3

Affinità e cambiamenti di riferimento

3.1 Generalità sulle affinità

Ora che abbiamo introdotto gli spazi con i quali lavoreremo, selezioniamo le applicazioni da considerare tra di essi:

Definizione 3.1.1. Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ spazi affini sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una applicazione $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ si dice una *affinità* di $\mathbb{A}$ in $\mathbb{A}'$ se esiste una applicazione lineare

$$\varphi_l : \mathbf{V}(\mathbb{A}) \to \mathbf{V}(\mathbb{A}')$$

tale che per ogni coppia di punti P, Q di $\mathbb{A}$ valga la relazione:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \tag{3.1}$$

ossia:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) = \varphi_l(\mathbf{PQ}). \tag{3.2}$$

Ciò significa che per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$ si ha:

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{v}) \tag{3.3}$$

e che l'applicazione φ_l (se esiste) è unica.

Definizione 3.1.2. L'applicazione φ_l viene detta l'*applicazione lineare associata all'affinità* φ. Se $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ ha dimensione finita, il rango di φ_l si dice anche *rango* di φ e si denota col simbolo

$$\mathrm{rg}\ (\varphi).$$

Talora, con abuso di notazione, indicheremo con lo stesso simbolo φ e φ_l.

Esempio 3.1.3. **Le affinità di rango 0** Sia O un punto di $\mathbb{A}'$ e si consideri l'applicazione costante $\varphi_O : P(\in \mathbb{A}) \to O \in \mathbb{A}'$. Questa è una affinità la cui applicazione lineare associata è l'applicazione lineare nulla di $\mathbf{V}(\mathbb{A}) \to \mathbf{V}(\mathbb{A}')$. Pertanto $\mathrm{rg}(\varphi_O) = 0$.

Viceversa se $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ ha rango 0, l'applicazione φ_l è l'applicazione nulla e φ è costante. Infatti per ogni coppia (P, Q) di punti di $\mathbb{A}$ si ha $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$, sicchè $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Dunque, *le applicazioni costanti sono tutte e sole le affinità di rango O.*

Esempio 3.1.4. **L'affinità identica** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$. L'applicazione identica $\iota_{\mathbb{A}}$ di $\mathbb{A}$ in sè è una affinità, la cui applicazione lineare associata è l'applicazione identica di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$.

La seguente proposizione suggerisce come costruire una affinità e mostra che ogni affinità può essere costruita in tal modo:

Proposizione 3.1.5. *Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ spazi affini sul campo $\mathbb{K}$. Dati due punti $P \in \mathbb{A}$ e $P' \in \mathbb{A}'$ e data una applicazione lineare $\psi : \mathbf{V}(\mathbb{A}) \to \mathbf{V}(\mathbb{A}')$, esiste una ed una sola affinità $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tale che $\varphi(P) = P'$ e $\varphi_l = \psi$.*

Dimostrazione. Se una tale affinità esiste, allora per ogni punto Q di $\mathbb{A}$ deve accadere che:

$$\varphi(Q) = \varphi(P) + \psi(\mathbf{PQ}) = P' + \psi(\mathbf{PQ}). \tag{3.4}$$

Dunque φ deve necessariamente coincidere con l'applicazione

$$\varphi : Q(\in \mathbb{A}) \mapsto P' + \psi(\mathbf{PQ}).$$

Per provare la proposizione, basta mostrare che la φ così definita è una affinità. Siano Q ed S punti arbitrari di $\mathbb{A}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{S}) &= (P' + \psi(\mathbf{PQ})) - (P' + \psi(\mathbf{PS})) = \\ = (\mathbf{P'} - \mathbf{P'}) &+ (\psi(\mathbf{PQ}) - \psi(\mathbf{PS})) = \psi(\mathbf{PQ}) - \psi(\mathbf{PS}) = \\ &= \psi(\mathbf{PQ} - \mathbf{PS}) = \psi(\mathbf{SQ}) \end{aligned}$$

e ciò prova l'asserto. □

Definizione 3.1.6. Un punto P di $\mathbb{A}$ tale che $\varphi(P) = P$ è detto *punto fisso* o *punto unito* per l'affinità φ.

Esempio 3.1.7. **Affinità di uno spazio affine in sè** Per la Proposizione 3.1.5 appena dimostrata, l'applicazione identica di uno spazio affine $\mathbb{A}$ è l'unica affinità che ammette almeno un punto fisso e la cui applicazione lineare associata sia identica. Più in generale, sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità in $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. Fissiamo un punto P di $\mathbb{A}$ e poniamo $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) - \mathbf{P} = \mathbf{v}$. Poiché l'applicazione lineare associata a φ è l'identità, per ogni punto Q di $\mathbb{A}$ si ha $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ e quindi $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) - \mathbf{P} = \mathbf{v}$. In particolare, il vettore $\mathbf{v}$ non dipende dalla scelta del punto P, ma solo dall'affinità φ, che viene detta *traslazione* di vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$ e si denota col simbolo $\tau_{\mathbf{v}}$. Per quanto visto, si ha:

Definizione 3.1.8. La *traslazione* di vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$ è l'affinità $\tau_{\mathbf{v}}: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definita da

$$\tau_{\mathbf{v}}(Q) = Q + \mathbf{v} \text{ per ogni } Q \in \mathbb{A}. \tag{3.5}$$

Osservazione 3.1.9. Le traslazioni sono tutte e sole le affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità.

