

---

## Affinità e cambiamenti di riferimento

### 3.1 Generalità sulle affinità

Ora che abbiamo introdotto gli spazi con i quali lavoreremo, selezioniamo le applicazioni da considerare tra di essi:

**Definizione 3.1.1.** Siano  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  spazi affini sullo stesso campo  $\mathbb{K}$ . Una applicazione  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  si dice una *affinità* di  $\mathbb{A}$  in  $\mathbb{A}'$  se esiste una applicazione lineare

$$\varphi_l : \mathbf{V}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbb{A}')$$

tale che per ogni coppia di punti  $P, Q$  di  $\mathbb{A}$  valga la relazione:

$$\varphi(\mathbf{Q}) - \varphi(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \quad (3.1)$$

ossia:

$$\varphi(\mathbf{P})\varphi(\mathbf{Q}) = \varphi_l(\mathbf{PQ}). \quad (3.2)$$

Ciò significa che per ogni punto  $P \in \mathbb{A}$  e per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$  si ha:

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{v}) \quad (3.3)$$

e che l'applicazione  $\varphi_l$  (se esiste) è unica.

**Definizione 3.1.2.** L'applicazione  $\varphi_l$  viene detta l'*applicazione lineare associata all'affinità*  $\varphi$ . Se  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  ha dimensione finita, il rango di  $\varphi_l$  si dice anche *rango* di  $\varphi$  e si denota col simbolo

$$\text{rg}(\varphi).$$

Talora, con abuso di notazione, indicheremo con lo stesso simbolo  $\varphi$  e  $\varphi_l$ .

*Esempio 3.1.3. Le affinità di rango 0* Sia  $O$  un punto di  $\mathbb{A}'$  e si consideri l'applicazione costante  $\varphi_O : P(\in \mathbb{A}) \rightarrow O \in \mathbb{A}'$ . Questa è una affinità la cui

applicazione lineare associata è l'applicazione lineare nulla di  $\mathbf{V}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbb{A}')$ . Pertanto  $\text{rg}(\varphi_O) = 0$ .

Viceversa se  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  ha rango 0, l'applicazione  $\varphi_l$  è l'applicazione nulla e  $\varphi$  è costante. Infatti per ogni coppia  $(P, Q)$  di punti di  $\mathbb{A}$  si ha  $\varphi(Q) - \varphi(P) = \varphi_l(Q - P) = \mathbf{0}$ , sicchè  $\varphi(P) = \varphi(Q)$ .

Dunque, *le applicazioni costanti sono tutte e sole le affinità di rango 0*.

**Esempio 3.1.4. L'affinità identica** Sia  $\mathbb{A}$  uno spazio affine su un campo  $\mathbb{K}$ . L'applicazione identica  $\iota_{\mathbb{A}}$  di  $\mathbb{A}$  in sè è una affinità, la cui applicazione lineare associata è l'applicazione identica di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ .

La seguente proposizione suggerisce come costruire una affinità e mostra che ogni affinità può essere costruita in tal modo:

**Proposizione 3.1.5.** *Siano  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  spazi affini sul campo  $\mathbb{K}$ . Dati due punti  $P \in \mathbb{A}$  e  $P' \in \mathbb{A}'$  e data una applicazione lineare  $\psi : \mathbf{V}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbb{A}')$ , esiste una ed una sola affinità  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tale che  $\varphi(P) = P'$  e  $\varphi_l = \psi$ .*

*Dimostrazione.* Se una tale affinità esiste, allora per ogni punto  $Q$  di  $\mathbb{A}$  deve accadere che:

$$\varphi(Q) = \varphi(P) + \psi(\mathbf{PQ}) = P' + \psi(\mathbf{PQ}). \quad (3.4)$$

Dunque  $\varphi$  deve necessariamente coincidere con l'applicazione

$$\varphi : Q \in \mathbb{A} \mapsto P' + \psi(\mathbf{PQ}).$$

Per provare la proposizione, basta mostrare che la  $\varphi$  così definita è una affinità. Siano  $Q$  ed  $S$  punti arbitrari di  $\mathbb{A}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(Q) - \varphi(S) &= (P' + \psi(\mathbf{PQ})) - (P' + \psi(\mathbf{PS})) = \\ &= (\mathbf{P}' - \mathbf{P}') + (\psi(\mathbf{PQ}) - \psi(\mathbf{PS})) = \psi(\mathbf{PQ}) - \psi(\mathbf{PS}) = \\ &= \psi(\mathbf{PQ} - \mathbf{PS}) = \psi(\mathbf{SQ}) \end{aligned}$$

e ciò prova l'asserto. □

**Definizione 3.1.6.** Un punto  $P$  di  $\mathbb{A}$  tale che  $\varphi(P) = P$  è detto *punto fisso* o *punto unito* per l'affinità  $\varphi$ .

