sicché le equazioni parametriche di S sono

$$x = \alpha + \lambda t, \ y = \beta + \mu t, \ z = \gamma + \nu t \tag{4.44}$$

Il piano S' per $P(p, q, r)$ ortogonale ad S ha equazione

$$\lambda(x - p) + \mu(y - q) + \nu(z - r) = 0\,. \tag{4.45}$$

Le coordinate di $Q = S \cap S'$ si ottengono per $t = t_0$ soluzione dell'equazione

$$\lambda(\alpha + \lambda t - p) + \mu(\beta + \mu t - q) + \nu(\gamma + \nu t - r) = 0 \Leftrightarrow \tag{4.46}$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)t + \lambda(\alpha - p) + \mu(\beta - q) + \nu(\gamma - r) = 0$$

ossia per

$$t_0 = \frac{\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \ . \tag{4.47}$$

Dunque abbiamo la formula

$$\begin{aligned} d(P,S) &= d(P,Q) = \left\{ \left[p - \alpha - \lambda \frac{\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} \right]^2 + \right. \\ & + \left[q - \beta - \mu \frac{\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)}{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} \right]^2 + \\ & \left. + \left[r - \gamma - \nu \frac{\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)}{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \{ (p-\alpha)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \lambda[\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)]^2 + \\ & +(q-\beta)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \mu[\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\gamma)]^2 + \\ & +(r-\gamma)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \nu[\lambda(p-\alpha) + \mu(q-\beta) + \nu(r-\nu)]^2 \}^{1/2} \ . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Esempio numerico: $P(3,2,1)$ ed S ha equazioni parametriche

$$x = 2 + t, \ y = -4 + 3t, \ z = 1 - t \ . \tag{4.49}$$

Allora il piano S' per P ortogonale ad S ha equazione

$$(x-3) + 3(y-2) - (z-1) = x + 3y - z + 4 = 0 \tag{4.50}$$

Le coordinate di $Q = S \cap S'$ si ottengono per t soluzione della equazione $(2+t) + 3(-4+3t) - (1-t) + 4 = 12t + 9 = 0$, ossia per $t = -3/4$: dunque $Q = (2-3/4, -4+3\cdot(-3/4), 1-(-3/4)) = (5/4, -25/4, 7/4)$ e $d(P,S) = d(P,Q) = \sqrt{(3-5/4)^{\frac{1}{2}} + (2+25/4)^{\frac{1}{2}} + (1-7/4)^{\frac{1}{2}}}$.

(e) Distanza tra due rette sghembe.

Proposizione 4.4.6 *Siano S e S' due rette sghembe di uno spazio euclideo A di dimensione 3. Esiste una ed una sola retta S'' ortogonale ad S ed S' ed incidente sia S che S'.*

DIM. Siano $S = P+ < \mathbf{v} >$ e $S' = P'+ < \mathbf{v}' >$. Il complemento ortogonale $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$ di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$ ha dimensione 1; si indichi con $\mathbf{w}$ un generatore di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$. Detti π il piano per S e parallelo a $\mathbf{w}$ e π' il piano per S' e parallelo a $\mathbf{w}$, la retta S'' cercata è l'intersezione tra π e π'. △

Si osservi che, nella dimostrazione della proposizione precedente, si può scegliere, come particolare generatore $\mathbf{w}$ il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$.

La retta S'' interseca S in un punto P e S' in un punto Q. Notiamo che P e Q sono gli unici punti di S e S' rispettivamente tali che $P - Q$ sia ortogonale a S e S'. La distanza $d(P, Q)$ si definisce come *distanza tra le due rette sghembe* S e S' e si denota col simbolo $d(S, S')$.

Proposizione 4.4.7 *Per ogni punto $X \in S$ e per ogni punto $Y \in S'$ si ha $d(X, Y) \geq d(S, S')$ e l'uguaglianza viene ottenuta se e solo se $X = P$ e $Y = Q$.*

DIM. Analoga a quella della proposizione (4.4.4), viene lasciata al Lettore. △

Supponiamo che S abbia numeri direttori (λ, μ, ν) e passi per il punto $P(p, q, r)$, mentre S' abbia numeri direttori (λ', μ', ν') e passi per il punto $P'(p', q', r')$. Non è difficile verificare, tenendo presente quanto visto in precedenza, la seguente formula:

$$d(S, S') = \frac{\begin{vmatrix} p - p' & q - q' & r - r' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix}}{\sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}} \tag{4.51}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Osservazione 4.4.8 Siano S e S' due rette sghembe di uno spazio euclideo A di dimensione 3. Esiste un solo piano α contenente S e parallelo a S'. La distanza tra S e S' coincide con la distanza di un qualsiasi punto P' di S' da α.

Esempio 4.4.9 Nello spazio affine numerico $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ con riferimento standard, siano S la retta di equazioni $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ ed S' la retta di equazioni $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Si vuole determinare la retta S'' che interseca ortogonalmente sia S che S'. Un vettore parallelo ad S è $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$, mentre un vettore parallelo ad S' è $\mathbf{v}' = (1, 2, 3)$. Quindi un vettore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ è il loro prodotto vettoriale $\mathbf{w} = (1, -2, 1)$. I fasci di piani per S e S' hanno equazione, rispettivamente

$$2\lambda x + 4\mu y - (\lambda + 3\mu)z - 2\lambda - 8\mu = 0$$
$$(2\lambda + 3\mu)x - \lambda y - \mu z = 0.$$

Un piano del primo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda + 4\mu(-2) - (\lambda + 3\mu) = 0$, ossia per (λ, μ) proporzionale a $(11, 1)$. Un piano del secondo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda + 3\mu) - \lambda(-2) - \mu = 0$, ossia per (λ, μ) proporzionale a $(1, -2)$. I piani π e π' sono dunque:

$$\pi : 22x + 4y - 14z - 30 = 0, \qquad \pi' : 4x + y - 2z = 0$$

Si ha quindi $S'' = \begin{cases} 22x + 4y - 14z - 30 = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$.

La distanza tra S ed S' è la distanza tra i punti $P = S \cap S''$ e $Q = S' \cap S''$.

Volendo determinare la distanza tra S ed S' si può anche procedere come segue. Il piano α nel fascio per S parallelo a S' si ricava per $2\lambda + 8\mu - (\lambda + 3\mu)3 = 0$:

$$\alpha : 2x - 4y + 2z + 6 = 0.$$

La distanza tra S ed S' coincide con la distanza di un qualsiasi punto P' di S' da α; ad esempio, per $P'(0, 0, 0)$, si ricava che $d(S, S') = \frac{6}{\sqrt{4+16+4}}$.

4.5 Isometrie e cambiamenti di riferimento.

Siano A e A' spazi euclidei. Una affinità $\varphi : A \to A'$ si dice una *congruenza* o *isometria* se l'applicazione lineare associata $\varphi_l : V(A) \to V(A')$ è un omomorfismo metrico (cfr. [AL], cap. 18, par. 3) ossia se per ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V(A) \times V(A)$ si ha

$$\varphi_l(\mathbf{v}) \times \varphi_l(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \tag{4.53}$$

Dal corollario (18.12) di [AL] segue che φ_l è una applicazione iniettiva e dunque ogni congruenza è iniettiva. In particolare una congruenza tra spazi della stessa dimensione è un isomorfismo. Per definizione, inoltre, le congruenze conservano il coseno degli angoli e le distanze. Ciò giustifica il nome di isometrie dato alle congruenze.

Se A è uno spazio euclideo di dimensione n, si può considerare il gruppo delle congruenze di A in sè, che denoteremo col simbolo $\mathcal{I}s\,(A)$, che è un sottogruppo del gruppo affine Aff (A).

Le isometrie che sono pure affinità dirette si dicono *movimenti dello spazio* A e formano un sottogruppo $M(A)$ di $\mathcal{I}s\,(A)$.

Sia ora $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di A e consideriamo l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.54}$$

di una affinità φ di A in sè in $\mathcal{R} = (O, R)$. La matrice $\mathbf{A}$ non è altro che la matrice di φ_l nel riferimento ortonormale R di $V(A)$. Dunque φ appartiene a $\mathcal{I}s\,(A)$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ e φ appartiene a $M(A)$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale speciale $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ (cfr. [AL], cap. 21, par. 3).

In particolare, se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ sono riferimenti cartesiani monometrici ortogonali di A, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo (4.54), con $\mathbf{A}$ matrice ortogonale, che risulta diretta o inversa a seconda che R e R' siano concordi o discordi.

Esempio 4.5.1 Isometrie di una retta. Sia A una retta euclidea e ne sia φ una affinità. Fissato un riferimento cartesiano monometrico $\mathcal{R} = (O, \mathbf{v})$, l'equazione di φ in $\mathcal{R}$ si scrive come $y = ax + c$. L'affinità φ è una isometria se e solo se $a = \pm 1$, ed è un movimento se e solo se $a = 1$. Dunque i movimenti di una retta euclidea sono tutte e sole le traslazioni. Invece le congruenze che non sono movimenti hanno equazione del tipo $y = -x + c$. Queste, al contrario delle traslazioni, hanno uno, e un solo, punto fisso, precisamente il punto avente in $\mathcal{R}$ coordinata $x = c/2$. Se si assume questo punto come origine del riferimento, la congruenza viene ad avere equazione $y = -x$, ossia è la simmetria rispetto all'unico punto fisso.