Si rimanda all'Esercizio Svolto 3.6 per un esempio.

Consideriamo ora una affinità $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ che fissa un punto P e la cui applicazione lineare associata sia una omotetia ω_λ di rapporto $\lambda \in \mathbb{K}$ in $\mathbf{V}(\mathbb{A})$, cioè la moltiplicazione per uno scalare λ fissato: $\omega_\lambda(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ $\forall\mathbf{v} \in V(\mathbb{A})$.
Per ogni punto $Q = P + \mathbf{v}$ di $\mathbb{A}$ si ha: $\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{v}$ e una tale affinità si dice *omotetia* di $\mathbb{A}$ di *centro* P e *rapporto* λ. Più in generale:

Definizione 3.1.10. Una affinità $\varphi: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ si dice *omotetia* di $\mathbb{A}$ di *centro* P e *rapporto* λ se per ogni punto Q di $\mathbb{A}$, scritto come $Q = P + \mathbf{v}$, si ha:

$$\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{v} \tag{3.6}$$

Esplicitamente, si deve avere $\varphi(Q) = P + \lambda\,\mathbf{PQ}$, per ogni $Q \in \mathbb{A}$. Una omotetia di rapporto λ viene spesso indicata con il simbolo ω_λ.

Si rimanda all'Esercizio Svolto 3.7 per un esempio.
In particolare, l'omotetia di centro P e rapporto 1 è l'identità, mentre quella di centro P e rapporto -1 prende il nome di *simmetria*:

Definizione 3.1.11. L'omotetia di centro P e rapporto -1 è detta *simmetria* di $\mathbb{A}$ rispetto a P (o di *centro* P) e verifica

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = P - \mathbf{v} \qquad \forall\mathbf{v}. \tag{3.7}$$

Il nome è giustificato dal fatto che la simmetria di centro P associa ad ogni punto Q il punto $\varphi(Q) = Q'$ tale $\mathbf{Q'} - \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$:

Definizione 3.1.12. Un punto M tale $\mathbf{P} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{Q}$ si dice il *punto medio* del segmento PQ; i punti P e Q si dicono *simmetrici* rispetto a M.

Se P e Q hanno in un riferimento$\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ rispettivamente, allora le coordinate $\mathbf{m}$ di M in $\mathcal{R}$ sono date da:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \tag{3.8}$$

Si rimanda agli Esercizi Svolti 3.8 - 3.9 per esempi.

3.2 Isomorfismi tra spazi affini e riferimenti

Proposizione 3.2.1. *Sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una affinità tra spazi affini su un campo $\mathbb{K}$. L'affinità φ è biettiva se e solo se anche φ_l è biettiva (cioè è un isomorfismo). In tal caso anche l'applicazione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ è una affinità e l'applicazione lineare ad essa associata è φ_l^{-1}.*

Dimostrazione. Se P e Q sono due punti di $\mathbb{A}$, sappiamo che

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{Q} - \mathbf{P}).$$

In particolare, P e Q hanno la stessa immagine se e solo se il vettore $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ appartiene al nucleo di φ_l: dunque φ è iniettiva se e solo se φ_l è iniettiva. Si lascia per esercizio la conclusione della dimostrazione. □

Definizione 3.2.2. Una affinità biettiva si dice un *isomorfismo* e due spazi affini legati da un isomorfismo si dicono *isomorfi*.

Mostriamo innanzitutto che l'immagine di un sottospazio rispetto ad una affinità è ancora un sottospazio e che gli isomorfismo conservano la dimensione:

Corollario 3.2.3. *Sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una affinità tra spazi affini su un campo $\mathbb{K}$. Se S è un sottospazio di $\mathbb{A}$ allora $\varphi(S)$ è un sottospazio di $\mathbb{A}'$. Se S ha dimensione finita, anche $\varphi(S)$ ha dimensione finita e si ha*

$$\dim S \geq \dim \varphi(S).$$

Se φ è un isomorfismo si ha $\dim\, S = \dim\, \varphi(S)$.

