2

Affinità

Nello spazio complesso si considera una nozione più generale di riferimento. Si introduce inoltre una nozione più generale di trasformazione affine.

In questo capitolo, si denotano con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ la retta affine reale complessificata, il piano affine reale complessificato o lo spazio affine reale complessificato, per n=1, 2, 3 rispettivamente. Chiameremo n la dimensione complessa di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Qualora sia conveniente distinguere tra questi casi, viene indicata esplicitamente la dimensione. In modo analogo, indichiamo con $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ il complessificato di retta, piano e spazio euclideo reale.

2.1 Riferimenti complessi nello spazio complesso

Definizione 2.1.1. Una coppia $\mathcal{R} = (O, R)$, ove $O \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ e R è un riferimento di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, si dice un *riferimento (cartesiano) affine* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Il punto O, che si dice *origine* del riferimento $\mathcal{R}$, mentre il riferimento R di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ si dice *associato* al riferimento $\mathcal{R}$.

Si procede analogamente a quanto visto nel capitolo 1 per i riferimenti dello spazio euclideo ed i riferimenti reali (cf. Definizione 1.2.2) nello spazio complesso.
Fissato il riferimento $\mathcal{R}$, resta definita la seguente applicazione φ:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \quad \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & O + (x_1 \mathbf{v_1} + \ldots + x_n \mathbf{v_n}). \end{array} \tag{2.1}$$

Per ogni punto $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ la n-pla

$$\varphi^{-1}(P) = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n,$$

caratterizzata dalla relazione

$$\mathbf{OP} = x_1 \mathbf{v_1} + \ldots + x_n \mathbf{v_n}, \tag{2.2}$$

si dice la *n-pla delle coordinate (cartesiane)* di P nel riferimento $\mathcal{R}$. Ciò si esprime scrivendo

$$P(\mathbf{x}) \text{ o } P(x_1, \ldots, x_n).$$

L'origine O del riferimento $\mathcal{R}$ ha coordinate tutte nulle in $\mathcal{R}$. I punti $P_i(\mathbf{e}_i)$, dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-simo vettore unitario di $\mathbb{C}^n$, si dicono i *punti unitari* del riferimento. Le rette per l'origine ed un punto unitario sono dette *assi* del riferimento.

Definizione 2.1.2. Per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ la n-pla delle sue componenti in R si dice *n-pla delle componenti di* $\mathbf{v}$ *nel riferimento* $\mathcal{R} = (O, R)$.

Osservazione 2.1.3. Se P e Q sono punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ aventi in $\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, allora il vettore $\mathbf{QP}$ (denotato anche con $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$) ha in $\mathcal{R}$ componenti $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

Osservazione 2.1.4. I riferimenti reali introdotti nella Definizione 1.2.2 sono particolari riferimenti affini. Se il riferimento considerato non è reale, l'applicazione coniugio dipende dal riferimento scelto e non è possibile caratterizzare i punti dello spazio ordinario come punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ a coordinate reali. È come se non si volesse tenere memoria dello spazio ordinario.

Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono due riferimenti in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, si denotino con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ le coordinate di uno stesso punto nei due riferimenti. Esistono allora una matrice quadrata invertibile complessa $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ di ordine n e un vettore colonna $\mathbf{c} = (c_1 \ldots, c_n)$ tale che

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}. \tag{2.3}$$

L'equazione (2.3) è detta *equazione (matriciale) del cambio di riferimento* nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. L'equazione (2.3) si scrive, per esteso, come

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \tag{2.4}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Al variare della dimensione, le equazioni diventano

$$y = ax + c \text{ per } n = 1,$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2 \end{cases} \text{per } n = 2, \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + c_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + c_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{n3}x_3 + c_3 \end{cases} \text{per } n = 3. \tag{2.6}$$

Osserviamo che $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ dell'origine O del riferimento $\mathcal{R}$. Si noti pure che la matrice $\mathbf{A}$ è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R' in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.

Le formule del cambiamento di riferimento inverso, ossia del passaggio da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, si ottengono risolvendo le (2.3) in $\mathbf{x}$. Esse sono pertanto date da

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}). \tag{2.7}$$

2.2 Affinità

Sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = (O, R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n))$ in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ e si scrivano come vettori colonne le coordinate dei punti e le componenti dei vettori geometrici in tale riferimento.

Se P e Q sono punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$, sciviamo che

$$Q = P + \mathbf{v}.$$

Definizione 2.2.1. Una applicazione $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ si dice una *affinità* se esistono una matrice quadrata $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ di ordine n e un vettore colonna $\mathbf{c} = (c_1 \dots, c_n)$ tali che le coordinate $\mathbf{y}$ dell'immagine $\varphi(P)$ del punto $P(\mathbf{x})$ si determinino tramite l'equazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}. \tag{2.8}$$

L'equazione (2.8) è detta *equazione (matriciale) dell'affinità*. Il *rango di* φ è, per definizione, il rango della matrice $\mathbf{A}$ e si denota con il simbolo

$$rg(\varphi).$$

Osservazione 2.2.2. Mantenendo le notazioni come nella precedente definizione, risulta $\varphi(O) = \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^t$

Osservazione 2.2.3. **Applicazione lineare associata ad una affinità** Siano $P(\mathbf{x})$ e $Q(\mathbf{x}')$ due punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$; denotando con $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$ le coordinate di $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ rispettivamente, si verifica che

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = (\mathbf{y}' - \mathbf{y})$$

e tale posizione induce una ben definita applicazione lineare

$$\varphi_l \colon \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$$

detta *applicazione lineare associata all'affinità* φ. Viceversa, assegnati una applicazione lineare $\psi : \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ e l'immagine del punto O, esiste una unica affinità φ che abbia ψ come applicazione lineare associata e assegni a O l'immagine richiesta. Dunque: *una applicazione* $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare* $\varphi_l : \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ *tale che* $\varphi(Q) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{PQ})$ per ogni P, Q in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. In particolare:

$$\varphi(Q) = \varphi(O) + \varphi_l(\mathbf{OQ})$$

Osservazione 2.2.4. La definizione di affinità, rango e applicazione lineare associata di una affinità, non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.

Se $\varphi' : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ è un'altra una affinità di equazione matriciale

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{d} \tag{2.9}$$

allora la composizione $\varphi' \circ \varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ ha equazione matriciale data da

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) \tag{2.10}$$

Osservazione 2.2.5. L'affinità $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ è invertibile se e solo se ha rango n, cioè se e solo se la matrice $\mathbf{A}$ che compare nella sue equazione matriciale (2.8) è invertibile: in tal caso, l'affinità è detta *isomorfismo*. L'equazione dell'affinità inversa φ^{-1} è

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \tag{2.11}$$

Esempio 2.2.6. **Le affinità di rango 0** Sia Q un punto di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ e si consideri l'applicazione costante $\varphi_Q : P(\in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}) \to Q \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Questa è una affinità la cui applicazione lineare associata è l'applicazione lineare nulla. Pertanto $\mathrm{rg}(\varphi_Q) = 0$.
Viceversa se $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ ha rango 0, l'applicazione φ_l è l'applicazione nulla e φ è costante. Infatti per ogni coppia (P, Q) di punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, detti $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$, si ha $\mathbf{P'Q'} = \varphi_l(\mathbf{PQ}) = \mathbf{0}$, sicchè $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Dunque, *le applicazioni costanti sono tutte e sole le affinità di rango* 0.