**Esempio 3.1.7. Affinità di uno spazio affine in sè** Per la Proposizione 3.1.5 appena dimostrata, l'applicazione identica di uno spazio affine  $\mathbb{A}$  è l'unica affinità che ammette almeno un punto fisso e la cui applicazione lineare associata sia identica. Più in generale, sia  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità in  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ . Fissiamo un punto  $P$  di  $\mathbb{A}$  e poniamo  $\varphi(P) - P = \mathbf{v}$ . Poiché l'applicazione lineare associata a  $\varphi$  è l'identità, per ogni punto  $Q$  di  $\mathbb{A}$  si ha  $\varphi(Q) - \varphi(P) = Q - P$  e quindi  $\varphi(Q) - Q = \varphi(P) - P = \mathbf{v}$ . In particolare, il vettore  $\mathbf{v}$  non dipende dalla scelta del punto  $P$ , ma solo dall'affinità  $\varphi$ , che viene detta *traslazione* di vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$  e si denota col simbolo  $\tau_{\mathbf{v}}$ . Per quanto visto, si ha:

**Definizione 3.1.8.** La *traslazione* di vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$  è l'affinità  $\tau_{\mathbf{v}}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  definita da

$$\tau_{\mathbf{v}}(Q) = Q + \mathbf{v} \text{ per ogni } Q \in \mathbb{A}. \quad (3.5)$$

*Osservazione 3.1.9.* Le traslazioni sono tutte e sole le affinità la cui applicazione lineare associata sia l'identità.

Si rimanda all'Esercizio Svolto 3.2 per un esempio.

Consideriamo ora una affinità  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  che fissa un punto  $P$  e la cui applicazione lineare associata sia una omotetia  $\omega_{\lambda}$  di rapporto  $\lambda \in \mathbb{K}$  in  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ , cioè la moltiplicazione per uno scalare  $\lambda$  fissato:  $\omega_{\lambda}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$ .

Per ogni punto  $Q = P + \mathbf{v}$  di  $\mathbb{A}$  si ha:  $\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{v}$  e una tale affinità si dice *omotetia* di  $\mathbb{A}$  di *centro*  $P$  e *rapporto*  $\lambda$ . Più in generale:

**Definizione 3.1.10.** Una affinità  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  si dice *omotetia* di  $\mathbb{A}$  di *centro*  $P$  e *rapporto*  $\lambda$  se per ogni punto  $Q$  di  $\mathbb{A}$ , scritto come  $Q = P + \mathbf{v}$ , si ha:

$$\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{v} \quad (3.6)$$

Esplicitamente, si deve avere  $\varphi(Q) = P + \lambda\mathbf{PQ}$ , per ogni  $Q \in \mathbb{A}$ . Una omotetia di rapporto  $\lambda$  viene spesso indicata con il simbolo  $\omega_{\lambda}$ .

Si rimanda all'Esercizio Svolto 3.3 per un esempio.

In particolare, l'omotetia di centro  $P$  e rapporto 1 è l'identità, mentre quella di centro  $P$  e rapporto  $-1$  prende il nome di *simmetria*:

**Definizione 3.1.11.** L'omotetia di centro  $P$  e rapporto  $-1$  è detta *simmetria* di  $\mathbb{A}$  rispetto a  $P$  (o di *centro*  $P$ ) e verifica

$$\varphi(P + \mathbf{v}) = P - \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}. \quad (3.7)$$

Il nome è giustificato dal fatto che la simmetria di centro  $P$  associa ad ogni punto  $Q$  il punto  $\varphi(Q) = Q'$  tale  $\mathbf{Q}' - \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ , in modo che  $P$  sia il punto medio tra  $Q$  e  $\varphi(Q)$  ricordando la definizione:

**Definizione 3.1.12.** Un punto  $M$  tale  $\mathbf{P} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{Q}$  si dice il *punto medio* del segmento  $PQ$ ; i punti  $P$  e  $Q$  si dicono *simmetrici* rispetto a  $M$ .