Dimostrazione. Se $S = P + \mathbf{W}$, si ha che $\varphi(S) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{W})$ (perché?). Da ciò segue subito l'asserto. □

Nel seguito studieremo le proprietà degli spazi affini che si conservano per isomorfismi (o, come si dice, "a meno di isomorfismo"). Ciò costituisce l'oggetto della *geometria affine*. Da questo punto di visto, il primo risultato importante è che, in analogia a quanto vero per gli spazi vettoriali, due spazi affini di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione; ci si può quindi limitare allo studio di spazi affini assai particolari:

Teorema 3.2.4. *Ogni spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ è isomorfo allo spazio affine canonicamente associato allo spazio vettoriale* $\mathbf{V}(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. Sia O un punto di $\mathbb{A}$. In virtù della proposizione 3.1.5, l'applicazione $g_O : \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A}) \to O + \mathbf{v} \in \mathbb{A}$ è l'unica affinità che manda $\mathbf{0}$ in O e la cui applicazione lineare associata sia l'identità. Per la proposizione 3.2.1 essa è un isomorfismo. □

Teorema 3.2.5. *Siano* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{V}'$ *spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Essi sono isomorfi come spazi affini se e solo se lo sono come spazi vettoriali.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione 3.1.5. □

In conseguenza dei due precedenti teoremi, abbiamo il:

Corollario 3.2.6. *Ogni spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ è isomorfo allo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Per il teorema 3.2.4 lo spazio affine $\mathbb{A}$ è isomorfo allo spazio affine canonicamente associato a $\mathbf{V}(\mathbb{A})$, che a sua volta, per il teorema 3.2.5, è isomorfo a $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, che è lo spazio affine canonicamente associato a $\mathbb{K}^n$, poiché $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. □

Osservazione 3.2.7. Riguardando il paragrafo *1.6* del capitolo 1, un isomorfismo esplicito $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}$ è dato da un sistema di coordinate affini associato ad un riferimento cartesiano affine. Per la definizione 1.5.1, un *riferimento (cartesiano) affine* di $\mathbb{A}$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, R)$, ove $O \in \mathbb{A}$ e R è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. Per costruire l'isomorfismo cercato, occorre dare un isomorfismo lineare di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ con $\mathbb{K}^n$, ottenuto assegnando un riferimento (cioè una base ordinata) $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. Poi si dà un isomorfismo di $\mathbb{A}$ con $\mathbf{V}(\mathbb{A})$, assegnando un punto $O \in \mathbb{A}$, come nella dimostrazione del teorema 3.2.4. L'isomorfismo φ cercato è definito da:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \quad \mathbb{A}^n & \to & \mathbb{A} \\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & O + (x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_n\mathbf{v_n}) \end{array} \tag{3.9}$$

e prende anche il nome di *sistema di coordinate (affini) associato al riferimento affine* $\mathcal{R}$. Per quanto osservato, il dato di un riferimento affine individua univocamente una applicazione φ come in (3.9).

3.3 Composizione di affinità e gruppo affine.

Cominciamo con la seguente:

Proposizione 3.3.1. *Siano $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{A}''$ spazi affini sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e siano $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $\varphi' : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ affinità. Allora $\varphi' \circ \varphi$ è una affinità e $(\varphi' \circ \varphi)_l = \varphi'_l \circ \varphi_l$. In particolare se φ e φ' sono isomorfismi anche $\varphi' \circ \varphi$ lo è.*

Dimostrazione. Siano P e Q punti di $\mathbb{A}$. Si ha

$$\begin{array}{l} (\varphi' \circ \varphi)(P) - (\varphi' \circ \varphi)(Q) = \varphi'(\varphi(P)) - \varphi'(\varphi(Q)) = \\ = \varphi'_l(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(P)} - \boldsymbol{\varphi}\mathbf{(Q)}) = \varphi'_l(\varphi_l(P - Q)) = (\varphi'_l \circ \varphi_l)(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \end{array} \tag{3.10}$$

il che prova la prima parte dell'asserto. Il resto segue dalla proposizione 3.1.5. □

In particolare, componendo affinità di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sè si ottengono ancora affinità di $\mathbb{A}$ in sè e componendo isomorfismi di $\mathbb{A}$ in sè si ottengono ancora isomorfismi di $\mathbb{A}$ in sè. Nell'insieme $\mathbf{End}(\mathbb{A})$ delle affinità di $\mathbb{A}$ in sè, la legge di composizione

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathbf{End}(\mathbb{A}) \times \mathbf{End}(\mathbb{A}) & \to & \mathbf{End}(\mathbb{A}) \\ (\varphi', \varphi) & \mapsto & \varphi' \circ \varphi \end{array} \tag{3.11}$$

è una operazione associativa. Se si restringe questa operazione al sottoinsieme $\mathbf{Aff}(\mathbb{A})$ degli isomorfismi di $\mathbb{A}$ in sè, si ottiene un gruppo (in generale non commutativo) che si dice *gruppo affine di* $\mathbb{A}$.
Se $\psi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un isomorfismo, possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbf{End}(\mathbb{A}) & \to & \mathbf{End}(\mathbb{A}') \\ \varphi & \mapsto & \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \end{array} .$$

L'applicazione Ψ è chiaramente biettiva, con inversa

$$\begin{array}{rcl} \Psi^{-1} : \mathbf{End}(\mathbb{A}') & \to & \mathbf{End}(\mathbb{A}) \\ \varphi' & \mapsto & \psi^{-1} \circ \varphi' \circ \psi \end{array} ,$$

e, per ogni coppia $(\varphi', \varphi) \in \mathbf{End}(\mathbb{A})$, verifica

$$\Psi(\varphi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi' \circ \varphi \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) = \Psi(\varphi') \circ \Psi(\varphi) .$$