Esempio 4.5.2 Simmetria ortogonale o riflessione rispetto ad un iperpiano. Sia A uno spazio euclideo e π un iperpiano fissato. Per ogni punto P, si consideri la retta r_P per P e ortogonale a π. Detto H_P il punto di intersezione tra π e r_P, resta univocamente determinato il punto $P' \in r_P$ tale $\{H_P P\} = -\{H_P P'\}$. Il punto P' è detto simmetrico ortogonale di P rispetto all'iperpiano π. La posizione $\varphi(P) = P'$ definisce una affinità di A in sè, detta *simmetria ortogonale* (o *riflessione*) rispetto all'iperpiano π, rispetto alla quale tutti i punti di π sono fissi. L'iperpiano π è detto *iperpiano di simmetria* per φ; se π è una retta (e quindi lo spazio euclideo ha dimensione 2), viene detto anche *asse di simmetria*.

Descriviamo in dettaglio le equazioni di una simmetria ortogonale del piano. Nel piano euclideo, in cui sia fissato un riferimento monometrico ortogonale, si consideri la simmetria ortogonale φ rispetto alla retta r di equazione cartesiana $a\,x + b\,y + c = 0$. Si vogliono determinare le equazioni di φ.

La direzione ortogonale a r è individuata dal vettore (a, b); pertanto, la retta per un punto $P(\xi, \eta)$ e ortogonale a r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \xi + ta \\ y = \eta + tb \end{cases}$$

Il punto H_P di intersezione tra questa retta e r corrisponde al valore t_0 del parametro t che verifica l'uguaglianza

$$a(\xi + ta) + b\,(\eta + tb) + c = 0$$

cioè

$$t_0 = -\frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2 + b^2}$$

e

$$H_P = (\xi - \frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2 + b^2}\,a, \eta - \frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2 + b^2}\,b).$$

Ma H_P è il punto medio tra P e $\varphi(P) = (\xi', \eta')$ e dunque:

$$\begin{cases} \xi' = \xi + 2t_0 a = \xi - 2\frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2+b^2}\,a = \xi - 2\frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2+b^2}\,a \\ \eta' = \eta + 2t_0 b = \eta - 2\frac{a\,\xi + b\,\eta + c}{a^2+b^2}\,b \end{cases}.$$

La matrice di φ_l è ortogonale inversa:

$$\begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -2\frac{ab}{a^2+b^2} \\ -2\frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

4.6 Similitudini

Siano A e A' spazi euclidei sullo stesso campo. Una affinità $\varphi : A \to A'$ si dice *similitudine* se esiste uno scalare $k > 0$ tale che

$$|\varphi_l\{PQ\}| = k\,|\{PQ\}|.$$

Lo scalare k viene detto *rapporto* della similitudine. In particolare, ogni traslazione e ogni isometria è una similitudine.

Proposizione 4.6.1 *Sia data una affinità* $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *di equazioni* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$*. Allora* φ *è una similitudine se e solo se*

$$|\mathbf{a}^1| = |\mathbf{a}^2| = \ldots = |\mathbf{a}^n|$$
$$\mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j = 0 \qquad i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n$$

dove con $\mathbf{a}^i$ *si denoti la colonna i-ma di* $\mathbf{A} = (a_{ij})$*.*

DIM. L'affinità φ è una similitudine se e solo se esiste k tale che:

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}| = k\ |\mathbf{x}| \qquad \forall\ \mathbf{x}.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\begin{aligned} k^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2) &= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + \ldots (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)^2 \\ &= |\mathbf{a}^1|^2\ x_1^2 + \ldots + |\mathbf{a}^n|^2\ x_n^2 + 2\textstyle\sum_{i\neq j} \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j\ x_i x_j. \end{aligned}$$

Poiché tale equazione possa essere soddisfatta per ogni valore di $\mathbf{x}$ occorre e basta che tutti i suoi coefficienti siano nulli, ottenendo le relazioni cercate. △

Esempio 4.6.2 n=1: i movimenti hanno equazione della forma $y = \pm\ x + \ c$, mentre le similitudini hanno equazione della forma $y = k\ x + \ c$.

4.7 Isometrie di un piano euclideo

Sia A un piano euclideo e consideriamo una isometria φ di A in sè che fissa un punto O di A, ossia tale che $\varphi(O) = O$. Una φ siffatta si dice una *rotazione* se è un movimento, una *riflessione o ribaltamento* se non è un movimento ma solo una congruenza. Vediamo il motivo di questa terminologia.

Scegliamo un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ cartesiano monometrico ortogonale di A di origine O e scriviamo l'equazione matriciale (4.54) di φ in $\mathcal{R}$ che ora assume la forma $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è una matrice ortogonale di ordine 2. Si dimostra facilmente (cf. [AL], esempio 21.9) che la matrice $\mathbf{A}$, se è diretta, assume la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$ che si dice *angolo della rotazione* φ. Indicati con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i vettori del riferimento R, se la matrice $\mathbf{A}$ è diretta, risulta che α è proprio l'angolo formato da $\mathbf{e}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = cos\,\alpha\, \mathbf{e}_1 + sen\,\alpha\, \mathbf{e}_2$. Lo stesso vale per l'angolo formato da $\mathbf{e}_2$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = -sen\,\alpha\, \mathbf{e}_1 + cos\,\alpha\, \mathbf{e}_2$. Più in generale, per ogni punto P di A, i vettori $\{OP\}$ e $\{O\varphi(P)\}$ formano un angolo α.
Se invece $\mathbf{A}$ è inversa, assume allora la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$; si mostra facilmente che i punti della retta $r : x = t\,(cos\alpha + 1), y = t\,sen\,\alpha$ sono fissi per φ, mentre ogni punto della retta $x = t\,(cos\alpha + 1), y = t\,sen\,\alpha$, passante per l'origine e ortogonale a r, verifica la relazione $\varphi(x, y) = (-x, -y)$. La φ è quindi una riflessione (o simmetria ortogonale) rispetto all'asse r (cfr. [AL], cap. 18, es. 18.7 (e)). Per una opportuna scelta del riferimento monometrico ortogonale R (cioè utilizzando un riferimento con la stessa orientazione di R e avente come primo vettore del riferimento un versore della retta fissa), la matrice $\mathbf{A}$ assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

ossia le equazioni di φ in un opportuno riferimento cartesiano monometrico ortogonale sono del tipo

$$x' = x, y' = -y\,. \tag{4.58}$$

In generale una congruenza φ di A in sè risulta composta di una traslazione e di una rotazione, oppure di una traslazione e di una riflessione ortogonale, a seconda che sia diretta o inversa.

Si noti che in generale, se A è uno spazio euclideo di dimensione n e φ ne è una congruenza che fissa un punto O, il corollario (21.41) di [AL] chiarisce la struttura di φ, che risulta composta di un certo numero di rotazioni in piano mutuamente ortogonali e un certo numero di simmetrie ortogonali rispetto a iperpiani ortogonali ai suddetti piani.

Una *glissoriflessione* è una isometria φ del piano euclideo ottenuta componendo la riflessione avente per asse una retta r e la traslazione non identica lungo un vettore parallelo ad r. Una glissoriflessione è dunque una isometria inversa priva di punti fissi.

La discussione precedente mostra la prima asserzione del seguente Teorema che fornisce una classificazione delle isometrie piane:

Teorema 4.7.1 *Una isometria di $\mathbf{A}^2$ diversa dall'identità è:*

- *una rotazione se è diretta e fissa un punto;*
- *una riflessione se è inversa e fissa (almeno) un punto;*
- *una traslazione se è diretta e non ha punti fissi;*
- *una glissoriflessione se è inversa e non ha punti fissi.*

DIM. Supponiamo che una isometria $\varphi : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ abbia un punto unito C. Modificando eventualmente il riferimento ortogonale monometrico, è possibile supporre che il punto C coincida con l'origine. L'isometria φ ha dunque equazioni del tipo: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, con $\mathbf{A}$ matrice ortogonale. In base alla classificazione già vista delle isometrie piane che fissano l'origine, si ritrovano la prima e la seconda asserzione dell'enunciato.

Supponiamo dunque che φ non abbia punti uniti e che sia diretta. In un sistema ortogonale monometrico, si scrivano le equazioni di φ, con le consuete notazioni; la condizione affinché φ non abbia punti uniti è che il seguente sistema non sia compatibile:

$$\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12}y + c_1 \\ y = a_{21}x + a_{22}y + c_2 \end{cases}.$$

Equivalentemente, non deve essere compatibile il sistema:

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)\,x + a_{12}\,y + c_1 = 0 \\ a_{21}\,x + (a_{22} - 1)\,y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Sicuramente il rango della matrice dei coefficiente di tale sistema non può allora avere rango 2, e si deve quindi avere che

$$0 = \begin{vmatrix} (a_{11} - 1) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - 1) \end{vmatrix} = (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} + 1 - a_{11} - a_{22}$$

(cioè che 1 sia un autovalore per φ_l). Ricordando che φ è diretta per ipotesi, ne segue che:

$$2 - a_{11} - a_{22} = 0.$$

Ma $|a_{11}| \leq 1$, $|a_{22}| \leq 1$ perché il riferimento scelto è monometrico ortogonale. Dunque la sola possibiltà è che si abbia $a_{11} = a_{22} = 1$, e dunque $a_{12} = a_{21} = 0$ e l'isometria φ è una traslazione, come si voleva.

