Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Esame di Geometria 1 (Prof. F. Tovena) 2013

Argomenti: sottospazi vettoriali e loro dimensione, completamento di un sistema di vettori linearmente indipendenti ad una base, componenti di un vettore rispetto ad una base, cambiamenti di base, applicazioni lineari tra spazi vettoriali, nucleo e immagine di una applicazione lineare.

1) Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. Sia U lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) Determina la dimensione ed una base $\mathcal{B}$ di U.

b) Completa $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{D}$ di $\mathbf{R}^5$.

c) Denota con $\vec{x'}$ le coordinate di un vettore $\vec{x}$ di $\mathbf{R}^5$ rispetto alla base $\mathcal{D}$. Determinare una matrice M tale che $M\vec{x} = \vec{x'}$.

d) Determinare le componenti di $\vec{v} = (1, 1, 0, 0, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{D}$.

2) Discutere se le seguenti applicazioni sono lineari:

a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, 0, 0)$;

b) $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $G(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1, x_2)$;

c) $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 0, x_2)$.

3) Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sia $L_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

a) Determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tramite L_A.

b) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker L_A.

c) Verificare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di L_A.

d) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine Im L_A.

e) Discutere se il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a Im L_A.

4) Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3)$.

a) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker T.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im T.

5) **non risolto** Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sia $L_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

a) Determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ tramite L_A.

b) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker L_A.

c) Verificare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di L_A.

d) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine Im L_A.

e) Discutere se il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a Im L_A.

Soluzioni

1) *Sia assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. *Sia* U *lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) Determinare la dimensione ed una base $\mathcal{B}$ *di* U.

b) Completare $\mathcal{B}$ *ad una base* $\mathcal{D}$ *di* $\mathbf{R}^5$.

c) Determinare la matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ *alla base* $\mathcal{D}$.

d) Determinare le componenti di $\vec{v} = (1, 1, 0, 0, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{D}$.

Soluzione a) Per il Teorema di Rouché-Capelli, $\dim U = 5 - rg(A)$. Calcolo il rango di A tramite il metodo di riduzione, e con modificazioni sulle righe metto A in forma completamente ridotta: $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$. Il rango di A è 2, pari al numero delle righe non nulle della sua forma ridotta A', e dunque $\dim U = 5 - 2 = 3$. Risolvo il sistema lineare associato avente come matrice dei coefficienti A', che è equivalente al sistema $A\vec{x} = \vec{0}$; le soluzioni sono parametrizzate dalle ultime tre componenti:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c \\ \frac{a-2b+c}{2} \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque una base $\mathcal{B}$ di U è data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, che sono linearmente indipendenti.

b) Per completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{D}$ di $\mathbf{R}^5$, basta aggiungere i vettori $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ della base canonica: infatti la matrice che ha i 5 vettori di $\mathcal{D}$ per colonne è ridotta e ha 5 righe non nulle.

c) per come sono assegnati i dati, sappiamo trovare facilmente la matrice C tale che $C\vec{x'} = \vec{x}$: è la matrice che rappresenta l'identità quando nel dominio usiamo la base $\mathcal{D}$ e nel condominio la base canonica:

$$C = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le cui colonne sono date, ordinatamente, dalle componenti dei vettori di $\mathcal{D}$ rispetto alla base canonica. La matrice cercata $M = M_{\mathcal{E}\mathcal{D}}$ si ritrova invertendo $M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ e dunque } M_{\mathcal{E}\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Le componenti di $\vec{v} = (1, 1, 0, 0, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{D}$ sono date dal prodotto

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{D}}\vec{v}^t = M_{\mathcal{E}\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) *Discutere se le seguenti applicazioni sono lineari:*

a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, 0, 0)$*;*

b) $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1, x_2)$*;*

c) $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 0, x_2)$*.*

Soluzione a) L'applicazione T non è lineare perché $T(0, 0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.

b) L'applicazione G non è lineare perché $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$ ma $(8, 2, 2) = G(2, 2, 2) \neq 2G(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$.

c) L'applicazione H è lineare perché coincide con la moltiplicazione a sinistra per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) *Sia assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Sia* $L_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da* $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}$*.*

a) Determinare l'immagine del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Basta svolgere il prodotto $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

b) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker L_A*.*

Ker L_A è il sottospazio formato dai vettori $\vec{x} \in \mathbf{R}^4$ tali che $L_A(\vec{x}) = \vec{0}$, e dunque coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$. Per il teorema di Rouché-Capelli, la dimensione di Ker L_A è dunque uguale a 4- rg (A). Per calcolare il rango di A e determinare una base di Ker L_A, modifico A con modificazioni elementari sulle righe, ricavandone una forma completamente ridotta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Poiché la forma ridotta A' ha 2 righe non nulle, il rango di A è 2 e la dimensione di Ker L_A è $4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$. Una base di Ker L_A è quindi formata da due vettori linearmente indipendenti. Utilizzando la terza e la quarta componente come parametri liberi, ricavo la seguente descrizione parametrica degli elementi del nucleo: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - 2t \\ -2s - 3t \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Una base di Ker L_A è quindi data da $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Verificare se il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *appartiene al nucleo di* L_A*.*

Poichè $L_A(\vec{u}) = A\vec{u} \neq \vec{0}$, la risposta è negativa.

d) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine Im L_A*.*

Gli elementi di Im L_A sono tutti e soli i vettori della forma $A\vec{x}$ al variare di $\vec{x} \in \mathbf{R}^4$. Svolgendo il prodotto e mettendo in evidenza le colonne di A, si ricava che una descrizione parametrica dell'immagine di L_A è data da:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}.$$

L'immagine di L_A coincide dunque con il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dalle colonne di A. La sua dimensione coincide quindi con il rango di A, che è 2 per quanto dimostrato prima. Una base di Im L_A è costituita da due colonne linearmente indipendenti di A, come ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Discutere se il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *appartiene a Im* L_A*.*

Il vettore $\vec{w}$ non appartiene a Im L_A, perché $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 > 2$.

4) *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da* $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3)$.

a) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker T*.*

b) Determinare la dimensione ed una base di Im T*.*

Soluzione a) Il nucleo di T coincide (a meno di trasposizione) con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè del sistema omogeneo} \qquad A\overline{x} = \overline{0} \text{ ove } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il rango di A è 3, il nucleo di f ha dimensione $4 - 3 = 1$. Risolvendo il sistema, si ricava, come base di Ker T, il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b)**Primo modo** Osservo che l'applicazione T coincide (a meno di trasposizione) con l'applicazione L_A, per la matrice A individuata nella discussione dl punto precedente. Ne deduco che la dimensione di Im T è pari al rango di A, che è 3. Poiché la dimensione dell'immagine di T coincide con la dimensione del codominio, si conclude che Im $T = \mathbf{R}^3$, e come base dell'immagine si può prender la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Secondo modo Osservo che Im T= $\{(2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3) | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$. Per determinarne la dimensione, devo controllare se i parametri x_1, x_2, x_3, x_4 sono indipendenti. Separando i parametri, ricavo che i vettori di Im T sono tutti e soli i vettori

$$(2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3) = x_1\,(2, 0, 1) + x_2\,(1, 0, 0) + x_3\,(0, 1, 1) + x_4\,(0, 1, 0)$$

Dunque Im T coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato da

$$(2, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0).$$

Poiché i 3 vettori $\vec{w}_1 = (1, 0, 0), \vec{w}_2 = (0, 1, 1), \vec{w}_3 = (0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e la dimensione di $\mathbf{R}^3$ è 3, concludo che Im T= $\mathbf{R}^3$, e una base di Im T è data dai tre vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$.