Poiché ψ è un isomorfismo e visto che

$$\Psi(\varphi)_l = (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})_l = \psi_l \circ \varphi_l \circ (\psi^{-1})_l ,$$

risulta che $\Psi(\varphi)$ è un isomorfismo se e solo se lo è φ; più in generale, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ sono di dimensione finita, φ e $\Psi(\varphi)$ hanno lo stesso rango, cioè Ψ conserva il rango delle affinità. Dunque Ψ induce una biezione

$$\Psi : \mathbf{Aff}(\mathbb{A}) \to \mathbf{Aff}(\mathbb{A}')$$

che è un isomorfismo.

Ai fini dello studio delle affinità, e in particolare del gruppo affine, è quindi possibile sostituire uno spazio affine $\mathbb{A}$ con uno ad esso isomorfo. In particolare ogni spazio affine $\mathbb{A}$ può essere sostituito con lo spazio affine associato allo spazio vettoriale $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ e, se $\mathbb{A}$ ha dimensione finita n, può essere sostituito con $\mathbb{A}^n$.

Proposizione 3.3.2. *Siano* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *spazi vettoriali sullo stesso campo* $\mathbb{K}$. *Una applicazione* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *ed esiste un elemento* $\mathbf{w} \in W$ *tale che* $\varphi = \tau_{\mathbf{w}} \circ f$*; in tal caso* $f = \varphi_l$.

Dimostrazione. Se φ è una affinità, posto $f = \varphi_l$ e $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{0})$, si ha, per ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{0}) + f(\mathbf{a}) = \mathbf{w} + f(\mathbf{a}) = (\tau_{\mathbf{w}} \circ f)(\mathbf{a}) \tag{3.12}$$

Il viceversa è lasciato per esercizio (vedi l'Esercizio svolto 3.1). □

In particolare $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$ contiene $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$ come sottogruppo, e contiene altresì tutte le traslazioni di $\mathbf{V}$. Notiamo anzi che l'insieme $T(\mathbf{V})$ delle traslazioni di

$\mathbf{V}$ costituisce un sottogruppo di $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$ isomorfo a $(\mathbf{V}, +)$, tramite l'isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \to & T(\mathbf{V}) \\ \mathbf{v} & \mapsto & \tau_{\mathbf{v}} \end{array}.$$

Ogni elemento di $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$ si scrive come prodotto di un elemento di $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$ e di una traslazione. Ciò si esprime dicendo che $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$ è generato da $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$ e da $T(\mathbf{V})$.

3.4 Affinità tra spazi affini numerici.

Sia $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ una affinità tra spazi affini numerici su un campo $\mathbb{K}$ (i cui elementi vengono interpretati come vettori colonna su $\mathbb{K}$). L'applicazione lineare associata $\varphi_l : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è individuata da una matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ di tipo (m, n) su $\mathbb{K}$ tale che $\varphi_l(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ è il vettore colonna $(x_1, \dots, x_n)^t$. Sia $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_m)^t$. In virtù della Proposizione 3.3.2, posto $\varphi_l(\mathbf{0}) = \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^t$, si ha

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}; \tag{3.13}$$

questa relazione viene detta *equazione matriciale della affinità* φ. Esplicitamente questa equazione si scrive

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + c_m \end{cases} \tag{3.14}$$

Se $\varphi' : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^h$ è una affinità di equazione matriciale

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{d}$$

dove $\mathbf{B}$ è la matrice di tipo (h, m) su $\mathbb{K}$ individuata da φ'_l e $\mathbf{d} \in \mathbb{A}^m$ è il vettore $\varphi'(\mathbf{0})$, allora $\varphi' \circ \varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^h$ ha equazione matriciale data da

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{d} = \mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d})$$

Se poi $n = m$ e la affinità $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è invertibile, per trovare l'equazione dell'affinità inversa φ^{-1}, basta risolvere (3.14) come sistema lineare nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, usando, ad esempio la regola di Cramer. Il risultato è che

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})$$

Torniamo a considerare una affinità $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ di equazioni (3.13) o (3.14). Se S è un sottospazio di $\mathbb{A}^n$, di dimensione h, per la Proposizione 3.2.3, anche $S' = \varphi(S)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^m$. Per determinarne le equazioni conviene procedere nel seguente modo (vedi il paragrafo 2.3 del Capitolo 2):

(a) determinare $h+1$ punti $P_0, \dots P_h$ che generano S; sappiamo quindi che i punti $\varphi(P_0), \dots, \varphi(P_h)$ generano S' (ma non è detto che questi siano indipendenti come punti di $\mathbb{A}^m$);
(b) S' ha dunque dimensione $h' \leq h$ e si può determinare un sistema di $h'+1$ punti indipendenti contenuto in $[\varphi(P_0), \dots, \varphi(P_h)]$; denotiamo con $[Q_0, \dots, Q_{h'}]$ un tale sistema;
(c) a partire dal sistema $[Q_0, \dots, Q_{h'}]$ di punti indipendenti che generano S', scriviamo le equazioni parametriche come in (2.12).