Se  $P$  e  $Q$  hanno in un riferimento  $\mathcal{R}$  coordinate  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  rispettivamente, allora le coordinate  $\mathbf{m}$  di  $M$  in  $\mathcal{R}$  sono date da:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (3.8)$$

Si rimanda agli Esercizi Svolti 3.4 - 3.6 per esempi.

## 3.2 Isomorfismi tra spazi affini e riferimenti

**Proposizione 3.2.1.** Sia  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una affinità tra spazi affini su un campo  $\mathbb{K}$ . L'affinità  $\varphi$  è biettiva se e solo se l'applicazione lineare associata  $\varphi_l$  è biettiva (cioè è un isomorfismo). In tal caso anche l'applicazione inversa  $\varphi^{-1}: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$  è una affinità e l'applicazione lineare ad essa associata è  $\varphi_l^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Se  $P$  e  $Q$  sono due punti di  $\mathbb{A}$ , sappiamo che

$$\varphi(\mathbf{Q}) - \varphi(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{Q} - \mathbf{P}).$$

In particolare,  $P$  e  $Q$  hanno la stessa immagine se e solo se il vettore  $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$  appartiene al nucleo di  $\varphi_l$ : dunque  $\varphi$  è iniettiva se e solo se  $\varphi_l$  è iniettiva.

Si lascia per esercizio la conclusione della dimostrazione.  $\square$

**Definizione 3.2.2.** Una affinità biettiva si dice un *isomorfismo* e due spazi affini legati da un isomorfismo si dicono *isomorfi*.

Mostriamo innanzitutto che l'immagine di un sottospazio rispetto ad una affinità è ancora un sottospazio e che gli isomorfismi conservano la dimensione:

**Proposizione 3.2.3.** Sia  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una affinità tra spazi affini su un campo  $\mathbb{K}$ , siano  $S$  un sottospazio di  $\mathbb{A}$  e  $S'$  un sottospazio di  $\mathbb{A}'$ .

i)  $\varphi(S)$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{A}'$  mentre l'antiimmagine  $\varphi^{-1}(S')$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{A}$ .

ii) Se  $S = P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_m$ , allora  $\varphi(S) = \varphi(P_0) \vee \varphi(P_1) \vee \cdots \vee \varphi(P_m)$ .

iii) Se  $S$  ha dimensione finita, anche  $\varphi(S)$  ha dimensione finita e si ha

$$\dim S \geq \dim \varphi(S).$$

iv) Se  $\varphi$  è un isomorfismo si ha  $\dim S = \dim \varphi(S)$ .

*Dimostrazione.* Se  $S = P + \mathbf{W}$ , si ha che  $\varphi(S) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{W})$  (perché?). Da ciò seguono subito tutti gli asserti.  $\square$

Nel seguito studieremo le proprietà degli spazi affini che si conservano per isomorfismi (o, come si dice, “a meno di isomorfismo”). Ciò costituisce l'oggetto della *geometria affine*. Da questo punto di vista, il primo risultato importante è che, in analogia a quanto vero per gli spazi vettoriali, due spazi affini di dimensione finita sullo stesso campo  $\mathbb{K}$  sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione; ci si può quindi limitare allo studio di spazi affini assai particolari:

**Teorema 3.2.4.** Ogni spazio affine  $\mathbb{A}$  su un campo  $\mathbb{K}$  è isomorfo allo spazio affine canonicamente associato allo spazio vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $O$  un punto di  $\mathbb{A}$ . In virtù della proposizione 3.1.5, l'applicazione  $g_O : \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{A}) \rightarrow O + \mathbf{v} \in \mathbb{A}$  è l'unica affinità che manda  $\mathbf{0}$  in  $O$  e la cui applicazione lineare associata sia l'identità. Per la proposizione 3.2.1 essa è un isomorfismo.  $\square$

**Teorema 3.2.5.** Siano  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$  spazi vettoriali sul campo  $\mathbb{K}$ . Essi sono isomorfi come spazi affini se e solo se lo sono come spazi vettoriali.