Esempio 2.2.7. **L'affinità identica** L'applicazione identica ι di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ in sè è una affinità, la cui applicazione lineare associata è l'applicazione identica.

Si osservi che, se S è un sottospazio di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ definito da equazioni lineari, anche l'immagine $\varphi(S)$ è definita da equazioni lineari. Sia infatti data una affinità $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ di equazioni (2.8) o (2.4). Sia S una retta di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, passante per due punti distinti P e Q. Lo spazio $S' = \varphi(S)$ contiene sicuramente i punti $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$: se tali punti sono distinti, allora S' è esattamente la retta per $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$; se invece i due punti coincidono, $\varphi(P) = \varphi(Q)$ e $S' = \{\varphi(P)\}$ è formato da un punto. Se $\mathbf{x} = P + t\mathbf{v}$ sono equazioni parametriche per S, allora $\mathbf{y} = \mathbf{A}(P + t\mathbf{v}) + \mathbf{c} = (\mathbf{A}P + \mathbf{c}) + t\mathbf{A}\mathbf{v}$ fornisce una descrizione parametrica di $S' = \varphi(S)$, che è una retta se e solo se $\mathbf{A}\mathbf{v}$ è un vettore non nullo.

Se S è un piano, la sua immagine può essere un piano, una retta o un punto. Se $\mathbf{x} = P + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ sono equazioni parametriche di S, allora

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(P + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}) + \mathbf{c} = (\mathbf{A}P + \mathbf{c}) + t\mathbf{A}\mathbf{v} + s\mathbf{A}\mathbf{w}$$

fornisce una descrizione parametrica di $S' = \varphi(S)$, che è un piano se $\mathbf{A}\mathbf{v}$ e $\mathbf{A}\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, è una retta se $\mathbf{A}\mathbf{v}$ e $\mathbf{A}\mathbf{w}$ generano un sottospazio di dimensione 1, è un punto se $\mathbf{A}\mathbf{v}$ e $\mathbf{A}\mathbf{w}$ sono entrambi nulli.

Esempio 2.2.8. Consideriamo l'affinità $\varphi : \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ di equazioni

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2 \end{cases} \tag{2.12}$$

Sia r la retta per $P = (0, -1/2, 1)$ e $Q = (1/3, 0, 1)$. I punti $\varphi(P) = (1/2, 1/2, 2)$ e $\varphi(Q) = (5/3, 1/3, 10/3)$ generano $\varphi(r)$. Poiché essi sono distinti, $\varphi(r)$ è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} y_1 = 1/2 + t(7/6) \\ y_2 = 1/2 - t(1/6) \qquad t \in \mathbb{C} \\ y_3 = 2 + t(4/3) \end{cases} \tag{2.13}$$

che si possono altresì scrivere (cambiando per proporzionalità i numeri direttori di $\varphi(r)$) come

$$\begin{cases} y_1 = 1/2 + 7t \\ y_2 = 1/2 - t \qquad t \in \mathbb{C} \\ y_3 = 2 + 8t \end{cases} \tag{2.14}$$

□

Nel caso $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ sia invertibile allora $S' = \varphi(S)$ ha la stessa dimensione di S, e per scriverne le equazioni cartesiane, conoscendo quelle di S, si può procedere così. Sia

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

un sistema di equazioni di S. Un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ sta in S' se e solo se valgono contemporaneamente (2.8) e (2.15). Ricavando allora da (2.8) il vettore $\mathbf{x}$, ossia scrivendo l'equazione matriciale della affinità inversa di φ, si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \tag{2.16}$$

e sostituendo in (2.15) si trovano le equazioni di S' che risultano pertanto date da

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{d} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

Esempio 2.2.9. Consideriamo l'affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ in sè di equazione

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Essa è invertibile, in quanto il determinante della matrice dell'applicazione lineare associata è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2. \tag{2.19}$$

L'affinità inversa ha equazioni

$$\begin{cases} x = (x' + y' - 3)/2 \\ y = (-x' + y' - 1)/2 \end{cases} \tag{2.20}$$

come si vede risolvendo le equazioni di φ in x e y. La retta di equazione $3x+7y-9 = 0$ viene pertanto trasformata da φ nella retta di equazione

$$\begin{gathered} 3[(x' + y' - 3)/2] + 7[(-x' + y' - 1)/2] - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x' + y' - 3) + 7(-x' + y' - 1) - 18 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x' + 10y' - 34 = 0 \Leftrightarrow \\ 2x' - 5y' + 17 = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

Definizione 2.2.10. Un punto P di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(P) = P$ è detto *punto fisso* o *punto unito* per l'affinità φ.

Esempio 2.2.11. **Alcune affinità di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ in se stesso** L'applicazione identica di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ è l'unica affinità che ammette almeno un punto fisso e la cui applicazione lineare associata sia identica.
Più in generale, sia $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ una affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. Sia P un punto di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ e poniamo $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) - \mathbf{P} = \mathbf{v}$. Per ogni punto Q di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ si ha che $Q = P + (\mathbf{PQ})$ e dunque:

$$\varphi(Q) = \varphi(P) + (\mathbf{PQ}) = Q + [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{P}) - \mathbf{P}] = Q + \mathbf{v}.$$

In particolare, il vettore $\mathbf{v}$ non dipende dalla scelta del punto P, ma solo dall'affinità φ, che viene detta *traslazione* di vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ e si denota col simbolo $\tau_{\mathbf{v}}$. Per quanto visto, si ha:

Definizione 2.2.12. La *traslazione* di vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ è l'affinità $\tau_{\mathbf{v}} \colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ definita da

$$\tau_{\mathbf{v}}(Q) = Q + \mathbf{v} \text{ per ogni } Q \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}. \tag{2.22}$$

Osservazione 2.2.13. Le traslazioni sono tutte e sole le affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità.

Si rimanda all'Esercizio Svolto **??** per un esempio.

Consideriamo ora una affinità $\varphi : \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ che fissa un punto P e la cui applicazione lineare associata sia una omotetia ω_λ di rapporto $\lambda \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, cioè la moltiplicazione per uno scalare λ fissato: $\omega_\lambda(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.