Supponiamo infine che φ non abbia punti uniti e che sia inversa. Anche l'isometria φ^2 risulta allora priva di punti uniti: infatti, se fosse $\varphi^2(P) = P$ per qualche punto P, l'isometria φ manderebbe il segmento $P\varphi(P)$ nel segmento $\varphi(P)P$; in particolare, il punto medio M di tale segmento verrebbe mandato in sé stesso, contro l'ipotesi che φ non abbia punti uniti. Per quanto sopra osservato, l'isometria φ^2, che è una isometria diretta priva di punti uniti, è una traslazione per un vettore $\mathbf{v}$; scelto un qualsiasi punto Q, il vettore $\mathbf{v}$ deve essere uguale a $\{Q\varphi^2(Q)\}$. In particolare $Q\varphi(Q)$ è parallelo al vettore $\varphi^2(Q)\varphi^3(Q)$ e i punti Q, $\varphi(Q)$, $\varphi^3(Q)$, $\varphi^2(Q)$ sono vertici di un parallelogramma. L'isometria φ^2 muta dunque il segmento $Q\varphi^2(Q)$ nel segmento $\varphi^2(Q)\varphi^4(Q)$, che giace sulla retta s individuata da $Q\varphi^2(Q)$ perch'e $\varphi^4(Q) = \varphi^2(Q) + \mathbf{v}$. Osservando che il segmento $\varphi^2(Q)\varphi^4(Q)$ è l'immagine di $\varphi(Q)\varphi^3(Q)$ tramite φ, si ricava che φ manda la retta s' per $\varphi(Q)$ e $\varphi^3(Q)$ sulla retta s. Poiché, viceversa, φ manda s in s', se ne conclude che φ scambia s e s', e dunque manda in sè stessa la retta r complanare ed equidistante da s e s'. La restrizione di φ ad r coincide con la traslazione $\tau_{\frac{\mathbf{v}}{2}}$ di vettore $\frac{\mathbf{v}}{2}$, perché il suo quadrato opera come la traslazione di vettore $\mathbf{v}$; dunque $\tau_{-\frac{\mathbf{v}}{2}} \circ \varphi$ fissa la retta r punto per punto. Se ne conclude che $\tau_{-\frac{\mathbf{v}}{2}} \circ \varphi$ è una riflessione e φ una glissoriflessione. $\triangle$

Coordinate polari piane e affinità della retta complessa.

L'insieme $\mathbf{C} \setminus \{O\}$ dei numeri complessi, privato dell'origine, è in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mediante la posizione $\rho(cos\,\theta + i\,sen\,\theta) \mapsto (x, y)$, ove

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta \end{cases} .$$

La coppia $[\rho, \theta]$ costituisce le *coordinate polari* del punto $P(x, y)$. Lo scalare $\rho > 0$ è detto *modulo* di P, mentre θ è detto *anomalia* di P rispetto all'asse x. Si osservi che $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \pm\, arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, ove vale il segno $+$ quando $y \geq 0$, mentre vale il segno $-$ se $y < 0$.

Più in generale, in un piano euclideo orientato, siano fissati una semiretta s di origine O ed un vettore $\mathbf{v_s}$ ad essa parallelo e concorde. Per ogni punto $P \neq O$ resta individuata una semiretta s_P di origine O e passante per P; si denoti $\mathbf{v}_P = \{OP\}$. Lo scalare positivo $\rho = |\mathbf{v}_P|$ e l'angolo orientato θ tra $\mathbf{v_s}$ e $\mathbf{v_P}$ sono detti il *modulo* e l'*anomalia* di P rispetto alla semiretta s.

E' possibile inoltre identificare il piano affine numerico con i numeri complessi:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto & z = x + iy \end{array} \tag{4.59}$$

Sfruttando tale identificazione, ad ogni affinità della retta complessa (pensata come spazio affine complesso di dimensione 1) corrisponde una affinità piana: si consideri l'affinità di $\mathbf{C}$ di equazione ($a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$):

$$z' = \varphi(z) = az + b. \tag{4.60}$$

Sostituendo in (4.60), $a = a_1 + ia_2$, $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$, si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = &\quad az + b = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2) && (4.61)\\ = &\quad (a_1 x - a_2 y + b_1) + i\,(a_2\, x + a_1 y + b_2), && (4.62) \end{aligned}$$

cui corrisponde l'affinità piana $\varphi : (x, y) \mapsto (a_1x-a_2y+b_1, a_2\,x+a_1y+b_2)$. Tale affinità è diretta, perché il determinante dell'applicazione lineare associata φ_l è: $a_1^2+a_2^2 > 0$, ed è una similitudine, in base alla Proposizione 4.6.1. Viceversa, ogni similitudine diretta del piano corrisponde ad una affinità (4.60) di $\mathbf{C}$. Il gruppo delle affinità della retta complessa corrisponde dunque al gruppo delle similitudini dirette del piano. Ponendo $a = \rho\,(cos\theta + i\, sen\theta)$, si ricava:

$$\varphi(x, y) = (\rho\, cos\theta\, x - \rho\, sen\theta\, y, \rho\, sen\theta\, x + \rho\, cos\theta\, y) + (b_1, b_2). \tag{4.63}$$

In particolare, l'affinità piana corrispondente a (4.60) è una omotetia se $a \in \mathbf{R}$ e b=0, ed è una rotazione se $|a| = 1$ e b=0.

Per ottenere le similitudini inverse, basta comporre con il coniugio:

$$\begin{array}{ccc} z & \mapsto & \overline{z} \\ (x, y) & \mapsto & (x, -y) \end{array}.$$

Gruppi finiti di movimenti piani

Siano assegnati, nel piano euclideo A, un sistema di riferimento monometrico ortogonale, e l'identificazione corrispondente di A con $\mathbf{C}$.

Teorema 4.7.2 *Ogni gruppo finito non banale di movimenti del piano è isomorfo a* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$*, per qualche* $n \geq 2$*, oppure a uno dei gruppi diedrali* D_{2n}*,* $n \geq 1$*.*

DIM. Osserviamo innanzitutto che un gruppo finito G di movimenti non può contenere traslazioni né glissoriflessioni (perchè il quadrato di una glissoriflessione è una traslazione non banale). Supponiamo che tutti gli elementi del gruppo siano rotazioni. Se G ha ordine due, il suo unico elemento non nullo è la rotazione di un angolo piatto. Se invece l'ordine di G è maggiore di 2, siano φ e ψ due elementi distinti del gruppo, diversi dall'identità. Per una opportuna scelta dell'origine del riferimento, è possibile supporre che i movimenti abbiano equazioni della forma:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a\,z \\ \psi(z) &= a'\,z + b \end{aligned}$$

Anche i movimenti inversi devono appartenere a G:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(z) &= \tfrac{z}{a} \\ \psi^{-1}(z) &= \tfrac{z}{a'} - \tfrac{b}{a'} \end{aligned}$$

come anche le loro composizioni:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(z) &= a\,a'\,z + a\,b \\ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi)(z) &= \tfrac{1}{a\,a'}\,(a\,a'\,z + a\,b) - \tfrac{b}{a\,a'} = z + \tfrac{b(a-1)}{a\,a'}; \end{aligned}$$

poiché G non contiene rotazioni e $a \neq 1$, l'ultima uguaglianza implica che $b = 0$, cioè che tutte le rotazioni in G abbiano lo stesso centro. In particolare, G è commutativo.

Sia ora φ l'elemento di G con l'angolo di rotazione minimo e chiamiamo θ tale angolo. Se $\psi \in G$ è una rotazione di angolo γ deve essere $\gamma = k\,\theta$ per un opportuno intero k: altrimenti, posto m il massimo intero tale che $m\,\theta < \gamma$, si avrebbe $0 < \gamma - m\,\theta < \theta$ e G conterrebbe una rotazione di angolo strettamente inferiore a θ, contraddicendo le ipotesi. In particolare, il gruppo G è ciclico finito, ed è dunque un gruppo ciclico di radici dell'unità.

Supponimo ora che il gruppo G contenga (almeno una) riflessione σ, e consideriamo il sottogruppo G^+ di G formato dagli elementi diretti. Per quanto osservato, G^+ è un gruppo ciclico finito, generato da una rotazione R di ordine n ($n = 1$ se G^+ è banale). Poichè gli elementi σ, σR, …, σR^{n-1} sono riflessioni tra loro distinte, risulta che il numero m delle riflessioni in G è almeno n: $m \geq n$. D'altra parte, se $S_1, \ldots, S_m$ sono le riflessioni di G, allora $\sigma S_1, \ldots, \sigma S_m$ sono m distinte rotazioni in G: dunque il numero m delle riflessioni è uguale al numero n delle rotazioni, e G è un gruppo diedrale.

Esempio 4.7.3

- La simmetria ortogonale rispetto ad una retta genera un gruppo G di isometrie isomorfo a $\mathbf{Z}_2$.
- Le isometrie di un poligono regolare con n lati formano un gruppo di isometrie G isomorfo al gruppo diedrale D_{2n}.

- Le rotazioni che sono isometrie di un poligono regolare con n lati formano un gruppo di isometrie G isomorfo al gruppo diedrale $\mathbf{Z}_n$.
- Il gruppo delle isometrie di un rettangolo non quadrato è isomorfo al gruppo di Klein $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

4.8 Isometrie in uno spazio euclideo di dimensione 3

Sia A uno spazio affine euclideo di dimensione 3 e sia $\mathcal{R} = (O, R = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3])$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale per A. Si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}_1$ l'affinità $\varphi : A \to A$ le cui equazioni nel riferimento $\mathcal{R}$ sono date da:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

I punti della retta passante per O e parallela a $\mathbf{v}_1$ sono tutti e soli i punti fissi per φ, se α non è un multiplo intero di 2π. La retta dei punti fissi viene detta anche *asse della rotazione*. Si osservi che la matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale speciale, e dunque φ è un movimento di A.