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla proposizione 3.1.5.  $\square$

In conseguenza dei due precedenti teoremi, abbiamo il:

**Corollario 3.2.6.** *Ogni spazio affine  $\mathbb{A}$  di dimensione  $n$  sul campo  $\mathbb{K}$  è isomorfo allo spazio affine numerico  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  su  $\mathbb{K}$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema 3.2.4 lo spazio affine  $\mathbb{A}$  è isomorfo allo spazio affine canonicamente associato a  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ , che a sua volta, per il teorema 3.2.5, è isomorfo a  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ , che è lo spazio affine canonicamente associato a  $\mathbb{K}^n$ , poiché  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  è isomorfo a  $\mathbb{K}^n$ .  $\square$

*Osservazione 3.2.7.* Rileggendo il paragrafo 1.6 del capitolo 1, un isomorfismo esplicito  $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}$  è dato da un sistema di coordinate affini associato ad un riferimento cartesiano affine. Per la definizione 1.5.1, un *riferimento (cartesiano) affine* di  $\mathbb{A}$  è una coppia  $\mathcal{R} = (O, R)$ , ove  $O \in \mathbb{A}$  e  $R$  è un riferimento di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ . Per costruire l'isomorfismo cercato, occorre dare un isomorfismo lineare di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  con  $\mathbb{K}^n$ , ottenuto assegnando un riferimento (cioè una base ordinata)  $R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ . Poi si dà un isomorfismo di  $\mathbb{A}$  con  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ , assegnando un punto  $O \in \mathbb{A}$ , come nella dimostrazione del teorema 3.2.4. L'isomorfismo  $\varphi$  cercato è definito da:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{A} \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto O + (x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

e prende anche il nome di *sistema di coordinate (affini) associato al riferimento affine  $\mathcal{R}$* . Per quanto osservato, il dato di un riferimento affine individua univocamente una applicazione  $\varphi$  come in (3.9).

### 3.3 Composizione di affinità e gruppo affine.

Cominciamo con la seguente:

**Proposizione 3.3.1.** *Siano  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A}'$ ,  $\mathbb{A}''$  spazi affini sullo stesso campo  $\mathbb{K}$  e siano  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  e  $\varphi' : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$  affinità. Allora  $\varphi' \circ \varphi$  è una affinità e  $(\varphi' \circ \varphi)_l = \varphi'_l \circ \varphi_l$ . In particolare se  $\varphi$  e  $\varphi'$  sono isomorfismi anche  $\varphi' \circ \varphi$  lo è.*

*Dimostrazione.* Siano  $P$  e  $Q$  punti di  $\mathbb{A}$ . Si ha

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)(P) - (\varphi' \circ \varphi)(Q) &= \varphi'(\varphi(P)) - \varphi'(\varphi(Q)) = \\ &= \varphi'_l(\varphi(\mathbf{P}) - \varphi(\mathbf{Q})) = \varphi'_l(\varphi_l(P - Q)) = (\varphi'_l \circ \varphi_l)(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

il che prova la prima parte dell'asserto. Il resto segue dalla proposizione 3.1.5.  $\square$

In particolare, componendo affinità di uno spazio affine  $\mathbb{A}$  in sè si ottengono ancora affinità di  $\mathbb{A}$  in sè e componendo isomorfismi di  $\mathbb{A}$  in sè si ottengono ancora isomorfismi di  $\mathbb{A}$  in sè. Nell'insieme  $\mathbf{End}(\mathbb{A})$  delle affinità di  $\mathbb{A}$  in sè, la legge di composizione

$$\begin{aligned} \circ : \mathbf{End}(\mathbb{A}) \times \mathbf{End}(\mathbb{A}) &\rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{A}) \\ (\varphi', \varphi) &\mapsto \varphi' \circ \varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

è una operazione associativa. Se si restringe questa operazione al sottoinsieme  $\mathbf{Aff}(\mathbb{A})$  degli isomorfismi di  $\mathbb{A}$  in sè, si ottiene un gruppo (in generale non commutativo) che si dice *gruppo affine di  $\mathbb{A}$* .