Per ogni punto $Q = P + \mathbf{v}$ di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ si ha:

$$\varphi(Q) = P + \lambda \mathbf{v} \tag{2.23}$$

e una tale affinità si dice *omotetia* di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ di *centro* P e *rapporto* λ. Più in generale:

Definizione 2.2.14. Una affinità $\varphi \colon \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ si dice *omotetia* di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ di *centro* P e *rapporto* λ se per ogni punto Q di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$, scritto come $Q = P + \mathbf{v}$, si ha:

$$\varphi(Q) = P + \lambda \mathbf{v} \tag{2.24}$$

Esplicitamente, si deve avere $\varphi(Q) = P + \lambda\, \mathbf{PQ}$, per ogni $Q \in \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$. Una omotetia di rapporto λ viene spesso indicata con il simbolo ω_λ.

Si rimanda all'Esercizio Svolto **??** per un esempio.
In particolare, l'omotetia di centro P e rapporto 1 è l'identità, mentre quella di centro P e rapporto -1 prende il nome di *simmetria*:

Definizione 2.2.15. L'omotetia di centro P e rapporto -1 è detta *simmetria* di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ rispetto a P (o di *centro* P) e verifica

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = P - \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v}. \tag{2.25}$$

Il nome è giustificato dal fatto che la simmetria di centro P associa ad ogni punto Q il punto $\varphi(Q) = Q'$ tale $\mathbf{PQ'} = \mathbf{QP}$, cioè il centro di simmetria P è punto medio per Q e $\varphi(Q) = Q'$. I punti Q e $\varphi(Q) = Q'$ si dicono *simmetrici* rispetto a P.

Si rimanda agli Esercizi Svolti **??** - **??** per esempi.

2.3 Riferimenti e affinità.

Se la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile, le equazioni:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{2.26}$$

si possono interpretare come equazioni di una trasformazione affine (in tal caso, $\mathbf{y}$ sono le coordinate dell'immagine del punto P di coordinate $\mathbf{x}$) oppure come equazioni di un cambio di riferimento (in tal caso, $\mathbf{y}$ sono le coordinate in un nuovo sistema di riferimento del punto P avente coordinate $\mathbf{x}$ nel riferimerimento originario.)

Supponiamo infatti dati in $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ due riferimenti $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ e consideriamo le equazioni in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ della affinità identica di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ in sè. Esse saranno del tipo (2.26), dove $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata invertibile d'ordine n su $\mathbb{C}$ e $\mathbf{c}$ è un vettore colonna in $\mathbb{C}^n$.

Le equazioni (2.26) si possono anche interpretare nel senso che un punto P di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$, avente in $\mathcal{R}$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{x}$, ha invece in $\mathcal{R}'$ vettore delle coordinate dato da $\mathbf{y}$. In altre parole le (2.26) esprimono come cambiano le coordinate cartesiane di un punto di $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ quando si passa da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

Esempio 2.3.1. Se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R)$, cioè se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ differiscono solo per l'origine, le formule del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono $\mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}'$ di O. Infatti la matrice $\mathbf{A}$ è quella identica, poiché è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. L'effetto del cambiamento di riferimento è allora una semplice traslazione delle coordinate. Per tale motivo $\mathcal{R}$ si dice ottenuto da $\mathcal{R}'$ mediante una traslazione dell'origine (di vettore OO').

Se invece $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O, R')$ hanno la stessa origine, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è la matrice della cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R'.

In generale se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$, si può pensare di passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ passando prima da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'' = (O', R)$ e quindi con una semplice traslazione dell'origine del riferimento, e poi da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$, e dunque lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento in $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. Ovvero si potrà prima passare da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''' = (O, R')$ lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ e poi passare da $\mathcal{R}'''$ a $\mathcal{R}'$ traslando l'origine.

Esercizi svolti

CAMBI DI RIFERIMENTO E TRASFORMAZIONI AFFINI
In $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$ (per $n = 1, 2, 3$) si consideri fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$.

Problema 2.1. *Si considerino le affinità $\varphi : \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ e $\psi : \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$ di equazioni rispettivamente*

$$\varphi : \begin{cases} x' = 3x + y + 2 \\ y' = x - y + 7 \end{cases} \quad \psi : \begin{cases} x'' = x' + y' \\ y'' = 2x' + 3 \end{cases} \tag{2.27}$$

a) Determinare le equazioni della composizione $\psi \circ \varphi$ e l'applicazione lineare ad essa associata.
b) Determinare una equazione parametrica per l'immagine tramite ψ della retta r di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ passante per i punti $(0, 3)$ e $(2, 5)$.
c) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine tramite ψ della retta s di equazione $3x'_1 + x'_2 + 5 = 0$.
d) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(P, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$, ove $P(6, -4)$.
e) Determinare le equazioni di ψ nel riferimento $(O, (\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2))$.

Soluzione. a) Le equazioni della composizione $\psi \circ \varphi$ si ottengono sotituendo nelle equazioni di ψ l'espressione di (x', y') ricavata dalle equazioni di φ:

$$(\psi\circ\varphi)(x_1, x_2) = ([3x+y+2]+[x-y+7], 2[3x+y+2]+3) = (4x+9, 6x+2y+7).$$

L'applicazione lineare associata alla composizione $\psi \circ \varphi$ è l'applicazione $(\psi \circ \varphi)_l : \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}}$ definita da $(\psi \circ \varphi)_l(l\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2) = 4l\mathbf{v}_1 + (6l + 2m)\mathbf{v}_2$
Alternativamente, osserviamo che le equazioni di φ e ψ possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \psi : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Le equazioni della composizione si ottengono sostituendo nelle equazioni di ψ l'espressione di (x', y') ottenuta dalle equazioni di φ; si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'applicazione lineare associata a ψ è l'endomorfismo di $\mathcal{V}^2_{\mathbb{C}}$ rappresentata dalla matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ nel riferimento R.

b) La retta ha equazioni parametriche $x' = 2t, y' = 3+2t$, $t \in \mathbb{C}$: dunque ogni punto della retta ha coordinate della forma $P(x', y') = (2t, 3+2t)$. Applicando ψ, si ricava che l'immagine della retta è data da

$$(x'', y'') = \psi(2t, 3+2t) = (2t+3+2t, 4t+3) = (4t+3, 4t+3) \quad t \in \mathbb{C},$$

che forniscono le equazioni parametriche cercate.
c) È possibile passare dalla rappresentazione cartesiana alla rappresentazione parametrica ed applicare la procedura illustrata al punto precedente, oppure procedere come segue. Poichè ψ é invertibile, un punto $P(x'', y'')$ appartiene a $\psi(s)$ se e solo se $\psi^{-1}(P)$ appartiene ad s. Invertendo le equazioni di ψ tramite la formula (2.7), scopriamo che $\psi^{-1}(P) = ((1/2)y''-(3/2), x_1''-(1/2)y''+3/2)$: dunque $P(x'', y'') \in \psi(s)$. Sostituendo le coordinate di $\psi^{-1}(P)$ nell'equazione cartesiana di s, si trova l'equazione cartesiana di $\psi(s)$:

$$3[(1/2)y'' - (3/2)] + [x_1'' - (1/2)y'' + 3/2)] + 5 = x_1'' + y'' + 2 = 0.$$

d) Denotando con $(\hat{x}, \hat{y})$ nel riferimento $(P, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$, il corrispondente cambio di coordinate è dato da $x' = \hat{x} + 6$, $y' = \hat{y} - 4$. Sostituendo nelle equazioni di ψ e denotando con $(\hat{x}', \hat{y}')$ le coordinate dell'immagine tramite ψ del punto di coordinate $(\hat{x}, \hat{y})$, si trova $\psi : \begin{cases} \hat{x}' + 6 = \hat{x} + 6 + (\hat{y} - 4) \\ \hat{y}' - 4 = 2(\hat{x} + 6) + 3 \end{cases}$ da cui $\psi : \begin{cases} \hat{x}' = \hat{x} + \hat{y} - 4 \\ \hat{y}' = 2\hat{x} + 19 \end{cases}$.
e) Denotando con $(\tilde{x}, \tilde{y})$ nel riferimento $(O, (\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2))$, il corrispondente cambio di coordinate è dato da $x' = \tilde{x}+3\tilde{y}$, $y' = 4\tilde{x}+\tilde{y}$. Sostituendo nelle equazioni di ψ e denotando con $(\tilde{x}', \tilde{y}')$ le coordinate dell'immagine tramite ψ del punto di coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$, si trova $\psi : \begin{cases} \tilde{x}' + 3\tilde{y}' = \tilde{x} + 3\tilde{y} + (4\tilde{x} + \tilde{y}) \\ 4\tilde{x}' + \tilde{y}' = 2(\tilde{x} + 3\tilde{y}) + 3 \end{cases}$ da cui $\psi : \begin{cases} \tilde{x}' + 3\tilde{y}' = 5\tilde{x} + 4\tilde{y} \\ 4\tilde{x}' + \tilde{y}' = 2\tilde{x} + 6\tilde{y} + 3 \end{cases}$ e dunque $\psi : \begin{cases} \tilde{x}' = -(\tilde{x}/11) + (12/11)\tilde{y} + (9/11) \\ \tilde{y}' = (18/11)\tilde{x} + (10/11)\tilde{y} - (3/11) \end{cases}$.
□

Problema 2.2. *Si consideri il punto $P(2, -1, 5) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. Determinare le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}' = (Q, R')$, ove $Q(0, 1, 1)$, $R' = (\mathbf{v}_1' = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v}_2' = (4, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3' = (-1, 0, 0))$.*

Soluzione. Le coordinate $(x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{C}^3$ di P nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono, per definizione, caratterizzati dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = Q + a_1\, \mathbf{v}_1' + x_2'\, \mathbf{v}_2 + x_3'\, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2x_1' + 4x_2' - x_3' \\ 1 + 3x_1' \\ 1 + 3x_2' \end{pmatrix}$$

Uguagliando componente per componente e risolvendo il sistema non omogeneo così ottenuto, si ricava che le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2)$.
□

Problema 2.3. *Si consideri il punto* $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. *Determinare le coordinate* (x'_1, x'_2, x'_3) *di* P *nel riferimento* $\mathcal{R}' = (Q, R')$, *ove* $Q(q_1, q_2, q'_3)$, $R' = (\mathbf{v}'_1 = (2,3,0),\ \mathbf{v}'_2 = (4,0,3),\ \mathbf{v}'_3 = (-1,0,0))$.
Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $Q(2,0,1)$.

Soluzione. Le coordinate $(x'_1, x'_2, x'_3)) \in \mathbb{C}^3$ di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono, per definizione (cf. l'equazione 2.2), caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q + x'_1\,\mathbf{v}'_1 + x'_2\,\mathbf{v}'_2 + x'_3\,\mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} q_1 + 2x'_1 + 4x'_2 - x'_3 \\ q_2 + 3x'_1 \\ q_3 + 3x'_2 \end{pmatrix}$$

In particolare, (x'_1, x'_2, x'_3) sono le componenti, nel riferimento R', del vettore $\mathbf{QP}$ (che in R ha componenti $\mathbf{x} - \mathbf{q} = (x_1 - q_1, x_2 - q_2, x_3 - q_3)$ per l'osservazione 2.1.3). Posto $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ e detta $\mathbf{A}$ la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono formate dalle componenti dei vettori $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$, $\mathbf{v}'_3$ nel riferimento $\mathcal{R}$, risulta che $\mathbf{A}\,\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{q}$, e dunque:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & -6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & -6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & -6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3x_2 \\ 3x_3 \\ -9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3q_1 \\ -3q_3 \\ 9q_1 - 6q_2 - 12q_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3x_2 - 3q_1 \\ 3x_3 - 3q_3 \\ -9x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 9q_1 - 6q_2 - 12q_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fissando $Q(2,0,1)$, si ricava che le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3x_2 - 6 \\ 3x_3 - 3 \\ -9x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 6 \end{pmatrix}$$

□

Problema 2.4. *Nel piano* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ *siano fissati i punti*

$$\begin{aligned} &P_0(0,0),\ Q_0(4,1), \\ &P_1(1,0),\ Q_1(2,0), \\ &P_2(0,1),\ Q_2(3,-1). \end{aligned} \tag{2.29}$$

a) Dire se esiste una affinità $\varphi : \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$, e, in caso affermativo, descriverla.
b) Determinare, se esiste, un riferimento $\mathcal{R}'$ tale che in esso il punto Q_0 sia l'origine, mentre Q_1 abbia coordinate $(1, 0)$ e Q_2 abbia coordinate $(0, 1)$. In caso affermativo, determinare esplicitamente il cambio di coordinate dal riferimento $\mathcal{R}'$ al riferimento $\mathcal{R}$.

Soluzione. **Primo modo** L'esistenza di φ equivale all'esistenza di una matrice invertibile $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ ed un vettore $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ tali che le coordinate $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ di $\varphi(P)$ e le coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\varphi(P)$ siano legate dalla relazione $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ (per ogni $P \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$). Imponendo che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$, si trova il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite a, b, c, d, e, f:

$$\begin{cases} c = 4 \\ f = 1 \\ a + c = 2 \\ d + f = 0 \\ b + c = 3 \\ e + f = -1 \end{cases}$$