Esempio 3.4.1. Consideriamo l'affinità $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3$ su $\mathbb{R}$ di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - y \\ z' = x + 2y + 2 \end{cases}.$$

Determiniamo l'immagine tramite φ della retta r di equazione $3x - 2y = 1$. La retta r è generata dai punti $P = (0, -1/2)$ e $Q = (1/3, 0)$; l'immagine $\varphi(r)$ è quindi generata dai punti $\varphi(P) = (1/2, 1/2, 1)$ e $\varphi(Q) = (5/3, 1/3, 7/3)$. Poiché essi sono distinti (dunque indipendenti), $\varphi(r)$ è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = 1/2 + t(7/6) \\ y' = 1/2 + t(1/6) \\ z' = 1 + t(4/3) \end{cases}$$

che si possono anche scrivere (cambiando per proporzionalità i numeri direttori di $\varphi(r)$)

$$\begin{cases} x' = 1/2 + 7t \\ y' = 1/2 + t \\ z' = 1 + 8t \end{cases}$$

Nel caso $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ sia invertibile allora S' ha la stessa dimensione di S, e per scriverne le equazioni cartesiane, conoscendo quelle di S, si può procedere così. Sia

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

un sistema di equazioni di S. Un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{A}^n$ sta in S' se e solo se valgono contemporaneamente (3.13) e (3.15). Ricavando il vettore $\mathbf{x}$ da (3.13) , ossia scrivendo l'equazione matriciale della affinità inversa di φ, si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \tag{3.16}$$

e, sostituendo in (3.15), si ricavano le seguenti equazioni di S':

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{d} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

Esempio 3.4.2. Consideriamo l'affinità di $\mathbb{A}^2$ in sè di equazione

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

Essa è invertibile, in quanto il determinante della matrice dell'applicazione lineare associata è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

L'affinità inversa ha equazioni

$$\begin{cases} x = (x' + y' - 3)/2 \\ y = (-x' + y' - 1)/2 \end{cases}$$

come si vede risolvendo le equazioni di φ in x e y. La retta di equazione $3x+7y-9=0$ viene pertanto trasformata da φ nella retta di equazione

$$\begin{gathered} 3[(x' + y' - 3)/2] + 7[(-x' + y' - 1)/2] - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x' + y' - 3) + 7(-x' + y' - 1) - 18 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x' + 10y' - 34 = 0 \Leftrightarrow \\ 2x' - 5y' + 17 = 0 \end{gathered}$$

3.5 Riferimenti e affinità.

Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ spazi affini su un campo $\mathbb{K}$ di dimensioni rispettive n e m e sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una affinità. Supponiamo che in in $\mathbb{A}$ e in $\mathbb{A}'$ siano assegnati riferimenti affini $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$, rispettivamente. Ricordiamo che, per l'Osservazione 3.2.7, essi determinano degli isomorfismi $\psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ e $\psi' : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}'$. Consideriamo l'affinità composta $\psi'^{-1} \circ \varphi \circ \psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ e ne siano (3.13) o (3.14) le equazioni: dato il punto P di $\mathbb{A}$, avente in $\mathcal{R}$ vettore delle coordinate $\mathbf{x}$, il punto $Q = \varphi(P)$ ha in $\mathcal{R}'$ vettore delle coordinate

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}. \tag{3.18}$$

In particolare $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in ψ' del punto immagine tramite φ dell'origine O di $\mathcal{R}$. Le (3.18) (cioè le (3.13) o (3.14)) si dicono *equazioni della affinità φ nei riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$*. Si noti che la matrice $\mathbf{A}$ che appare in tali equazioni non è altro che la matrice di φ_l nei riferimenti R e R' di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ e $\mathbf{V}(\mathbb{A}')$ rispettivamente.
Naturalmente, si possono applicare a φ e alle sue equazioni in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ tutte le considerazioni svolte nel paragrafo 3.4 in relazione ad affinità tra spazi affini numerici. In particolare si potranno trovare le equazioni in $\mathcal{R}'$ dell'immagine tramite φ di un sottospazio di $\mathbb{A}$ di cui siano note le equazioni in $\mathcal{R}$.

Supponiamo ora dati in $\mathbb{A}$ due riferimenti $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ e consideriamo le equazioni in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ della affinità identica di $\mathbb{A}$ in sè. Esse saranno del tipo (3.13), dove ora $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata d'ordine n su $\mathbb{K}$ e $\mathbf{c}$ è un vettore colonna d'ordine n su $\mathbb{K}$. Esplicitamente esse assumono la forma

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \tag{3.19}$$

e va osservato che, essendo l'affinità identica invertibile, la matrice $\mathbf{A}$ è anche essa invertibile, ossia det $\mathbf{A} \neq 0$.