Se  $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  è un isomorfismo, possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{End}(\mathbb{A}) &\rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{A}') \\ \varphi &\mapsto \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}. \end{aligned}$$

L'applicazione  $\Psi$  è chiaramente biettiva, con inversa

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \mathbf{End}(\mathbb{A}') &\rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{A}) \\ \varphi' &\mapsto \psi^{-1} \circ \varphi' \circ \psi, \end{aligned}$$

e, per ogni coppia  $(\varphi', \varphi) \in \mathbf{End}(\mathbb{A})$ , verifica

$$\Psi(\varphi \circ \varphi') = \psi \circ \varphi' \circ \varphi \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) = \Psi(\varphi') \circ \Psi(\varphi).$$

Poiché  $\psi$  è un isomorfismo e visto che

$$\Psi(\varphi)_l = (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})_l = \psi_l \circ \varphi_l \circ (\psi^{-1})_l,$$

risulta che  $\Psi(\varphi)$  è un isomorfismo se e solo se lo è  $\varphi$ ; più in generale, se  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  sono di dimensione finita,  $\varphi$  e  $\Psi(\varphi)$  hanno lo stesso rango, cioè  $\Psi$  conserva il rango delle affinità. Dunque  $\Psi$  induce una biezione

$$\Psi : \mathbf{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{Aff}(\mathbb{A}')$$

che è un isomorfismo.

Ai fini dello studio delle affinità, e in particolare del gruppo affine, è quindi possibile sostituire uno spazio affine  $\mathbb{A}$  con uno ad esso isomorfo. In particolare ogni spazio affine  $\mathbb{A}$  può essere sostituito con lo spazio affine associato allo spazio vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  e, se  $\mathbb{A}$  ha dimensione finita  $n$ , può essere sostituito con  $\mathbb{A}^n$ .

**Proposizione 3.3.2.** *Siano  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  spazi vettoriali sullo stesso campo  $\mathbb{K}$ . Una applicazione  $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  ed esiste un elemento  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$  tale che  $\varphi = \tau_{\mathbf{w}} \circ f$ ; in tal caso  $f = \varphi_l$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\varphi$  è una affinità, posto  $f = \varphi_l$  e  $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{0})$ , si ha, per ogni vettore  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{0}) + f(\mathbf{a}) = \mathbf{w} + f(\mathbf{a}) = (\tau_{\mathbf{w}} \circ f)(\mathbf{a}) \quad (3.12)$$

Il viceversa è lasciato per esercizio (vedi l'Esercizio svolto 3.1).  $\square$

In particolare  $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$  contiene  $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$  come sottogruppo, e contiene altres  tutte le traslazioni di  $\mathbf{V}$ . Notiamo anzi che l'insieme  $T(\mathbf{V})$  delle traslazioni di  $\mathbf{V}$  costituisce un sottogruppo di  $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$  isomorfo a  $(\mathbf{V}, +)$ , tramite l'isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &\rightarrow T(\mathbf{V}) \\ \mathbf{v} &\mapsto \tau_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Ogni elemento di  $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$  si scrive come prodotto di un elemento di  $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$  e di una traslazione. Ci  si esprime dicendo che  $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$    generato da  $\mathrm{GL}(\mathbf{V})$  e da  $T(\mathbf{V})$ .

### 3.4 Affinit  tra spazi affini numerici.

Sia  $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  una affinit  tra spazi affini numerici su un campo  $\mathbb{K}$  (i cui elementi vengono interpretati come vettori colonna su  $\mathbb{K}$ ). L'applicazione lineare associata  $\varphi_l : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$    individuata da una matrice  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$  di tipo  $(m, n)$  su  $\mathbb{K}$  tale che  $\varphi_l(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$    il vettore colonna  $(x_1, \dots, x_n)^t$ . Sia  $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_m)^t$ . In virt  della Proposizione 3.3.2, posto  $\varphi_l(\mathbf{0}) = \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^t$ , si ha

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}; \quad (3.13)$$

questa relazione viene detta *equazione matriciale della affinit *  $\varphi$ . Esplicitamente questa equazione si scrive

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + c_m \end{cases} \quad (3.14)$$

Se  $\varphi' : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^h$    una affinit  di equazione matriciale

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{d}$$

dove  $\mathbf{B}$    la matrice di tipo  $(h, m)$  su  $\mathbb{K}$  individuata da  $\varphi'_l$  e  $\mathbf{d} \in \mathbb{A}^h$    il vettore  $\varphi'(\mathbf{0})$ , allora  $\varphi' \circ \varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^h$  ha equazione matriciale data da

$$\mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{d} = \mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d})$$