Più in generale, se $\mathbf{v} \in V(A)$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, una affinità $\varphi : A \to A$ si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}$ se, comunque si completi $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale R' di $V(A)$ con la stessa orientazione di R, le equazioni di φ in (O, R') sono come in (4.64). Questo equivale a dire che, se $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ sono le equazioni di φ in $\mathcal{R}$, si ha

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{RR'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{RR'}^{-1} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

e le colonne di $\mathbf{M}_{RR'}$ sono formate dalle coordinate dei vettori di R' nel riferimento R. Si osservi che, di nuovo, la matrice $\mathbf{B}$ è ortogonale speciale. Fissato il riferimento, si può definire φ anche nel modo seguente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{x}) \cos\alpha + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v})\, \sin\alpha. \tag{4.66}$$

Per esempio, se il vettore $\mathbf{v}$ è parallelo a $(1, 1, 1)$, allora la formula per φ diventa:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cos\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ y - x \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos\alpha}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

E' possibile dimostrare, viceversa, che le rotazioni di centro O attorno ad un vettore di $V(A)$ sono tutte e sole le isometrie che hanno in $\mathcal{R}$ equazioni del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{B}$ matrice ortogonale speciale:

Proposizione 4.8.1 *Sia $\varphi : A \to A$ una isometria che ha in $\mathcal{R}$ equazioni $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{B}$ matrice ortogonale speciale. Allora esistono un angolo α e un versore $\mathbf{v} \in V(A)$ tali che φ è la rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore $\mathbf{v}$.*

Dim. Sia $\mathbf{A}$ la matrice ortogonale diretta associata a φ_l in un riferimento monometrico ortogonale. L'applicazione φ_l porta versori in versori, quindi gli autovalori di A devono essere numeri (reali o complessi) di modulo 1. Siccome $\mathbf{A}$ è di ordine 3×3, il polinomio caratteristico $p(t)$ di $\mathbf{A}$ è un polinomio di terzo grado in t e dunque ammette sicuramente almeno una radice reale $\lambda = \pm 1$. Affermiamo che $\lambda = 1$ è un autovalore di $\mathbf{A}$. Da ciò seguirà che un autovettore $\mathbf{v}$ relativo all'autovalore 1 definisce un asse fisso per φ. L'isometria indotta sul piano ortogonale a $\mathbf{v}$ risulta necessariamente essere una congruenza diretta, e dunque la rotazione di un angolo α, come si voleva. Supponiamo dunque per assurdo che -1 sia l'unico autovalore reale di $\mathbf{A}$. Indichiamo gli altri due autovalori di $\mathbf{A}$, che sono numeri complessi coniugati, con λ e $\bar{\lambda}$. Allora $\lambda\bar{\lambda} = \|\lambda\|^2 = 1$, come abbiamo già osservato, e il determinante di $\mathbf{A}$ è

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)\lambda\bar{\lambda} = (-1)\|\lambda\|^2 = -1$$

contraddicendo l'ipotesi che $\mathbf{A}$ sia ortogonale diretta. △

Esempio 4.8.2 Sia $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ lo spazio affine numerico, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$. Si vogliono determinare le equazioni della rotazione φ di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La rotazione φ può essere descritta come la composizione

$$\varphi = T_P \circ \varphi' \circ T_{-P} \tag{4.67}$$

ove con T_P (risp., T_{-P}) si indichi la traslazione di passo $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (risp., $-P$), e con φ' la rotazione di $\pi/3$ attorno al versore $\mathbf{v}$. (La stessa descrizione vale per una qualunque scelta di P in l.)

Completo $\mathbf{v}$ ad una base ortonormale positivamente orientata R' di $M(3,1,\mathbf{R})$; ad esempio, $R' = [\mathbf{v}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$. Risulta:

$$\begin{aligned} M_{R'}(\varphi_l') &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\pi/3 & sen\,\pi/3 \\ 0 & sen\,\pi/3 & cos\,\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{M}_R(\varphi_l') &= \mathbf{M}_{RR'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{RR'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ricavano le equazioni di φ in $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x} - P) + P \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.68)$$

Fissato il riferimento $\mathcal{R}$, le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3, grazie ad un fondamentale teorema di Eulero, detto *dei tre angoli*. Il teorema di Eulero mostra che ogni trasformazione ortogonale diretta che fissa il punto O è la composizione di tre rotazioni, determinate dai tre angoli ψ, ϕ e θ:

Teorema 4.8.3 (Eulero) *Ogni rotazione φ di centro O è della forma*

$$\varphi = R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi$$

dove ϕ, θ e ψ sono angoli, detti di Eulero*, tali che*

$$0 \le \psi, \phi < 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

e con R^i_α si denoti la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ del riferimento. In particolare gli angoli ψ, θ e ϕ sono univocamente determinati da φ.

Dim. La rotazione φ è una isometria e preserva l'orientazione, ed è dunque completamente determinata dalle immagini dei vettori $\mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{v_3}$. Osserviamo che sono univocamente individuati gli angoli $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \phi < 2\pi$ tali che

$$\varphi(\mathbf{v}_3) = R^3_\phi \circ R^1_\theta(\mathbf{v}_3) :$$

θ e ϕ sono detti rispettivamente *latitudine* e *longitudine* di $\varphi(\mathbf{v}_3)$. Posto ora $R' = R^3_\phi \circ R^1_\theta$, si ha che $R'(\mathbf{v}_1)$ e $R(\mathbf{v}_1)$ sono vettori che giacciono nel piano perpendicolare a $R(\mathbf{v}_3)$ e formano un angolo ψ, con $0 \leq \psi < 2\pi$; ne segue che

$$R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi(\mathbf{v}_1) = R(\mathbf{v}_1).$$

Poiché la rotazione R^3_ψ lascia fisso $\mathbf{v}_3$, segue la tesi. $\triangle$

La classificazione delle isometrie dello spazio euclideo di dimensione 3 comprende, oltre a rotazioni, riflessioni e traslazioni, anche altri tre tipi di isometria: le glissoriflessioni, le glissorotazioni e le riflessioni rotatorie. Una *glissoriflessione* è la composizione di una riflessione con una traslazione non identica in una direzione parallela al piano di simmetria della riflessione. Una *glissorotazione* è la composizione di una rotazione con una traslazione in una direzione parallela all'asse di rotazione. Una *riflessione rotatoria* è la composizione di una rotazione con la riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

4.9 Complessificazione di uno spazio affine reale

Se sullo spazio vettoriale reale V è assegnato un prodotto scalare $V \times V \to \mathbf{R}$, sullo spazio complessificato restano definite due forme bilineari

$$V_\mathbf{C} \times V_\mathbf{C} \to \mathbf{C}:$$

una forma bilineare simmetrica, definita da:

$$< a+ib, c+id >=< a, c > +i < a, d > +i < b, c > - < b, d >=< a, c > - < b, d > +i(< a, d > + < b, c >);$$

ed una forma hermitiana antisimmetrica:

$$< a + ib, c + id >=< a, c > - < b, d > -i(< a, d > + < b, c >).$$

Anche se V è definito positivo, in $V_\mathbf{C}$ ci sono vettori isotropi. La forma bilineare simmetrica permette di definire le nozioni di *lunghezza* di un vettore di $V_\mathbf{C}$ e di *angolo* tra due vettori di $V_\mathbf{C}$.

4.10 Complessificazione di uno spazio affine reale

Per la nozione di complessificazione $V_{\mathbf{C}}$ di uno spazio vettoriale reale V si rimanda al paragrafo 11 del capitolo 12 di [AL].

Sia A uno spazio affine reale, con spazio vettoriale associato $V = V(A)$. Si consideri l'insieme $A_{\mathbf{C}} = A \times A$: i suoi elementi sono coppie di punti $P(p, q)$ con $p, q \in A$ e su esso viene assegnata in modo naturale una struttura di spazio affine complesso, mediante la posizione:

$$\begin{array}{rcl} A_{\mathbf{C}} \times A_{\mathbf{C}} & \to & V_{\mathbf{C}} \\ (P = (p,q), S(s,r)) & \mapsto & \{PS\} = S - P = (\{ps\}, \{qr\}) = \{ps\} + i\{qr\}. \end{array}$$

Infatti:

- per ogni punto $P = (p, p')$ di $A_{\mathbf{C}}$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{C}}$ esiste un unico punto S di $A_{\mathbf{C}}$ tale che $S - P = \mathbf{v}$: infatti, posto $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_i \in V$, occorre e basta scegliere $S = (s, s')$ con $s = p + \mathbf{v}_1$, $s' = p' + \mathbf{v}_2$.

- per ogni terna $(P = (p, p'), Q = (q, q'), R = (r, r'))$ di punti di $A_{\mathbf{C}}$ si ha:

  $$\{PQ\} + \{QR\} = \{PR\}, \tag{4.69}$$

  poiché $\{PR\} = (\{pr\}, \{p'r'\} = (\{pq\} + \{qr\}, \{p'q'\} + \{q'r'\})$.

Nello spazio affine complessificato $A_{\mathbf{C}}$ risulta inoltre definita in modo naturale la seguente involuzione, detta *coniugio*:

$$\begin{array}{rcl} c : A_{\mathbf{C}} & \to & A_{\mathbf{C}} \\ (p,q) & \mapsto & c(p,q) = \overline{(p,q)} = (p,q') \end{array}$$

ove con q' si denota il simmetrico di q rispetto a p, cioè l'unico punto di A tale che $\{pq\} = \{q'p\}$. In $A_{\mathbf{C}}$ vengono detti *punti reali* i punti fissi del coniugio, cioè i punti (p, p), $p \in A$, che ne formano la diagonale.

Il complessificato di ogni sottospazio affine reale di A è un sottospazio affine di $V_{\mathbf{C}}$. Un sottospazio affine di $A_{\mathbf{C}}$ si dice un *sottospazio reale* se contiene almeno un punto reale e se la giacitura è un sottospazio reale di $V_{\mathbf{C}}$.