Le equazioni (3.18) o le (3.19) possono essere interpretate nel senso che un punto P di $\mathbb{A}$, avente in $\mathcal{R}$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{x}$, ha invece in $\mathcal{R}'$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{y}$. In altre parole le (3.13) o le (3.19) esprimono il cambiamento delle coordinate cartesiane di un punto di A quando si passa da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Per tale motivo esse prendono il nome di *formule del cambiamento del riferimento* nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Ad esempio $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ dell'origine O del riferimento $\mathcal{R}$. Si noti pure che la matrice $\mathbf{A}$ è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R' in $\mathbf{V}(\mathbb{A})$.

Le formule del cambiamento di riferimento inverso, ossia del passaggio da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, si ottengono risolvendo le (3.13) o (3.19) in $x_1 \ldots, x_n$. Esse sono pertanto date da $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})$. Ripetendo le considerazioni del paragrafo 3.4 non è difficile risolvere il problema di scrivere equazioni in $\mathcal{R}'$ di un sottospazio di cui siano note le equazioni in $\mathcal{R}$.

E' pure vero (perché?) che date le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, e quelle del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}'$ a un terzo riferimento $\mathcal{R}''$, si possono ricavare le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''$.

Esempio 3.5.1. Se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R)$, cioè se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ differiscono solo per l'origine, le formule del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ di O. Infatti la matrice $\mathbf{A}$ è quella identica, poiché è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R in $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. L'effetto del cambiamento di riferimento è allora una semplice traslazione delle coordinate. Per tale motivo $\mathcal{R}$ si dice ottenuto da $\mathcal{R}'$ mediante una traslazione dell'origine (di vettore $O' - O$).

Se invece $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O, R')$ hanno la stessa origine, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è la matrice della cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R'.

In generale se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$, si può pensare di passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ passando prima da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'' = (O', R)$ e quindi con una semplice traslazione dell'origine del riferimento, e poi da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$, e dunque lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento in $V(A)$. Ovvero si potrà prima passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''' = (O, R')$ lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ e poi passare da $\mathcal{R}'''$ a $\mathcal{R}'$ traslando l'origine (cf. anche la proposizione 3.3.2).

Tornando infine a considerare due spazi affini $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ su un campo $\mathbb{K}$ e una affinità $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, possiamo introdurre in $\mathbb{A}$ due riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ e in $\mathbb{A}'$ due riferimenti $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{S}'$. Si possono allora considerare le equazioni di φ in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ e quelle di φ in $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, nonché le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$. Lasciamo per esercizio (si veda anche il n. 6 del capitolo 13 di [1]) il compito di trovare le relazioni che sussistono tra tali formule ed equazioni.

Esercizi svolti

AFFINITÀ

Problema 3.1. *Siano* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{K}$. *Prova che una applicazione* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *ed esiste un elemento* $\mathbf{w} \in W$ *tale che* $\varphi = \tau_{\mathbf{w}} \circ f$, *dove* $\tau_{\mathbf{w}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ *è la traslazione di vettore* $\mathbf{w}$ *in* $\mathbf{W}$. *In tal caso* $f = \varphi_l$.

Soluzione. Questo esercizio completa la dimostrazione della Proposizione 3.3.2. L'applicazione $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare φ_l tale che $\boldsymbol{\varphi(Q)\varphi(P)} = \varphi_l(\mathbf{QP})$, per ogni P, $Q \in V$. Poichè $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale, posso equivalentemente richiedere che $\varphi(Q) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{QP})$; posti $\mathbf{c} = \varphi(P)$, $f = \varphi_l$, $\mathbf{w} = \mathbf{QP}$, osservando che $Q = P + \mathbf{QP}$ si ricava che $\varphi(P + \mathbf{w}) = \mathbf{c} + f(\mathbf{w})$, come si voleva.

Problema 3.2. Traslazione *Considera il punto* $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. *Determinane l'immagine tramite la traslazione di vettore* $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$.
Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando $P(3, -7, 12)$.

Soluzione. In base alla Definizione 3.1.8, la traslazione di vettore $\mathbf{v}$ è l'affinità definita da $\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v}$, per ogni $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. L'immagine del punto P tramite la traslazione $\tau_{\mathbf{v}}$ è dunque data da

$$\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Nel caso particolare in cui $P(3, -7, 12)$, si ricava che $\tau_{\mathbf{v}}(P)$ è il punto $(4, -5, 15)$.

Problema 3.3. Omotetia *Determina l'immagine del punto* $Q(x_1, x_2, x_3)$ *tramite l'omotetia di rapporto* -5 *e centro* $C(6, -3, -8)$ *in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando $Q(-9, 2, 3)$.