Se poi  $n = m$  e la affinit   $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$    invertibile, per trovare l'equazione dell'affinit  inversa  $\varphi^{-1}$ , basta risolvere (3.14) come sistema lineare nelle incognite  $x_1, \dots, x_n$ , usando, ad esempio la regola di Cramer. Il risultato   che

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})$$

Torniamo a considerare una affinit   $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  di equazioni (3.13) o (3.14). Se  $S$    un sottospazio di  $\mathbb{A}^n$ , di dimensione  $h$ , per la Proposizione 3.2.3, anche  $S' = \varphi(S)$    un sottospazio affine di  $\mathbb{A}^m$ . Per determinarne le equazioni conviene procedere nel seguente modo (vedi il paragrafo 2.3 del Capitolo 2):

- (a) determinare  $h + 1$  punti  $P_0, \dots, P_h$  che generano  $S$ ; sappiamo quindi che i punti  $\varphi(P_0), \dots, \varphi(P_h)$  generano  $S'$  (ma non è detto che questi siano indipendenti come punti di  $\mathbb{A}^m$ );
- (b)  $S'$  ha dunque dimensione  $h' \leq h$  e si può determinare un sistema di  $h' + 1$  punti indipendenti contenuto in  $[\varphi(P_0), \dots, \varphi(P_h)]$ ; denotiamo con  $[Q_0, \dots, Q_{h'}]$  un tale sistema;
- (c) a partire dal sistema  $[Q_0, \dots, Q_{h'}]$  di punti indipendenti che generano  $S'$ , scriviamo le equazioni parametriche come in (2.12).

*Esempio 3.4.1.* Consideriamo l'affinità  $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  su  $\mathbb{R}$  di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - y \\ z' = x + 2y + 2 \end{cases}.$$

Determiniamo l'immagine tramite  $\varphi$  della retta  $r$  di equazione  $3x - 2y = 1$ . La retta  $r$  è generata dai punti  $P = (0, -1/2)$  e  $Q = (1/3, 0)$ ; l'immagine  $\varphi(r)$  è quindi generata dai punti  $\varphi(P) = (1/2, 1/2, 1)$  e  $\varphi(Q) = (5/3, 1/3, 7/3)$ . Poiché essi sono distinti (dunque indipendenti),  $\varphi(r)$  è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = 1/2 + t(7/6) \\ y' = 1/2 + t(1/6) \\ z' = 1 + t(4/3) \end{cases}$$

che si possono anche scrivere (cambiando per proporzionalità i numeri direttori di  $\varphi(r)$ )

$$\begin{cases} x' = 1/2 + 7t \\ y' = 1/2 + t \\ z' = 1 + 8t \end{cases}$$

Nel caso  $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  sia invertibile allora  $S'$  ha la stessa dimensione di  $S$ , e per scriverne le equazioni cartesiane, conoscendo quelle di  $S$ , si può procedere così. Sia

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

un sistema di equazioni di  $S$ . Un punto  $\mathbf{y} \in \mathbb{A}^n$  sta in  $S'$  se e solo se valgono contemporaneamente (3.13) e (3.15). Ricavando il vettore  $\mathbf{x}$  da (3.13), ossia scrivendo l'equazione matriciale della affinità inversa di  $\varphi$ , si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \quad (3.16)$$

e, sostituendo in (3.15), si ricavano le seguenti equazioni di  $S'$ :

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{d} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

*Esempio 3.4.2.* Consideriamo l'affinità di  $\mathbb{A}^2$  in sé di equazione

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

Essa è invertibile, in quanto il determinante della matrice dell'applicazione lineare associata è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

L'affinità inversa ha equazioni

$$\begin{cases} x = (x' + y' - 3)/2 \\ y = (-x' + y' - 1)/2 \end{cases}$$

come si vede risolvendo le equazioni di  $\varphi$  in  $x$  e  $y$ . La retta di equazione  $3x + 7y - 9 = 0$  viene pertanto trasformata da  $\varphi$  nella retta di equazione

$$\begin{aligned} 3[(x' + y' - 3)/2] + 7[(-x' + y' - 1)/2] - 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x' + y' - 3) + 7(-x' + y' - 1) - 18 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x' + 10y' - 34 &= 0 \Leftrightarrow \\ 2x' - 5y' + 17 &= 0 \end{aligned}$$