Ogni affinità $\varphi : A \to A'$ tra spazi affini reali induce una corrispondente affinità $\varphi_{\mathbf{C}} : A_{\mathbf{C}} \to A'_{\mathbf{C}}$ che la estende; tale estensione è definita dalla posizione $\varphi_{\mathbf{C}}(p, q) = (\varphi(p), \varphi(q))$. Un *riferimento reale* di $A_{\mathbf{C}}$ è una coppia $(O, (\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n))$, ove O è un punto reale di $A_{\mathbf{C}}$, mentre

$(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n)$ è un riferimento reale di $A_{\mathbf{C}}$. In un riferimento reale $(O, (\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n))$, i punti reali hanno coordinate reali, mentre il coniugato di $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è $\overline{P}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

Raccogliamo alcune proprietà dei sottospazi di $A_{\mathbf{C}}$:

Proposizione 4.10.1 *Sia H un sottospazio affine dello spazio affine complessificato $A_{\mathbf{C}}$. Valgono le seguenti affermazioni:*

1) H è reale $\Leftrightarrow$ $H = \overline{H}$;

2) H è reale $\Leftrightarrow$ in un riferimento reale ammette equazioni a coefficienti reali.

Dim.

1) $\Rightarrow$) H reale significa che $H = P + W$, ove P è un punto reale di $A_{\mathbf{C}}$, mentre W è un sottospazio vettoriale reale di $V_{\mathbf{C}}$. Ma allora $\overline{H} = \overline{P + W} = \overline{P} + \overline{W} = P + W = H$, come si voleva.

   $\Leftarrow$) Se $H = \overline{H}$, per ogni $P \in H$ si deve avere che anche $\overline{P} \in \overline{H} = H$. Anche il punto medio M del segmento $P\overline{P}$ deve quindi appartenere a H, che è un sottospazio affine. Ma $\overline{M}$è punto medio dello stesso segmento, e quindi $M = \overline{M}$ è un punto reale di H. Se W è la giacitura di H, si ha ceh $H = M + W$ e $\overline{H} = \overline{M} + \overline{W} = M + \overline{W}$; per l'unicità della giacitura, segue che $W = \overline{W}$ e il sottospazio W è reale.

2) $\Rightarrow$) Supponiamo che H ammetta un sistema di equazioni a coefficienti reali $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Il sottospazio coniugato $\overline{H}$ ha equazioni $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ che coincidono con le equazioni di H, perché i coefficienti sono reali. Dunque $H = \overline{H}$.

   $\Leftarrow$) Poiché H è reale, può essere scritto nella forma $H = P + W$ con P punto reale e W sottospazio reale. In un sistema di riferimento reale, il punto P ha coordinate reali $P(p_1, \ldots, p_n)$ $(p_i \in \mathbf{R})$ e i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di una base reale di W hanno componenti reali: $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \ldots v_{in})$, con $v_{ij} \in \mathbf{R}$. Un punto $X = (x_1, \ldots, x_n)$ appartiene ad H se e solo se $X - P \in W$; ma questo accade se e solo se il vettore $(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ è linearmente dipendente da $(v_{11}, \ldots, v_{1n}), \ldots, (v_{m1}, \ldots, v_{mn})$, cioè se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \ldots & x_n - p_n \\ v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ & \ldots & \\ v_{n1} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix} = n.$$

Per il teorema degli orlati, ciò equivale all'annullarsi degli orlati di un minore non nullo di rango m contenuto nella sottomatrice ottenuta eliminando la prima riga. Ma l'annullarsi di ciascun orlato fornisce una equazione reale soddisfatta dai punti di H. Dunque H ammette un sistema di equazioni a coefficienti reali. $\triangle$

4.11 Complessificazione del piano

Si considerino il piano affine reale A ed il suo complessificato $A_{\mathbf{C}}$. Una retta r di $A_{\mathbf{C}}$ è *reale* se $r = \overline{r}$, il che accade se e solo se, in un riferimento reale, r ammette una equazione a coefficienti reali. Si osservi che ogni retta reale ha infiniti punti reali. Se $P \neq c(P)$, la retta $< P, c(P) >$ è una retta reale.

Se una retta r non è reale, cioè $r \neq \overline{r}$, allora l'intersezione $r \cap \overline{r}$ è vuota o è data da un punto P: nel primo caso le due rette sono parallele, e la loro direzione è reale; nel secondo caso, il punto P di intersezione è necessariamente reale, ma le direzioni di r e $\overline{r}$ non sono reali.

In un riferimento reale, sia $ax + by + c = 0$ l'equazione di una retta r. La retta $\overline{r}$ è allora definita dall'equazione $\overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c} = 0$. La retta r è reale se e solo se la terna (a, b, c) dei coefficienti è proporzionale ad una terna di numeri reali numeri, cioè:

$$r = \overline{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = 1.$$

Supponiamo dunque che la retta non sia reale, cioè il rango della precedente matrice sia 2. Se $rg \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix} = 2.$, allora il sistema delle equazioni di r e $\overline{r}$ è un sistema di Cramer, e le due rette si intersecano in un punto P. Altrimenti, il sistema non è compatibile, e le rette r e $\overline{r}$ sono parallele.

Esempio 4.11.1 Sia fissato un un riferimento reale.

1) Sia r la retta di equazione $2(i+1)x + (3i+3)y + 5i + 5 = 0$. Dividendo per il coefficiente di x, ottengo l'equazione reale $x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} = 0$; dunque la retta r è reale.

2) Si consideri la retta r di equazione $7x - iy + 2 = 0$; la retta $\overline{r}$ ha dunque equazione $7x + iy + 2 = 0$. La retta r non è reale: mettendo infatti a sistema le equazioni di r e $\overline{r}$ si ottiene un sistema di Cramer. Considerando la differenza delle equazioni di r e $\overline{r}$ si vede

subito che il loro punto di intersezione è $P(-\frac{2}{7}, 0)$; P è l'unico punto reale di r, visto cha r è parallela al vettore non reale $(i, 7)$.

3) Le rette $r : 3x + 2y - i = 0$ e $\overline{r} : 3x + 2y + i = 0$ sono parallele entrambe alla direzione reale $(-2, 3)$ e non hanno punti reali.

Supponiamo che il piano A sia euclideo. E' possibile introdurre in $A_{\mathbf{C}}$ un riferimento reale ortogonale $(O, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_2)$. Presi due punti $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$, la distanza tra P e Q è per definizione il modulo del vettore $\{PQ\}$; se il vettore $\{PQ\}$ è isotropo, i punti P e Q sono a distanza nulla, e la retta per P e Q è detta retta isotropa. Una retta si dice *isotropa* se è parallela ad un vettore isotropo; nel piano, una retta isotropa è una qualsiasi retta parallela a $(1, i)$ o $(1, -i)$. Esistono dunque due fasci impropri di rette isotrope: il fascio dato dalle equazioni $-ix + y + c = 0$ e il fascio dato dalle equazioni $ix + y + c = 0$. In particolare, per ogni punto reale P passano due rette isotrope; esse costituiscono il luogo dei punti a distanza nulla da P, cioè la circonferenza di centro P e raggio 0. Se $P(p_1, p_2)$ è un punto, le rette isotrope per P hanno equazione $(x - p) + i(y - q) = 0$ e $(x - p) - i(y - q) = 0$ rispettivamente. La circonferenza di centro P e raggio 0 è data dalla loro unione $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0$.

4.12 Complessificazione dello spazio 3-dimensionale

Sia A uno spazio affine di dimensione 3 reale e sia $A_{\mathbf{C}}$ la sua complessificazione, nella quale si consideri fissato un riferimento reale.

Un piano π diequazione cartesiana $a\,x + a\,y + c\,z + d = 0$ è reale se e solo se $\pi = \overline{\pi}$, cioè see solo se

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = 1.$$

Se $\pi \neq \overline{\pi}$, si dice che il piano π è immaginario. In tal caso, si verificano due possibilità, a seconda che

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = 2 \text{ oppure } 1;$$

nel primo caso, $\pi \cap \overline{\pi}$ è una retta reale e la giacitura di π non è reale, mentre nel secondo caso $\pi \cap \overline{\pi} = \emptyset$ cosichhé i piani π e $\overline{\pi}$ sono paralleli tra loro, e la loro giacitura è un sottospazio reale.

Una retta r è reale se e solo se $r = \overline{r}$, o, equivalentemente, se essa ammette un sistema di equazioni reali

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0 \end{cases}.$$

Per determinare un tale sistema di equazioni per una retta r assegnata, si consideri un punto $P \in r$. Anche $\overline{P}$ risulta appartenere a r, che è reale, come anche il punto medio M tra P e $\overline{P}$. Dunque, M è un punto reale di r. Se il punto P non è reale, la direzione di r è individuata dal vettore $P - \overline{P}$; denotate con $P(\alpha, \beta, \gamma)$ le coordinate di P e con $\overline{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ le coordinate di $\overline{P}$, le componenti del vettore $P - \overline{P}$ sono date da:

$$P - \overline{P} = (\alpha - \overline{\alpha}, \beta - \overline{\beta}, \gamma - \overline{\gamma}) = (2i\,Im(\alpha), 2i\,Im(\beta), 2i\,Im(\gamma)).$$

Dunque la retta r contiene il punto reale M ed è parallela al vettore reale $(\,Im(\alpha),\ Im(\beta),\ Im(\gamma))$; ora è facile determinarne equazioni reali, utilizzando il teorema degli orlati.
Se, invece, il punto P di partenza era reale, si considera un nuovo punto $Q \in r$: se anche tale punto è reale, allora $P - Q$ è già un vettore reale non nullo parallelo a r. Se invece Q non è reale, ci si riconduce al caso precedente.

Supponiamo ora che la retta r non sia reale, cioè $r \neq \overline{r}$; le rette r e $\overline{r}$ sono o complanari o sghembe. Se r e $\overline{r}$ sono complanari, diciamo che sono di *prima specie*; in tal caso, se le due rette sono incidenti, il punto di incidenza è necessariamente un punto reale, e la loro giacitura non è reale; se, invece, r e $\overline{r}$ sono parallele, esse non hanno punti reali, ma la loro giacitura è reale. Nel secondo caso, invece, r e $\overline{r}$ sono sghembe e diciamo che sono di *seconda specie*: esse sono prive di punti reali e le loro giaciture non sono reali.