Poichè tale sistema è compatibile e ha una soluzione unica, esiste una unica affinità φ che risponde alle richieste: φ è definita dalle equazioni

$$(y_1, y_2) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 2x_2 + 1).$$

Secondo modo L'esistenza di φ è legata all'esistenza di una applicazione lineare $\varphi_l : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tale che $\varphi_l(\mathbf{P_0P_i}) = \mathbf{Q_0Q_i}$ per $i = 1, 2$; il legame è fornito dalla relazione $\varphi(P) = Q_0 + \varphi_l(P_0P)$. Osserviamo che $\mathbf{P_0P_1}$ ha coordinate $(1, 0)$ dunque $\mathbf{P_0P_1} = \mathbf{v}_1$, mentre $\mathbf{P_0P_2} = (0, 1)$ e dunque $\mathbf{P_0P_2} = \mathbf{v}_2$. D'altra parte $\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q_0Q_1}$ ha componenti $(-2, -1)$, mentre $\mathbf{w}_2 = \mathbf{Q_0Q_2}$ ha componenti $(-1, -2)$. Osserviamo che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e dunque esiste una ed una sola applicazione lineare $\varphi_l : \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi_l(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$: essa è definita da $\varphi_l(l\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2) = l\mathbf{w}_1 + m\mathbf{w}_2$. Le equazioni di φ sono dunque date da:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 + 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 1 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

b) Osserviamo che, se il riferimento $\mathcal{R}'$ esiste, deve avere come origine il punto Q_0 e come punti unitari i punti Q_1 e Q_2: dunque, il riferimento di $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ associato a $\mathcal{R}'$ deve essere $R' = (\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q_0Q_1}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{Q_0Q_2},)$ (mantenendo le notazioni introdotte al punto precedente. Poichè $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, la posizione $\mathcal{R}' = \{Q_0, R' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\}$ definisce effettivamente un riferimento di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, e tale riferimento soddisfa alle richieste (ed è l'unico). Per determinare le equazioni del cambio di riferimento, basta osservare che le equazioni (2.30) descrivono il cambio dal riferimento $\mathcal{R}$ al riferimento $\mathcal{R}'$, se si denotano con $\mathbf{y}$ le coordinate di $P(x_1, x_2)$ rispetto al riferimento $\mathcal{R}'$. Le equazioni cercate si ottengono dalla formula (2.7) e sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)y_1 - (3/2)y_2 - 1 \\ -y_2 - 1 \end{pmatrix}$$

□

Problema 2.5. *Nel piano* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ *siano fissati i punti*

$$\begin{array}{l} P_0(1,3),\ Q_0(2,1), \\ P_1(4,1),\ Q_1(2,0), \\ P_2(1,1),\ Q_2(3,-1). \end{array} \tag{2.31}$$

Dire se esiste una affinità $\varphi : \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ *tale che* $\varphi(P_i) = Q_i$ *per ogni* $i = 0, 1, 2$, *e, in caso affermativo, descriverla.*

Soluzione. **Primo modo** L'esistenza di φ equivale all'esistenza di una matrice invertibile $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ ed un vettore $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ tali che le coordinate $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ di $\varphi(P)$ e le coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\varphi(P)$ siano legate dalla relazione $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ (per ogni $P \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$). Imponendo che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$, si trova il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite a, b, c, d, e, f:

$$\begin{cases} a + 3b + c = 2 \\ d + 3e + f = 1 \\ 4a + b + c = 2 \\ 4d + e + f = 0 \\ a + b + c = 3 \\ d + e + f = -1 \end{cases}$$

Poichè tale sistema è compatibile e ha una soluzione unica, esiste una unica affinità φ che risponde alle richieste: φ è definita dalle equazioni

$$(y_1, y_2) = (-(1/3)x_1 - (1/2)x_2 + (23/6), (1/3)x_1 + x_2 - 7/3).$$

Secondo modo L'esistenza di φ è legata all'esistenza di una applicazione lineare $\varphi_l : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tale che $\varphi_l(\mathbf{P_0P_i}) = \mathbf{Q_0Q_i}$ per $i = 1, 2$; il legame è fornito dalla relazione $\varphi(P) = Q_0 + \varphi_l(P_0P)$. Osserviamo che $\mathbf{P_0P_1} = \mathbf{v}'_1$ ha coordinate $(3, -2)$, mentre $\mathbf{P_0P_2} = \mathbf{v}'_2$ ha coordinate $(0, -2)$. D'altra parte $\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q_0Q_1}$ ha componenti $(0, -1)$, mentre $\mathbf{w}_2 = \mathbf{Q_0Q_2}$ ha componenti $(1, -2)$. Osserviamo che $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ sono linearmente indipendenti e dunque esiste una ed una sola applicazione lineare $\varphi_l : \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi_l(\mathbf{v}'_1) = \mathbf{w}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{v}'_2) = \mathbf{w}_2$: essa è definita da $\varphi_l(l'\mathbf{v}'_1 + m'\mathbf{v}'_2) = l'\mathbf{w}_1 + m'\mathbf{w}_2$. Per determinare le equazioni di φ, si trova innanzitutto la matrice dell'applicazione lineare associata φ_l, nei riferimenti opportuni; per ogni vettore $\mathbf{v}$ denotiamo con (l, m) le sue componenti in R r con con (l', m') le sue componenti in $R' = (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2')$, mentre con (L, M) denotiamo le componenti in R dell'immagine $\varphi_l(\mathbf{v}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}_{\mathbb{C}^2,R} & \stackrel{id}{\rightarrow} & \mathcal{V}_{\mathbb{C}^2,R'} & \stackrel{\varphi_l}{\rightarrow} & \mathcal{V}_{\mathbb{C}^2,R} \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v} & \mapsto & \varphi_l(\mathbf{v}) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} & \stackrel{C^{-1}}{\mapsto} & \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} & \stackrel{D}{\mapsto} & \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \end{array}$$

ove , $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ ha per colonne le componenti in R di $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ha per colonne le componenti in R di $\varphi_l(\mathbf{v}_1') = \mathbf{w}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{v}_2') = \mathbf{w}_2$. Si ricava che la matrice di φ_l, rispetto al riferimento R in dominio e codominio, è $\mathbf{A} = D\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.
Dalla relazione $\varphi(P) = \varphi_l(\mathbf{P_0 P}) + \varphi(P_0)$, si ricavano le equazioni di φ:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1/3)x_1 - (1/2)x_2 + (23/6) \\ (1/3)x_1 + x_2 - (7/3) \end{pmatrix}$$

□

Problema 2.6. *In $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ siano fissati i punti*

$$\begin{array}{l} P_0(0,0,0),\, Q_0(0,0,0), \\ P_1(1,0,0),\, Q_1(2,1,1), \\ P_2(0,1,0),\, Q_2(2,0,0), \\ P_3(0,0,1),\, Q_3(3,-1,0). \end{array} \tag{2.32}$$

Dire se esiste una affinità $\varphi : \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$, e, in caso affermativo, descriverla.

TRASFORMAZIONI

Problema 2.7. Traslazione *Si consideri il punto $P(x_1, x_2, x_3)$ nello spazio $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. Determinarne l'immagine tramite la traslazione di vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $P(3, -7, 12)$.*

Soluzione. In base alla Definizione 2.2.12, la traslazione di vettore $\mathbf{v}$ è l'affinità definita da $\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v}$, per ogni $P \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. L'immagine del punto P tramite la traslazione $\tau_{\mathbf{v}}$ è dunque data da

$$\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Nel caso particolare in cui $P(3, -7, 12)$, si ricava che $\tau_{\mathbf{v}}(P)$ è il punto $(4, -5, 15)$. □

Problema 2.8. Omotetia *Determinare l'immagine del punto* $Q(x_1, x_2, x_3)$ *tramite l'omotetia di rapporto* -5 *e centro* $C(6,-3,-8)$ *in* $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.
Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $Q(2,-1,1)$.