### 3.5 Riferimenti e affinità.

Siano  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  spazi affini su un campo  $\mathbb{K}$  di dimensioni rispettive  $n$  e  $m$  e sia  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una affinità. Supponiamo che in  $\mathbb{A}$  e in  $\mathbb{A}'$  siano assegnati riferimenti affini  $\mathcal{R} = (O, R)$  e  $\mathcal{R}' = (O', R')$ , rispettivamente. Ricordiamo che, per l'Osservazione 3.2.7, essi determinano degli isomorfismi  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$  e  $\psi' : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}'$ . Consideriamo l'affinità composta  $\psi'^{-1} \circ \varphi \circ \psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  e ne siano (3.13) o (3.14) le equazioni: dato il punto  $P$  di  $\mathbb{A}$ , avente in  $\mathcal{R}$  vettore delle coordinate  $\mathbf{x}$ , il punto  $Q = \varphi(P)$  ha in  $\mathcal{R}'$  vettore delle coordinate

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}. \quad (3.18)$$

In particolare  $\mathbf{c}$  è il vettore delle coordinate in  $\mathcal{R}'$  del punto immagine tramite  $\varphi$  dell'origine  $O$  di  $\mathcal{R}$ . Le (3.18) si dicono *equazioni della affinità  $\varphi$  nei riferimenti  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$* . Si noti che la matrice  $\mathbf{A}$  che appare in tali equazioni non è altro che la matrice di  $\varphi_l$  nei riferimenti  $R$  e  $R'$  di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  e  $\mathbf{V}(\mathbb{A}')$  rispettivamente. Naturalmente, si possono applicare a  $\varphi$  e alle sue equazioni in  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  tutte le considerazioni svolte nel paragrafo 3.18 in relazione ad affinità tra spazi affini numerici. In particolare si potranno trovare le equazioni in  $\mathcal{R}'$  dell'immagine tramite  $\varphi$  di un sottospazio di  $\mathbb{A}$  di cui siano note le equazioni in  $\mathcal{R}$ .

Supponiamo ora dati in  $\mathbb{A}$  due riferimenti  $\mathcal{R} = (O, R)$  e  $\mathcal{R}' = (O', R')$  e consideriamo le equazioni in  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  della affinità identica di  $\mathbb{A}$  in sè. Esse saranno del tipo (3.18), dove ora  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata d'ordine  $n$  su  $\mathbb{K}$  e  $\mathbf{c}$  è un vettore colonna d'ordine  $n$  su  $\mathbb{K}$ . Esplicitamente esse assumono la forma

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \quad (3.19)$$

e va osservato che, essendo l'affinità identica invertibile, la matrice  $\mathbf{A}$  è anche essa invertibile, ossia  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Le equazioni (3.19) possono essere interpretate nel senso che un punto  $P$  di  $\mathbb{A}$ , avente in  $\mathcal{R}$  vettore delle coordinate dato da  $\mathbf{x}$ , ha invece in  $\mathcal{R}'$  vettore delle coordinate dato da  $\mathbf{y}$ . In altre parole le (3.19) esprimono il cambiamento delle coordinate cartesiane di un punto di  $A$  quando si passa da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ . Per tale motivo esse prendono il nome di *formule del cambiamento del riferimento* nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ . Ad esempio  $\mathbf{c}$  è il vettore delle coordinate in  $\mathcal{R}'$  dell'origine  $O$  del riferimento  $\mathcal{R}$ . Si noti pure che la matrice  $\mathbf{A}$  è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $R$  a  $R'$  in  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ .

Le formule del cambiamento di riferimento inverso, ossia del passaggio da  $\mathcal{R}'$  a  $\mathcal{R}$ , si ottengono risolvendo le (3.19) in  $x_1, \dots, x_n$ . Esse sono pertanto date da  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c})$ . Ripetendo le considerazioni del paragrafo 3.4 non è difficile risolvere il problema di scrivere equazioni in  $\mathcal{R}'$  di un sottospazio di cui siano note le equazioni in  $\mathcal{R}$ .