Una retta i cui numeri direttori sono (λ, μ, ν) è isotropa se e solo se $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$. L'insieme dei vettori che soddisfano l'equazione $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$ è detto *cono isotropo*. Un piano π di equazione $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ contiene una retta isotropa se e solo se esistono (λ, μ, ν) tali che:

$$\begin{cases} a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

In un opportuno riferimento, è possibile supporre che $a \neq 0$ e ricavare che $\lambda = -\frac{b\mu + \nu c}{a}$. Sostituendo tale relazione nell'equazione del cono isotropo si ottiene che:

$$\left(\frac{b\mu + \nu c}{a}\right)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$$

$$b^2\,\mu^2 + c^2\,\nu^2 + 2b\,c\,\mu\,\nu + a^2\,\mu^2 + a^2\,\nu^2 = 0$$
$$(a^2+b^2)\,\mu^2 + 2b\,c\,\mu\,\nu + (a^2+c^2)\,\nu^2 = 0$$

Il discriminante dell'equazione di secondo grado così ottenuta è:

$$\Delta = b^2\,c^2 - (a^2+b^2)(a^2+c^2) = a^2\,(a^2+b^2+c^2);$$

in particolare, si hanno due soluzioni distinte se $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, mentre si ha una unica soluzione altrimenti. Un piano di equazione $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ tale che $a^2+b^2+c^2=0$ si dice *piano isotropo* e contiene un solo fascio di rette isotrope.

Osservazione 4.12.1 *a) Ogni piano reale contiene due fasci di rette isotrope.*
b) Per una retta isotropa passa un unico piano isotropo. (si dimostra in modo analogo)

Esempio 4.12.2 Sia fissato un riferimento reale in $A_{\mathbf{C}}$.

1) Sia assegnata la retta r di equazioni: $x-1-i = \frac{y-2i}{2} = z-2+i$. La retta r è reale perché contiene sia il punto $A(1+i, 2i, 2-i)$ che il suo coniugato $\overline{A}(1-i, -2i, 2+i)$. Per determinare un sistema di equazioni reali per r, considero il punto medio $M(1,0,2)$ di A e $\overline{A}$, e, come numeri direttori, $A-\overline{A}=(1,2,1)$. Le equazioni reali si trovano imponendo che
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1;$$
dunque r ha equazioni $2x-2-y=0, x-z+1=0$.

2) Si considerino i piani α di equazione $(1-i)\,x+(2-i)\,y+(1+2i)\,z+1=0$ e β di equazione $(i+1)\,x+(1+2i)\,y+(2-i)\,z+i=0$. Si vuole stabilire se la retta $r=\alpha\cap\beta$ sia reale.

Il piano coniugato di α è $\overline{\alpha}: (1+i)\,x+(2+i)\,y+(1-2i)\,z+1=0$. La retta r è reale se e solo se $r\subset\overline{\alpha}$, cioè se e solo se $\overline{\alpha}$ appartiene al fascio di piani per r. Dunque:

$$r \text{ è reale } \Leftrightarrow \ \mathrm{rg}\begin{pmatrix} (1-i) & (2-i) & (1+2i) & 1 \\ (i+1) & (1+2i) & (2-i) & i \\ (1+i) & (2+i) & (1-2i) & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ora,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-i & 2-i & 1+2i & 1 \\ i+1 & 1+2i & 2-i & i \\ 1+i & 2+i & 1-2i & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ i+1 & 1+2i & 2-i & i \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ i & 2i & 4-i & i \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4i+2 & 0 \\ -1 & -2 & 4i+1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Dunque la retta r non è reale.

3) Per un punto immaginario passa una unica retta reale. Ad esempio, sia $P(i, -2i, 3+4i)$. Una retta reale r che passi per P deve contenere anche $\overline{P}$. Ma allora r coincide con la retta per P e $\overline{P}$, che è reale perché passa per il punto medio M di P e $\overline{P}$, che è reale, ed ha giacitura reale, generata dal vettore $\{P\overline{P}\}$.

4) Scrivere le equazioni di una retta reale di equazioni:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ \overline{a}\,x + \overline{b}\,y + \overline{c}\,z + \overline{d} = 0 \end{cases}$$

Ad esempio,

$$r = \begin{cases} (1+2i)\,x + (2-i)\,y + (1-i)\,z + 1 = 0 \\ x + 2\,y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

5) La condizione affinché due rette

$$r = \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{e } \overline{r} = \begin{cases} \overline{a}\,x + \overline{b}\,y + \overline{c}\,z + \overline{d} = 0 \\ \overline{a'}\,x + \overline{b'}\,y + \overline{c'}\,z + \overline{d'} = 0 \end{cases}$$

siano di prima specie (cioè complanari) è che

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ \overline{a'} & \overline{b'} & \overline{c'} & \overline{d'} \end{pmatrix} = 0.$$

Ad esempio, se

$$r = \begin{cases} (1+i)\,x + 2\,y - (1-i)\,z - 1 = 0 \\ 2ix + (1+i)\,y - 1 = 0 \end{cases}$$

occorre studiare

$$\det\begin{pmatrix} 1+i & 2 & i-1 & -1 \\ 2i & 1+i & 0 & -1 \\ 1-i & 2 & -i-1 & -1 \\ -2i & 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Le rette sono complanari.

6) Se r è una retta di seconda specie e P è un punto reale, allora esiste una unica retta reale per P complanare con r.

Ad esempio, siano $P(1,0,0)$ e $r = \begin{cases} x + i\,y + z + i = 0 \\ x - y - z + i = 0 \end{cases}$

7) Verificare che la retta $r = \begin{cases} 4x - 3\,y + 3 = 0 \\ x + 3\,y - 3i\,z + 3 = 0 \end{cases}$ è isotropa e determinare l'unico piano isotropo che contiene r.

Calcolando il prodotto vettoriale dei vettori ortogonali ai due piani, osserviamo che un vettore parallelo alla retta r è $(3i, 4i, 5)$. La retta r è isotropa perchè $-9 - 16 + 25 = 0$. Un piano di equazione $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ è isotropo se $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. D'altra parte, tale piano è parallelo ad r se e solo se $3ai + 4bi + 5c = 0$, cioè $c = -\frac{3ai+4bi}{5} = -i\frac{3a+4b}{5}$. Sostituendo quest'ultima relazione nella condizione di isotropia, si ottiene:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 - \frac{9a^2 + 16b^2 + 24ab}{25} = 0$$
$$16a^2 + 9b^2 - 24ab = (4a - 9b)^2 = 0.$$

In particolare, basta scegliere $a = 9$, $b = 4$, $c = -i\frac{27+16}{5} = -i\frac{43}{5}$. Ora è sufficiente determinare d tale che il corrispondente piano contenga r; per determinare d è sufficiente imporre il passaggio del piano per un punto di r.

8) Trovare la retta isotropa nel piano $3x + 2y + z = 0$. Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}.$$

4.13 Esercizi su forme bilineari e prodotti scalari.

1) Siano fissati gli spazi vettoriali $V = M(2,1,\mathbf{R})$ e $U = M(3,1,\mathbf{R})$ e si considerino le applicazioni $f_i : V \times U$ $(i = 1,\ldots,4)$ definite come segue, per ogni $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y} \in U$:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 2x_1y_3 + y_2 \\ f_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1 - y_3 \\ f_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -5 \\ f_4(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 2x_1y_1 + x_1y_3 - x_2y_2 + 4x_2y_3 \end{aligned}$$

i) Quali di esse sono bilineari?

ii) Determinare la matrice associata ad f_4 rispetto ai riferimenti $R = \{(2,-1)^t, (1,0)^t\}$ per V e $S = \{(-1,0,1)^t, (0,1,-1)^t, (-2,0,0)^t\}$ per U.

2) i) Determinare la matrice, il discriminante rispetto alla base canonica, e il rango delle seguenti forme bilineari su $M(3,1,\mathbf{R})$:

a) $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 7x_3y_3 + 5x_2y_3$;

b) $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_3$;

c) $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 7x_3y_3 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$.

ii) Quali, tra queste forme bilineari, sono prodotti scalari?

iii) Determinare $\{\mathbf{x} \in M(3,1,\mathbf{R}) | \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \text{ per ogni } \mathbf{y} \in M(3,1,\mathbf{R})\}$ per ciascuna di queste forme bilineari.

3) Nello spazio $V = M(3,1,\mathbf{R})$, si consideri il prodotto scalare rappresentato rispetto al riferimento canonico E, dalla matrice:

$$M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Dire se φ è degenere e determinarne il discriminante rispetto alla base canonica.

ii) Dire se φ è definito positivo.

iii) Determinare l'ortogonale, rispetto a φ, dei seguenti sottospazi: $H_1 =< (0,1,1) >$, $H_2 =< (0,1,1), (1,0,0) >$, $H_3 =< (0,1,1), (0,0,1) >$.

iv) Nelle notazioni del punto precedente, determinare $H_1 \cap H_1^\perp$, $H_3 \cap H_3^\perp$. E' vero che $V = H_1 \hat{\oplus} H_1^\perp$? E' vero che $V = H_3 \hat{\oplus} H_3^\perp$?

v) Dire se la somma diretta $V =< (2,1,1) > \oplus < (1,0,0),(0,0,1) >$ è ortogonale.

vi) Determinare la matrice di φ nel riferimento $R = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$.

4) i) Determinare il rango e il radicale di (V,φ) quando $V = M(4,1,\mathbf{R})$ e φ è il prodotto scalare rappresentato rispetto al riferimento canonico E, dalla matrice:

$$M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Descrivere V come somma diretta ortogonale di Rad (V,φ) e di un sottospazio W tale che la restrizione di φ a W sia non degenere.

iii) Determinare l'immagine dei vettori $(3,-1,5,5)$, $(1,1,1,1)$ nella reciprocità associata a φ.