Soluzione. In base alla definizione 2.2.14, l'omotetia φ di rapporto -5 e centro C è definita da $\varphi(Q) = C + (-5)\ \mathbf{CQ}$, per ogni $Q \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. Si ricava dunque:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 + 3 \\ x_3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5(x_1 - 6) \\ -3 - 5(x_2 + 3) \\ -8 - 5(x_3 + 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 36 \\ -5x_2 - 18 \\ -5x_3 - 48 \end{pmatrix}.$$

Nel caso numerico particolare, si ha $\varphi(Q) = (26, -13, -53)$. □

Problema 2.9. Simmetria rispetto all'origine *Determinare l'immagine del punto* $Q(x_1, x_2, x_3)$ *tramite la simmetria di centro l'origine* O *in* $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.
Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $Q(2,-3,1)$.

Soluzione. In base alla Definizione 2.2.15, la simmetria φ di centro l'origine è l'omotetia di rapporto -1 e centro l'origine ed è dunque definita da $\varphi(Q) = O -\ \mathbf{OQ}$. L'immagine di Q è quindi data da:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova $\varphi(Q) = (-2, 3, -1)$. □

Problema 2.10. Simmetria *Determinare l'immagine del punto* $Q(x_1, x_2, x_3)$ *tramite la simmetria di centro* $C(7,-6,11)$ *in* $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.
Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando $Q(2,-3,1)$.

Soluzione. In base alla Definizione 2.2.15, la simmetria φ di centro C è l'omotetia di rapporto -1 e centro C ed è dunque definita da $\varphi(Q) = C -\ \mathbf{CQ}$. L'iimagine di Q è quindi data da:

$$\varphi(Q) = C -\ \mathbf{CQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - 7 \\ x_2 + 6 \\ x_3 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 14 \\ -x_2 - 12 \\ -x_3 - 22 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova $\varphi(Q) = (12, -9, -23)$. □

Problema 2.11. *In* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ *siano fissate le rette* r_1 *di equazione* $3x_1 + x_2 = 0$ *e* r_2 *di equazione* $x_1 - x_2 + 4 = 0$.
a) Determinare un riferimento $\mathcal{R}'$ *di coordinate* (x'_1, x'_2) *nel quale le rette* r_1 *ed* r_2 *abbiano equazioni* $x_2 = 0$ *e* $x_1 = 0$ *ripettivamente.*
b) Determinare il cambio di coordinate dal riferimento $\mathcal{R}$ *al riferimento* $\mathcal{R}'$ *scelto al punto precedente.*

Soluzione. a) In base alle richieste, le rette r_1 e r_2 formano gli assi del riferimento $\mathcal{R}'$; in particolare, la loro intersezione $Q_0(-1,3)$ deve essere l'origine di $\mathcal{R}'$. Inoltre, se denotiamo con $R' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ il riferimento di $\mathcal{V}^2_{\mathbb{C}}$ associato a $\mathcal{R}'$, il vettore $\mathbf{w}_1$ deve essere parallelo alla retta r_1 e il vettore $\mathbf{w}_2$ deve essere parallelo alla retta r_2: inoltre, ogni riferimento R' con tali proprietà conduce ad un riferimento $\mathcal{R}' = (Q_0, R')$ che soddisfa le richieste.

Scelto un punto $Q_1 \neq Q_0$ in r_1, il vettore $\mathbf{w_1} = \mathbf{Q_0Q_1}$ soddisferà le richieste; per $Q_1(0,0)$ si ricava il vettore $\mathbf{w_1}$ di componenti $(1,-3)$. Analogamente, scelto $Q_2(0,4) \neq Q_0$ in r_2, il vettore $\mathbf{w_2} = \mathbf{Q_0Q_2}$ di componenti $(1,1)$ risulta parallelo ad r_2. Poichè $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w}_2$ sono linearmente indipendenti, il riferimento $\mathcal{R}' = (Q_0, R'(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ soddisfa le richieste.
b) Ora si può procedere come nel Problema **??**, determinando le equazioni dell'affinità φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ $(i = 0,1,2)$, ove $P_0(0,0)$ sia l'origine, $P_1(1,0)$ e $P_2(0,1)$ siano i punti unità di $\mathcal{R}$. Il cambio di coordinate da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ ha equazioni $(x'_1, x'_2) = (x_1 + 4x_2 - 1, -3x_1 + 3)$.

□

Esercizi

2.1. Determinare l'immagine del punto $P(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ tramite la traslazione di vettore $\mathbf{v} = (-4,7,3)$.

2.2. Determinare l'immagine del punto $P(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. tramite l'omotetia $\varphi : \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ di centro $C(2,-4,8)$ e rapporto 6.

2.3. Determinare l'immagine del punto $P(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. tramite la simmetria $\varphi : \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ di centro l'origine.

2.4. Determinare l'immagine del punto $P(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. tramite la simmetria $\varphi : \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ di centro $C(3,-11,45)$.

2.5. Determinare le coordinate del punto medio di $A(2,-7,15)$ e $B(12,5,-13)$ in $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.

2.6. Si consideri il punto $P(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{E}_{\mathbb{C}}$. Determinare le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q,R)$, ove $Q(-6,12,1)$, $R = (\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (1,0,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$.

2.7. Si consideri il punto $P(2,-1,5) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$. Determinare le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q,R)$, ove $Q(1,5,-2)$, $R = (\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,-1,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,-1))$.

2.8. Determinare il vettore delle coordinate di $(2,-1,5) \in \mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$ nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (P,R)$, ove $P(0,1,1)$ e $R = (\mathbf{v}_1 = (2,3,0), \mathbf{v}_2 = (4,0,3), \mathbf{v}_3 = (-1,0,0))$.

2.9. Si consideri la circonferenza γ di equazione $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x^2 + 9 = 0$. Scrivere l'equazione della circonferenza ottenuta traslando γ di passo $(4,6)$.

2.10. Discutere se il cambio di riferimento $x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y + 6 - 2i$, $y' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y + 2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.

3.4 È un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali, perché il riferimento di partenza è ortonormale e la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ di cambio nello spazio dei vettori risulta essere ortogonale.

2.11. Determinare le equazioni dell'omotetia ω di centro $C(-3,2)$ e rapporto 4.

2.12. Nel piano euclideo, sia assegnato un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$.
Sia φ la rotazione antioraria attorno all'origine di angolo $\pi/4$.
a) Determinare l'equazione cartesiana di φ.
b) Determinare equazioni parametriche dell'immagine tramite φ della retta r per $C(-1, 1+i)$ e parallela a $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + (3+i)\mathbf{v}_2$.
c) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta s ortogonale ad r e passante per $S(2,1)$.