Soluzione. In base alla definizione 3.1.10, l'omotetia φ di rapporto -5 e centro C è definita da $\varphi(Q) = C + (-5)\ \mathbf{CQ}$, per ogni $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Si ricava dunque:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 + 3 \\ x_3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5(x_1 - 6) \\ -3 - 5(x_2 + 3) \\ -8 - 5(x_3 + 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 36 \\ -5x_2 - 18 \\ -5x_3 - 48 \end{pmatrix}.$$

Nel caso numerico particolare, si ha $\varphi(Q) = (-9, -28, -63)$.

Problema 3.4. Simmetria rispetto all'origine *Determina l'immagine del punto* $Q(x_1, x_2, x_3)$ *tramite la simmetria di centro l'origine* O *in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando $Q(2, -3, 1)$.

Soluzione. In base alla Definizione 3.1.11, la simmetria φ di centro l'origine è l'omotetia di rapporto -1 e centro l'origine ed è dunque definita da $\varphi(Q) = O - \mathbf{OQ}$. L'immagine di Q è quindi data da:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova $\varphi(Q) = (-2, 3, -1)$.

Problema 3.5. Simmetria *Determina l'immagine del punto $Q(x_1, x_2, x_3)$ tramite la simmetria di centro $C(7, -6, 11)$ in $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$.*
Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $Q(2, -3, 1)$.

Soluzione. In base alla Definizione 3.1.11, la simmetria φ di centro C è l'omotetia di rapporto -1 e centro C ed è definita da $\varphi(Q) = C - \mathbf{CQ}$. L'immagine di Q è quindi data da:

$$\varphi(Q) = C - \mathbf{CQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - 7 \\ x_2 + 6 \\ x_3 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 14 \\ -x_2 - 12 \\ -x_3 - 22 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova $\varphi(Q) = (12, -9, -23)$.

Problema 3.6. Punto medio *Determina il punto medio M tra i punti $P(p_1, p_2, p_3)$ e $Q(q_1, q_2, q_3)$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.*
Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando $P(3, -4, 7)$ e $Q(3, 5, -1)$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Soluzione. Ricordando la Definizione 3.1.12 e l'equazione (3.8), il punto medio M di P e Q è caratterizzato dalla condizione $\mathbf{Q} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{P}$ ed ha coordinate pari alla semisomma delle coordinate di P e Q: $M = (\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_3+q_3}{2})$. Si ricava $M(3, 1/2, 3)$.

Problema 3.7. *In $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ siano fissati i punti*

$$\begin{array}{l} P_0(1,0),\, Q_0(2,1), \\ P_1(0,1),\, Q_1(2,0), \\ P_2(1,1),\, Q_2(3,-1). \end{array} \tag{3.21}$$

Discuti se esiste una affinità $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$, e, in caso affermativo, descrivila.

Soluzione. **Primo modo** Se l'affinità cercata φ esiste, l'immagine tramite essa di un punto $P(x_1, x_2)$ avrà coordinate della forma $y_1 = ax_1 + bx_2 + e$, $y_2 = cx_1 + dx_2 + f$, con $ad - bc \neq 0$. Per imporre che $\varphi(P_0) = Q_0$, sostituiamo $(1, 0)$ al posto di (x_1, x_2) e $(2, 1)$ al posto di (y_1, y_2); otteniamo due relazioni lineari: $2 = a + e$, $1 = c + f$. Imponendo in modo analogo l'immagine di tutti i punti, ricaviamo il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d, e, f:

$$\begin{cases} 2 = a + e \\ 1 = c + f \\ 2 = b + e \\ 0 = d + f \\ 3 = a + b + e \\ -1 = c + d + f \end{cases}$$

Studiando il sistema, si vede che esiste una e una sola soluzione; a tale soluzione corrisponde quindi una ed una sola affinità φ che soddisfa le richieste: essa ha equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 1 \\ y_2 = -x_1 - 2x_2 + 2 \end{cases} . \tag{3.22}$$

Secondo modo L'esistenza di φ è legata all'esistenza di una applicazione lineare $\varphi_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi_l(P_i - P_0) = \varphi(P_i) - \varphi(P_0) = \mathbf{Q_0Q_i}$ $(i = 1, 2)$. Poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{P_0P_1} = (1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{P_0P_2} = (0, 1)$, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q_0Q_1} = (0, -1)$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{Q_0Q_2} = (1, -2)$. Osserviamo che possiamo ricavare in modo semplice le componenti della base canonica rispetto a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; infatti, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. L'applicazione cercata φ_l è dunque caratterizzata dalle condizioni: $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = \mathbf{w}_2$. Ritroviamo le equazioni (3.22).

Problema 3.8. *In* $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ *siano fissati i punti*

$$\begin{array}{ll} P_0(2, 1), & Q_0(2, 1), \\ P_1(1, -1), & Q_1(2, 0), \\ P_2(1, 3), & Q_2(3, -1). \end{array} \tag{3.23}$$

Dire se esiste una affinità $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ *tale che* $\varphi(P_i) = Q_i$ *per ogni* $i = 0, 1, 2$, *e, in caso affermativo, descriverla.*

Soluzione. L'esistenza di φ è legata all'esistenze di una applicazione lineare $\varphi_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi_l(\mathbf{P_0P_i}) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{(P_0)}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(P_i)} = \mathbf{Q_0Q_i}$ $(i = 1, 2)$. Prova a terminare l'esercizio.