5) Nello spazio $M(3,1,\mathbf{R})$ con prodotto scalare euclideo, trovare una base per il complemento ortogonale dei sottospazi generati rispettivamente da:

a) $(1,-2,1)$;

b) $(1,-2,1)$, $(7,0,1)$;

c) $(3,0,0),(2,1,1)$;

d) $(0,1,2)$

e) $(3,-1,2),(6,-2,4)$.

Determinare, inoltre, la proiezione ortogonale di $(0,0,3)$ su ciascuno dei sottospazi precedenti.

6) Normalizzare il riferimento canonico E di $V = \mathbf{C}^3$, rispetto ai prodotti scalari rappresentati, in E, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & e^{3i} \end{pmatrix}.$$

7) Normalizzare il riferimento canonico E di $V = \mathbf{R}^3$, rispetto ai prodotti scalari rappresentati, in E, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} .$$

8) i) Nello spazio $M(3, 1, \mathbf{R})$, si consideri il prodotto scalare φ rappresentato, nel riferimento canonico E, da una delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Moltiplicando ciascun vettore di E per un opportuno scalare, determinare un riferimento E' tale che $M_{E'}(\varphi)$ sia una matrice diagonale tale che ogni elemento sulla diagonale principale sia ± 1.

ii) Analoga domanda, quando le matrici indicate rappresentano φ nel riferimento R formato dai vettori $(2, 0, 1)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$.

9) a) Nello spazio $M(4, 1, \mathbf{R})$ con prodotto scalare euclideo, trovare una base ortonormale per il sottospazio H generato da $(1, 1, 0, 0), (0, 2, 3, 0), (0, 0, 4, 1)$ (risp., per il sottospazio K generato da $(3, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 0), (0, -2, 1, 2)$).

b) trovare una base per il complemento ortogonale di ciascuno dei sottospazi al punto precedente.

10) Sia (V, φ) uno spazio vettoriale di dimensione finita, con prodotto scalare non degenere. Se il procedimento di Gram-Schmidt modifica il riferimento R di V in un riferimento ortonormale R', mostrare che la matrice di cambio da R a R' è triangolare.

11) Trovare matrici ortogonali 3×3 con prima riga una delle seguenti: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 0)$, $(\frac{5}{13}, 0, \frac{2}{13})$.

12) Dimostrare che la somma di due matrici ortogonali è ortogonale.

4.14 Esercizi su spazi euclidei.

Si consideri il piano affine numerico $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ con riferimento standard.

1) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{y}|$, $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|$ e $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$.

2) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   i) Calcolare il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

   ii) Calcolare il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{y}$.

   iii) Calcolare il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-2\mathbf{y}$.

   iv) Determinare un vettore $\mathbf{z} \in \mathbf{A}^2$ tale che l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ sia $\pi/3$.

3) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   i) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

   ii) Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

   iii) Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

4) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

5) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{A}^2$ e sia $\mathbf{p}\begin{pmatrix} (x_1+y_1)/2 \\ (x_2+y_2)/2 \end{pmatrix}$. Calcolare la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{x}$, la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{y}$ e la distanza da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Dedurre che $\mathbf{p}$ è il punto medio tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

6) Siano l la retta di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$ e $\mathbf{q}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a l. Determinare inoltre la distanza di $\mathbf{q}$ da l.

7) Siano l la retta di equazione cartesiana $2x - 3y = 4$, $\mathbf{q}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   i) Determinare le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a l.

   ii) Determinare la distanza di $\mathbf{q}$ da l.

8) Siano l la retta di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$ e $\mathbf{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta l.

ii) Determinare la distanza di $\mathbf{q}$ da l.

iii) Determinare la distanza di $\mathbf{q}$ dalla retta di equazione $3x - y = -4$.

9) Sia C la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 8$ e siano l_1, l_2 e l_3 le rette di equazione $x + y = 4$, $x + y = 2$ e $x + y = 5$ rispettivamente. Determinare il centro e il raggio di C, e le intersezioni $C \cap l_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

10) Siano C_1 la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e C_2 la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 5x + 4x = 0$. Determinare i punti di intersezione tra C_1 e C_2. Determinare inoltre il centro e il raggio di C_2. Determinare, infine, tutte le rette per $\mathbf{Q} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ la cui distanza da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia uguale a 1.

11) Sia C la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$. Determinare le tangenti a C uscenti dai punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare inoltre la potenza di tali punti rispetto alla circonferenza C.

12) Sia C la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 37 e sia $\mathbf{p} \begin{pmatrix} 102 \\ -97 \end{pmatrix}$.

i) Determinare il punto $\mathbf{q}_1 \in C$ più vicino a $\mathbf{p}$.

ii) Determinare il punto $\mathbf{q}_2 \in C$ più lontano da $\mathbf{p}$.

iii) Determinare la distanza tra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$.

iv) Determinare una equazione parametrica per C.

v) Determinare la potenza dei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a C. Questi punti sono interni o esterni a C?

13) Determinare fuochi, centro, vertici, semiassi, direttrici ed eccentricità dell'ellissi Γ di equazione

$x^2/4+y^2/5=1$. Determinare inoltre una equazione parametrica di Γ e la sua forma polare. Determinare infine le tangenti a Γ uscenti (rispettivamente) dai punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5/2} \end{pmatrix}$.

14) Determinare fuochi, centro, vertici, semiassi, asintoti, direttrici, eccentricità, equazioni parametriche e forma polare dell'iperbole Γ di equazione $x^2/4+y^2/5=1$. Determinare inoltre le tangenti a Γ uscenti dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15) Determinare asse, fuoco, vertice, direttrice, equazioni parametriche e forma polare della parabola Γ di equazione $y^2=3x$.

16) Determinare le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ di un angolo $\alpha=\pi/3$ rispetto all'origine. Determinare inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x-5y=1$.

17) Determinare le equazioni della rotazione $R_{\mathbf{q},\alpha} : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ di un angolo α rispetto al punto $\mathbf{q} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\mathbf{q},\alpha}$, della retta l di equazione cartesiana $x-5y=1$ e della retta per $\mathbf{q}$ ortogonale ad l.

18) Sia l la retta di equazione $x+y=0$.

i) Calcolare le equazioni della riflessione R che ha l come luogo di punti fissi.

ii) Calcolare le immagini tramite R dei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

iii) Calcolare le immagini tramite R della retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19) Calcolare le immagini dei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ tramite la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Analoga domanda utilizzando la riflessione di asse la retta di equazione $x=y$, oppure la retta di equazione $2x+3y=0$, oppure la retta di equazione $3x+y=1$.

4.15 Esercizi nello spazio euclideo di dimensione 3.

Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ con riferimento standard.

1) Siano $\mathbf{x}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{z}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

i) Calcolare la distanza tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

ii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{O}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

iv) Calcolare il coseno dell'angolo tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

2) Siano $P\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, l la retta di equazioni $\begin{cases}x+y=3\\x+2z=1\end{cases}$, π il piano di equazione $2x+3y+z=1$.

i) Determinare la distanza tra P ed l e la distanza tra P e π.

ii) Determinare la retta per P e ortogonale a π.

iii) Determinare il piano per P e ortogonale a l.

iv) Le proiezioni ortogonali di Q su l e su π.

3) Siano r_1 la retta di equazioni $x-1=\frac{y-2}{2}=-z$ ed r_2 la retta di equazioni $x-2y=x+z=0$. Determinare la retta s che interseca ortogonalmente sia r_1 che r_2. Determinare inoltre la distanza tra r_1 ed r_2.

4) Sia $\mathbf{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

i) Determinare le equazioni della rotazione $\varphi : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ di angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.

ii) Siano l la retta di equazione parametrica $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$, r la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases}2x_1+3x_2=0\\x_2+4x_3=2\end{cases}$, π il piano di equazione cartesiana $2x_2+x_3=1$. Determinare le immagini di l, r e π tramite φ.

5) Determinare le equazioni della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orientata da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) Determinare equazione parametrica e cartesiana della superficie di rotazione descritta, ruotando attorno ad $\mathbf{e}_1$,

i) dalla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$.

ii) l'ellissi di equazioni $\begin{cases} x_3 = 0 \\ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2}{5} = 1 \end{cases}$.

iii) l'iperbole di equazioni $\begin{cases} x_3 = 0 \\ \frac{x_1^2}{16} - \frac{x_2}{9} = 1 \end{cases}$.

iv) la parabola di equazioni $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2^2 = 2x_1 \end{cases}$.

v) la parabola di equazioni $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 = 2x_3 \end{cases}$.

4.16 Diagonalizzabilità e forma canonica di Jordan.

a) Esercizi svolti.

1) Si consideri l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x, 2x - 2y - 2z, 2x - 3y - z).$$

a) Determinare , se è possibile, un riferimento R di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_R(f)$ di f nel riferimento R sia diagonale.

b) Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare una matrice invertibile P tale che, $D = P^{-1}\,A\,P$.

Soluzione: a) La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$p_f(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,(-\lambda-4).$$

Dunque f ha due autovalori: $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica uguale a 2, e $\lambda_2 = -4$, di molteplicità algebrica uguale a 1. In particolare, lo spettro di f è reale, e dunque f è sicuramente triangolabile. Affinché f sia triangolabile, occorre mostrare che, per ogni autovalore, molteplicità geometrica e algebrica coincidano. Sicuramente ciò accade per $\lambda_2 = -4$, perché la sua molteplicità algebrica è 1. La molteplicità geometrica $g(f, 1)$ di $\lambda_1 = 1$ è per definizione uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente $A(f, 1) = ker(f - \omega_1)$ ed è quindi uguale a $3 - rg(A - I)$. Ora

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2 ed è uguale alla sua molteplicità algebrica. Dunque f è diagonalizzabile.