2.13. Sia $P(3,0)$. Determinare le equazioni di una rotazione φ antioraria attorno all'origine tale che, si abbia che $\varphi(P)$ appartenga alla retta s di equazione $3x_1 - 2x_1 = 0$. La rotazione φ è unica?

2.14. Si considerino la retta r di equazione $2x_1 - x_2 + 1 = 0$ e la retta s di equazione $x_1 - x_2 = 0$.

2.15. Determinare, se esiste una rotazione φ (discutendone il centro) tale che l'immagine di r sia s.

2.16. Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$.
Sia assegnata l'affinità $\varphi : \mathbb{E}_{\mathbf{C}} \to \mathbb{E}_{\mathbf{C}}$ di equazioni $\varphi(x,y) = (3x - y + 1, 2x + y)$.
a) Determinare l'immagine del punto $P(2,5)$.
b) Determinare equazione parametrica per l'immagine della retta r per P e parallela a $\mathbf{v} = (3,4)$.
c) Determinare equazione cartesiana per l'immagine della retta r di equazione $2x + 3y - 1 = 0$.

2.17. Determinare le equazioni della traslazione di vettore $\mathbf{v} = (3,-2)$.

2.18. a) Determinare le equazioni dell'omotetia di centro l'origine e rapporto 3.
b) Determinare le equazioni dell'omotetia di centro $C(3,-4)$ e rapporto 2.

2.19. Determinare le equazioni dell'affinità φ del piano in se stesso, tale che $\varphi(0,0) = (1,7)$, $\varphi(1,0) = (2,1)$, $\varphi(0,1) = (0,-1)$. Tale affinità è unica? è invertibile?

2.20. Si considerino i punti $P_0(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(0,1)$, $Q_1(3,1)$, $Q_2(1,1)$. Determinare le equazioni di una trasformazione affine φ del piano tale che $\varphi(P_0) = P_0$, $\varphi(P_1) = Q_1$, $\varphi(P_2) = Q_2$.

2.21. Si considerino i punti $P_0(0,0)$, $P_1(1,2)$, $P_2(4,-2)$, $Q_0(1,0)$, $Q_1(3,1)$, $Q_2(1,1)$. Determinare le equazioni di una trasformazione affine φ del piano tale che $\varphi(P_0) = Q_0$, $\varphi(P_1) = Q_1$, $\varphi(P_2) = Q_2$.

Complementi

2.4 Affinità e punti uniti.

a) Affinità del piano: punti uniti e rette unite. Sia $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una affinità del piano euclideo $\mathbb{A}$. Fissato un riferimento per $\mathbb{A}$, l'affinità ammette equazioni della forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Un punto $P(\mathbf{x})$ è unito per φ se e solo se $\varphi(P) = P$, cioè se e solo se le sue coordinate $\mathbf{x}$ sono soluzione del sistema lineare

$$(I - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{c}, \tag{2.34}$$

ove si sia indicata con I la matrice identica di ordine 2. Se $\mathbf{B} = I - \mathbf{A}$ ha determinante non nullo, il sistema (2.34) ammette una unica soluzione, $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}$, e l'affinità φ ammette un unico punto unito.

Se invece il determinante di $\mathbf{B} = I - \mathbf{A}$ è nullo (cioè 1 è autovalore per la matrice $\mathbf{A}$), il sistema (2.34) può risultare incompatibile. Se il sistema è compatibile, cioè φ ammette punti uniti, l'insieme di tutti i punti uniti di φ costituisce un sottospazio affine.

Esempi

1) $n = 1$: una affinità $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, di equazione $y = ax + c$, ammette un punto unito $P(x)$ se e solo se il sistema $(1 - a)x = c$ è compatibile. Se $a \neq 1$, φ ammette un unico punto unito, di coordinata $x = \frac{c}{1-a}$. Se invece $a = 1$ occorre distinguere i casi $c \neq 0$ e $c = 0$. Se $a = 1$, $c \neq 0$ il sistema non ammette soluzione e φ non ha punti uniti (e infatti φ è una traslazione non identica). Se invece $a = 1$ e $c = 0$, φ è l'identità e tutti i punti sono uniti.
2) Nel piano euclideo, sia assegnata l'affinità φ di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 1 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Il sistema che caratterizza i punti uniti di φ è il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 - 1 \\ x_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

che ammette $(x_1, x_2) = (1, 1)$ come unica soluzione. Il punto $(1, 1)$ è dunque l'unico punto unito per φ.
3) Nel piano euclideo, sia assegnata l'affinità φ di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 = -3x_1 + 10\,x_2 \end{cases}.$$

Il sistema che caratterizza i punti uniti di φ è il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 = -3x_1 + 10\,x_2 \end{cases}$$

che equivale al sistema formato dalla sola equazione $x_1 = 3x_2$. L'affinità φ ammette dunque una retta interamente formata da punti uniti.

In generale, se una affinità φ ammette un punto unito P, le sue equazioni si semplificano se si considera il punto unito P come origine del riferimento.

Definizione 2.4.1. Una affinità φ del piano che ammette una retta r di punti uniti si dice *affinità omologica*, e la retta r è detta *retta omologica*.

In un riferimento in cui la retta omologica sia l'asse x, una affinità omologica è rappresentata da equazioni particolarmente semplici. Infatti, imponendo alle equazioni generiche

$$\begin{cases} x' = a\,x \,+\, b\,y + c \\ y' = a'\,x \,+\, b'\,y + c' \end{cases}$$

che sia $\varphi(x, 0) = (x, 0)\ \forall\, x$, si vede che $c = c' = 0$, $a = 1$, $a' = 0$. Le equazioni di φ hanno dunque la forma:

$$\begin{cases} x' = x + b\,y \\ y' = \qquad b'\,y \end{cases}. \tag{2.35}$$

In particolare, la direzione del vettore $\varphi(P) - P$ non dipende dalla scelta del punto P esterno alla retta omologica:

$$\varphi(P) - P = (x\, + b\,y, b'\,y) - (x, y) = \,y\,(b, b' - 1).$$

Il vettore che congiunge un punto non unito con il suo trasformato ha dunque direzione fissa parallela al vettore $(b, b' - 1)$. Il caso $b = 0$, $b' = 1$ corrisponde all'identità e verrà escluso nel seguito.

Le equazioni (2.35) di una affinità omologica φ, permettono di studiare l'esistenza di rette s, diverse dalla retta omologica, che vengono complessivamente mutate in se stesse da φ, cioè $\varphi(s) = s$. Si osservi che ciò non implica necessariamente che s sia formata da punti uniti (anzi, sappiamo che r è l'unica retta di punti uniti se φ non è l'identità). Se $\varphi(s) = s$, diciamo che la retta s è *unita* per φ.