Problema 3.9. *Si considerino le affinità* $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3$ *e* $\psi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ *su* $\mathbb{R}$ *di equazioni rispettivamente*

$$\varphi : \begin{cases} x' = 3x + y + 2 \\ y' = x - y + 7 \\ z' = x - y + 2 \end{cases} \quad \psi : \begin{cases} x'' = x' + y' + z' \\ y'' = 2x' + 3 \\ z'' = z' - y' + 2 \end{cases} \tag{3.24}$$

a) Determinare le equazioni della composizione $\psi \circ \varphi$ *e l'applicazione lineare ad essa associata.*
b) Determinare l'immagine tramite ψ *della retta* r *di* $\mathbb{A}^3$ *passante per i punti* $(0, 3, -1)$ *e* $(2, 5, 0)$ *e del piano* π *di equazione* $4x' + 2y' + z' = -3$.

c) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(P,(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3))$, ove $P(6,-4,5)$.
d) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(O,(\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2,3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3))$.

Soluzione. scrivere

□

RIFERIMENTI

Gli esercizi seguenti riguardano lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Problema 3.10. *Considera il punto $P(2,-1,5)\in\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}=(Q,R)$, ove $Q(0,1,1)$, $R=(\mathbf{v}_1=(2,3,0)$, $\mathbf{v}_2=(4,0,3)$, $\mathbf{v}_3=(-1,0,0))$.*

Soluzione. Le coordinate $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono, per definizione, caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=Q+a_1\,\mathbf{v}_1+a_2\,\mathbf{v}_2+a_3\,\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2a_1+4a_2-a_3\\1+3a_1\\1+3a_2\end{pmatrix}$$

Uguagliando componente per componente e risolvendo il sistema non omogeneo così ottenuto, si ricava che le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},2)$.

Problema 3.11. *Considera il punto $P(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}=(Q,R)$, ove $Q(q_1,q_2,q_3)$, $R=(\mathbf{v}_1=(2,3,0)$, $\mathbf{v}_2=(4,0,3)$, $\mathbf{v}_3=(-1,0,0))$. Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando $Q(2,0,1)$.*

Soluzione. Le coordinate $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono, per definizione, caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q+a_1\,\mathbf{v}_1+a_2\,\mathbf{v}_2+a_3\,\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}q_1+2a_1+4a_2-a_3\\q_2+3a_1\\q_3+3a_2\end{pmatrix}$$

In particolare, (a_1,a_2,a_3) sono le componenti, nel riferimento R, del vettore $\mathbf{P}-\mathbf{Q}$ (che ha coordinate $\mathbf{x}-\mathbf{q}=(x_1-q_1,x_2-q_2,x_3-q_3)$ nel riferimento standard). Posto $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ e detta A la matrice $A=\begin{pmatrix}2&4&-1\\3&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}$ le cui colonne sono formate dalle componenti dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ in base canonica, risulta che $A\,\mathbf{a}=\mathbf{x}-\mathbf{q}$, e dunque:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{q})=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&3\\9&6&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-q_1\\x_2-q_2\\x_3-q_3\end{pmatrix}$$

Fissando $Q(2,0,1)$, si ricava che le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi

3.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo, sia B un insieme e sia $g : B \to \mathbb{A}$ una biezione. Mostra che se B è munito della struttura di spazio affine indotta da g, allora g è un isomorfismo di B su $\mathbb{A}$.

3.2. Prova che se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale non nullo, $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$ è un sottogruppo proprio del gruppo $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$ delle affinità dello spazio affine $\mathbf{V}$ canonicamente associato.

3.3. Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ spazi affini di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una affinità. Prova che φ è suriettiva se e solo se $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{A}'$, e che φ è iniettiva se e solo se $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{A}$.

3.4. Determina l'immagine del punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tramite la traslazione di vettore $\mathbf{v} = (-4, 7, 3)$.

3.5. Determina l'immagine del punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tramite l'omotetia $\varphi : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di centro $C(2, -4, 8)$ e rapporto 6.

3.6. Determina l'immagine del punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tramite la simmetria $\varphi : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di centro l'origine.

3.7. Determina l'immagine del punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tramite la simmetria $\varphi : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di centro $C(3, -11, 45)$.

3.8. Determinare il vettore delle coordinate di $(2, -1, 5) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (P, R)$, ove $P(0, 1, 1)$ e $R = (\mathbf{v}_1 = (2, 3, 0),\ \mathbf{v}_2 = (4, 0, 3),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0))$.

3.9. Considera il punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q, R)$, ove $Q(-6, 12, 1)$, $R = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1))$.

3.10. Considera il punto $P(2, -1, 5) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q, R)$, ove $Q(1, 5, -2)$, $R = (\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (0, 0, -1))$.