Il riferimento cercato R rispetto al quale f la matrice associata a f sia diagonale è un qualunque riferimento di $\mathbf{R}^3$ formato da autovettori per f. Per determinare R, determiniamo separatamente un riferimento di $A(f, 1)$ ed uno di $A(f, -4)$, poi ne prendo l'unione. Lo spazio $A(f, 1)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente all'equazione $2x_1 - 3x_2 - 2x3 = 0$. Dunque $A(f, 1) = \{(3h+2k, 2h, 2k) | h, k \in \mathbf{R}\}$ e una sua base è data da $\mathbf{v_1} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.

L'autospazio $A(f,-4)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A-4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema $x_1 = 0, x_2 = x_3$. Dunque $A(f,-4) = \{(0,h,h)|h \in \mathbf{R}\}$ e una sua base è data da $\mathbf{v_3} = (0,1,1)$. Il riferimento $R = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ soddisfa le richieste e

$$M_R(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Sia C la matrice le cui colonne sono formate dalle coordinate dei vettori del riferimento scelto R:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, C è la matrice associata all'identità di $\mathbf{R}^3$, ove si consideri il riferimento R nel dominio, e la base canonica nel codominio: se $\mathbf{v} = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, si ha che $C\,\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. D'altra parte, se si scrive $f(\mathbf{v}) = y_1'\mathbf{v}_1 + y_2'\mathbf{v}_2 + y_3'\mathbf{v}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, valgono le relazioni: $\mathbf{y}' = D\,\mathbf{x}'$, $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$, $C\,\mathbf{y}' = \mathbf{y}$. Ne segue che $C\,\mathbf{y}' = A\,C\,\mathbf{x}'$ e $D = C^{-1}\,A\,C$. Dunque, la matrice $P = C$ soddisfa le richieste.

2) Si consideri la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autospazi di B ed una loro base. Dire se B è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico $p_B(\lambda)$ di B è:

$$det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-4-\lambda)det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2(4+\lambda)^2$$

Gli autovalori di B sono dunque $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$ ed entrambi hanno molteplicità algebrica 2.

L'autospazio $A(B,2)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $A(B,2) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = -x_2, x_3 = 0, x_4 = 0\} = \{(h, -h, 0, 0)|h \in \mathbf{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a 1, mentre la molteplicità algebrica è 2: dunque la matrice B non è diagonalizzabile.

L'autospazio $A(B,-4)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $A(B,-4) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1 = x_3 = x_4 = 0\} = \{(0,0,h,0)|h \in \mathbf{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore -4 è pari a 1.

3) Sia assegnata la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che il polinomio caratteristico di B è $p(\lambda) = (1-\lambda)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan ed una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}BM$.

Soluzione a) Cerco innanzitutto la forma canonica di B, cosa che è possibile perché lo spettro di B è reale. L'unico autovalore di B è 1, e la matrice

$$C = B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2: dunque nella forma canonica ci sono due blocchi di Jordan. La forma canonica sarà dunque una delle seguenti:

$$\begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove la scelta ricadrà sulla prima se l'ordine di nilpotenza di C è 3, o sulla seconda se l'ordine di nilpotenza di C è 2. Poiché

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, l'ordine di nilpotenza di C non può essere 2, e deve dunque essere 3. Ricordiamo che, per una matrice nilpotente, l'indice di nilpotenza è uguale all'ordine massimo di un suo blocco di Jordan. Dunque, la forma canonica cercata è data da

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix}.$$

b) Cerco la matrice di passaggio M. Il riferimento R nel quale l'endomorfismo f_B associato a B viene rappresentato dalla matrice di Jordan J è della forma $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 = f_C^2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 = f_C\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2$, per una scelta opportuna dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Si controlla facilmente che $Ker(C) =< (3,2,3,0), (3,2,0,-3) >$. Poiché l'ordine di nilpotenza di C è 3, sicuramente il vettore cercato $\mathbf{v}_2 = f_C^2\mathbf{u}_2$ appartiene a Ker C e dunque $\mathbf{v}_2 \in \operatorname{Ker} C \cap \operatorname{Im} f_C^2$. Per quanto visto, dim Im $f_C^2 = 1$, e dunque Ker $C \cap \operatorname{Im} f_C^2$ deve avere dimensione 1 (ha almeno dimensione 1 perché J ha un blocco di ordine 3):

$$\operatorname{Ker} C \supset \operatorname{Ker} C \cap \operatorname{Im} f_C^2 \supset \{\overline{0}\}.$$

Essendo $\operatorname{Im} f_C^2 =< (0,0,-1,-1) >$, prendo $\mathbf{v}_2 = (0,0,-1,-1)$. Ma le coordinate di $\mathbf{v}_2$ sono uguali alla prima colonna di C^2 e quindi $\mathbf{v}_2 = f_C^2(\mathbf{e}_2)$. Ora completo $\mathbf{v}_2$ ad una base di $\operatorname{Ker} C$, prendendo, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = (3,2,3,0)$. Il riferimento cercato è dato da $\mathbf{v}_1 = (3,2,3,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,-1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = f_C(\mathbf{e}_1) = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1$ e la matrice M è data da:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Esercizi da svolgere.

1) Provare che ogni matrice quadrata ortogonale reale di ordine 2 è diagonalizzabile sul campo complesso.

2) Sia A una matrice quadrata di ordine n su un campo K. Se A è idempotente, cioè $A^2 = A$, allora la traccia di A è uguale al rango di A.

3) Dimostrare che una matrice con tutti gli autovalori uguali tra loro è diagonalizzabile se e solo se è diagonale.

4) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(x,y,z) = (3x+y+2z, -4x-2y-2z, 2x+2y)$.

a) Determinare gli autovalori di f e gli autospazi corrispondenti.

b) Dire se f è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e se è triangolabile.

5) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$? e su $\mathbf{C}$? Determinare la forma pseudocanonica di $\mathbf{A}$.

6) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per quali valori di h la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e qual è una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$?

7) Determinare gli autovalori ed una base di ciascun autospazio dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 4x - 2y - 4z, 4x - 4y - 2z).$$

8) Dimostrare che il polinomio caratteristico di una matrice quadrata triangolabile $\mathbf{A}$ divide una opportuna potenza del polinomio minimo di $\mathbf{A}$.

9) Sia f endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V, con polinomio caratteristico $p_f(t) = (t-3)^4(t-1)^2(t^2-4)$. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan, sapendo che gli autovettori di f generano un sottospazio di dimensione 5 di V.

10) E' possibile costruire un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ tale che $(1, 0, 1)$ sia autovettore di autovalore 3, $(0, 1, 2)$ sia autovettore di autovalore 2, e $(2, -3, -4)$ sia autovettore di autovalore 7?

11) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(t) = (t-1)^4$.

a) Determinare la forma canonica di Jordan di A.

b) Determinare gli autospazi e gli spazi di radici relativi ad ogni autovalore di $\mathbf{A}$.

c) Determinare una matrice invertibile $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia in forma canonica di Jordan.

12) Sia $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è $p_f(t) = (t-1)^3(t-2)$.

a) Determinare la forma canonica di Jordan di f.

b) Determinare gli autospazi e gli spazi di radici relativi ad ogni autovalore di f.

c) Determinare una matrice invertibile $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia in forma canonica di Jordan.

d) Calcolare, per ogni $n \geq 1$, il vettore $f^n(\mathbf{e}_1)$.

13) Un endomorfismo triangolabile f di uno spazio vettoriale V di dimensione n è tale che rg $f = 6$, rg $f^2 = 2$, rg $f^3 = 1$. Determinare le possibili forme canoniche, i corrispondenti polinomi minimi ed i polinomi caratteristici.

14) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine 5 su $\mathbf{C}$, non diagonalizzabile né nilpotente. Sapendo che $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^4$, determinare le possibili forme canoniche ed i corrispondenti polinomi minimi.

15) Mostrare che la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è nilpotente. Determinarne l'ordine e la forma canonica di Jordan.

16) Sia $V = \mathbf{R}_4[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 e coefficienti in $\mathbf{R}$ e si consideri l'endomorfismo D^2 di V dato dalla seconda derivazione: $D^2 p(x) = \frac{d^2}{dx^2} p(x)$. Mostrare che D^2 è nilpotente; determinarne l'ordine e la forma canonica di Jordan.

17) Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale reale V ha polinomio caratteristico $p(t) = (t^2-1)^2(t^2-4)^2$ e soddisfa l'equazione $(t^2-1)(t^2-4)(t^3-3t^2+2t) = 0$. Sapendo che gli autovettori di f generano un sottospazio di V di dimensione 6, determinare la forma canonica di Jordan di f ed il polinomio minimo.

18) Al variare del parametro reale a, si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Mostrare che $\mathbf{A}$ è triangolabile e determinarne la forma canonica di Jordan. Determinare inoltre una matrice $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia in forma canonica di Jordan.

19) La matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe polinomio caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^2$.

a) Determinare la forma canonica di Jordan di entrambe le matrici.

b) Determinare gli autospazi e gli spazi di radici relativi ad ogni autovalore di entrambe le matrici.

c) Determinare matrici invertibili $\mathbf{M}_1$ ed $\mathbf{M}_2$ tali che $\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{A}_i\mathbf{M}_i$ $(i = 1, 2)$ sia in forma canonica di Jordan.

d) Calcolare la matrice $\mathbf{A}_1^n$ per ogni $n \geq 0$.

20) Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ un endomorfismo con spettro $\mathcal{S}(f) = \{-1, 2\}$. Calcolare la molteplicità algebrica di ciascun autovalore, sapendo che il determinante di una matrice che rappresenta f è uguale ad 8. Scrivere tutte le possibili forme canoniche di Jordan compatibili con i dati.