Una retta s è unita per φ se e solo se è unita per la sua inversa φ^{-1}. Se s ha equazione cartesiana $\alpha\,x' + \beta\,y' + \gamma = 0$, l'equazione di $\varphi^{-1}(s)$ è data da: $\alpha\,(x\, + b\,y) + \beta\,b'\,y + \gamma = 0$, cioè da $\alpha\,x\, + (\alpha b + \beta\,b')\,y + \gamma = 0$. La retta s è dunque unita se e solo se $\beta = \alpha\,b + \beta\,b'$ e dunque dall'annullarsi del determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & b' - 1 \end{pmatrix}.$$

Le rette (tranne al più la retta omologica) fisse per φ sono tutte e solo le rette parallele al vettore $(b, b' - 1)$ e formano un fascio improprio. Se $b' = 1$, le rette fisse sono tutte parallele alla retta omologica; in tal caso, φ è detta *scaling di rapporto* b ed ha equazioni $x' = x+by, y' = y$. Se invece $b' \neq 1$, ogni retta fissa $s \neq r$ interseca la retta omologica r in un punto, necessariamente fisso per φ. Tale punto di intersezione con r è l'unico punto unito su s. La retta s ha equazioni parametriche $x = x_0 + t\,b, y = t\,(b'-1)$ e un suo punto $P(x,y)$ viene trasformato da φ nel punto $\varphi(P) = (x,y)+y(b,b'-1) = (x_0+t\ bb', t\,b'(b'-1))$. Se $b' = -1$, il punto medio tra P e $\varphi(P)$ è il punto fisso $(x_0, 0)$: φ è in tal caso la *simmetria rispetto alla retta r nella direzione parallela al vettore (b,-2)*; si osservi che ogni direzione non parallela alla retta omologica r è rappresentata da un vettore della forma $(d,-2)$ e la simmetria rispetto a r lungo una qualsiasi direzione non parallela a r è una affinità omologica.

Torniamo, più in generale, al caso $b' \neq 1$: in un sistema di riferimento in cui l'asse y sia parallelo alla direzione delle rette fisse, l'affinità omologica φ assume equazioni della forma: $x' = x, y' = b'y$ e dunque $b = 0$. Se infine, $b = 0$, $b' = -1$, l'affinità φ è la simmetria $(x,y) \mapsto (x,-y)$ rispetto alla retta omologica. In generale, in un piano euclideo, la simmetria ortogonale rispetto ad una retta r è una affinità omologica, avente r come retta omologica.

Esempio 2.4.2. Si vogliono scrivere le equazioni della simmetria piana φ rispetto alla retta r di equazione $3x+2y+1 = 0$, secondo la direzione della retta s di equazione $x = y$. La retta s è parallela al vettore $(1,1)$. L'immagine del punto $P(\xi,\eta)$ è il punto $P'(\xi',\eta')$, sulla retta r_P per P e parallela a s, tale che il punto medio tra P e P' sia l'intersezione tra r e r_P. La retta r_P per P e parallela ad s ha equazioni parametriche: $x = \xi + t, y = \eta + t$. L'intersezione tra r_P e r corrisponde al valore $t_0 = -\frac{3\xi+2\eta+1}{5}$ del parametro. Il punto P' è dunque $P' = P + 2t_0(1,1)$ e φ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x - 2\frac{3x+2y+1}{5} = \frac{-x-4y-2}{5} \\ y' = y - 2\frac{3x+2y+1}{5} = \frac{-6x-3y-2}{5} \end{cases}.$$

Esempio 2.4.3. Si consideri l'affinità $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Si vogliono determinare le rette unite per φ, cioè le rette r tali che $\varphi(r) = r$. Poiché φ è un isomorfismo, è equivalente controllare che $\varphi^{-1}(r)$. Fissata una retta r di equazione cartesiana $ax' + by' + c = 0$, l'equazione di $\varphi^{-1}(r)$ è data da $a\,(x+y-1) + b\,(2x-y) + c = (a+2b)\,x + (a-b)\,y + c - a = 0$. La retta $\varphi^{-1}(r)$ coincide con r (e dunque r è unita) se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+2b & a-b & c-a \end{pmatrix} = 1.$$

Se $a = 0$, deve essere necessariamente $b \neq 0$, perché r è una retta, e la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2b & -b & c \end{pmatrix}$$

che ha sempre rango 2, per ogni valore non nullo di b. Dunque, se $a = 0$, la retta r non è unita per φ.

Se invece $a \neq 0$, possiamo supporre $a = 1$ (moltiplicando eventualmente l'equazione per una costante); la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1+2b & 1-b & c-1 \end{pmatrix};$$

per il teorema degli orlati, essa ha rango 1 se e solo se b e c risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 1 - b - b\,(1+2b) = 0 \\ c - 1 - c\,(1+2b) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2b^2 + 2b - 1 = 0 \\ c = -\frac{1}{2b} \end{cases}.$$

Esistono dunque solo due rette unite, corrispondenti ai valori $b_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Poiché tali rette non sono parallele tra loro, il punto di intersezione deve essere un punto unito per φ.

b) Iperpiani uniti per una affinità.

Sia assegnata una affinità $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, di equazioni $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, che sia un isomorfismo. Un iperpiano π di $\mathbf{A}^n$ si dice unito per φ se e solo se $\varphi(\pi) = \pi$ o, equivalentemente, se $\varphi^{-1}(\pi) = \pi$.

Sia $a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + \ldots + a_n\,y_n + c = 0$ l'equazione cartesiana di π, che può essere scritta in forma compatta $\mathbf{a}\,\mathbf{y} + c = 0$ introducendo il vettore $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. L'equazione di $\varphi^{-1}(\pi)$ è data da:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}) + c = (\mathbf{a}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + c = 0.$$

L'iperpiano π è unito per φ se e solo se esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{a}\,\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\,\mathbf{b} + c = \lambda c. \end{cases};$$

La prima equazione può essere riletta come $\mathbf{A}^t\,\mathbf{a}^t = \lambda\mathbf{a}^t$ e mostra che, affinché l'iperpiano sia unito, occorre che $\mathbf{a}$ sia un autovettore per $\mathbf{A}$ (si ricordi che $\mathbf{a}$ è sicuramente non nullo). D'altra parte, se $\mathbf{a}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$, di autovalore λ, occore distinguere i casi $\lambda = 1$ e $\lambda \neq 1$. Se $\lambda \neq 1$, e si sceglie $c = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{\lambda-1}$ risulta individuato un iperpiano unito per φ. Per un fissato autovalore $\lambda \neq 1$, tali iperpiani sono dunque parametrizzati dagli autovettori di $\mathbf{A}$ di autovalore λ, che formano un sottospazio (privato dell'origine) di dimensione pari alla molteplicità geometrica di λ.

Se invece $\lambda = 1$ e $\mathbf{a}$ è autovettore di $\mathbf{A}$ autovalore 1, il sistema (*2.4*) ammette soluzione se e solo se $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 0$, e, in tal caso, ogni scelta per c fornisce una soluzione. L'autovettore $\mathbf{a}$ individua, in tal caso, un fascio improprio di iperpiani uniti.