E' pure vero (perché?) che date le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ , e quelle del cambiamento del riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}'$  a un terzo riferimento  $\mathcal{R}''$ , si possono ricavare le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}''$ .

*Esempio 3.5.1.* Se  $\mathcal{R} = (O, R)$  e  $\mathcal{R}' = (O', R')$ , cioè se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  differiscono solo per l'origine, le formule del cambiamento del riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  sono  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ , dove  $\mathbf{c}$  è il vettore delle coordinate in  $\mathcal{R}'$  di  $O$ . Infatti la matrice  $\mathbf{A}$  è quella identica, poiché è la matrice del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $R$  a  $R'$  in  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ . L'effetto del cambiamento di riferimento è allora una semplice traslazione delle coordinate. Per tale motivo  $\mathcal{R}$  si dice ottenuto da  $\mathcal{R}'$  mediante una traslazione dell'origine (di vettore  $O' - O$ ).

Se invece  $\mathcal{R} = (O, R)$  e  $\mathcal{R}' = (O, R')$  hanno la stessa origine, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  sono del tipo  $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{A}$  è la matrice della cambiamento di riferimento nel passaggio da  $R$  a  $R'$ .

In generale se  $\mathcal{R} = (O, R)$  e  $\mathcal{R}' = (O', R')$ , si può pensare di passare da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  passando prima da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'' = (O', R)$  e quindi con una semplice traslazione dell'origine del riferimento, e poi da  $\mathcal{R}''$  a  $\mathcal{R}'$ , e dunque lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento in  $V(A)$ . Ovvero si potrà prima passare da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}''' = (O, R')$  lasciando fissa l'origine e cambiando il riferimento di  $\mathbf{V}(\mathbb{A})$  e poi passare da  $\mathcal{R}'''$  a  $\mathcal{R}'$  trasladando l'origine (cf. anche la proposizione 3.3.2).

Tornando infine a considerare due spazi affini  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  su un campo  $\mathbb{K}$  e una affinità  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , possiamo introdurre in  $\mathbb{A}$  due riferimenti  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  e in  $\mathbb{A}'$  due riferimenti  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{S}'$ . Si possono allora considerare le equazioni di  $\varphi$  in  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  e quelle di  $\varphi$  in  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , nonché le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  e da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$ . Lasciamo per esercizio (si veda anche il n. 6 del capitolo 13 di [1]) il compito di trovare le relazioni che sussistono tra tali formule ed equazioni.

## Esercizi svolti

### ESEMPI DI AFFINITÀ

**Problema 3.1.** Siano  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  spazi vettoriali sul campo  $\mathbb{K}$ . Prova che una applicazione  $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  ed esiste un elemento  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$  tale che  $\varphi = \tau_{\mathbf{w}} \circ f$ , dove  $\tau_{\mathbf{w}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$  è la traslazione di vettore  $\mathbf{w}$  in  $\mathbf{W}$ . In tal caso  $f = \varphi_l$ .

*Soluzione.* Questo esercizio completa la dimostrazione della Proposizione 3.3.2. L'applicazione  $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  è una affinità se e solo se esiste una applicazione lineare  $\varphi_l$  tale che  $\varphi(\mathbf{Q})\varphi(\mathbf{P}) = \varphi_l(\mathbf{QP})$ , per ogni  $P, Q \in V$ . Poichè  $\mathbf{V}$  è uno spazio vettoriale, posso equivalentemente richiedere che  $\varphi(Q) = \varphi(P) + \varphi_l(\mathbf{QP})$ ; posti  $\mathbf{c} = \varphi(P)$ ,  $f = \varphi_l$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{QP}$ , osservando che  $Q = P + \mathbf{QP}$  si ricava che  $\varphi(P + \mathbf{w}) = \mathbf{c} + f(\mathbf{w})$ , come si voleva.

**Problema 3.2. Traslazione** Considera il punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Determinane l'immagine tramite la traslazione di vettore  $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ . Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando  $P(3, -7, 12)$ .

*Soluzione.* In base alla Definizione 3.1.8, la traslazione di vettore  $\mathbf{v}$  è l'affinità definita da  $\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v}$ , per ogni  $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . L'immagine del punto  $P$  tramite la traslazione  $\tau_{\mathbf{v}}$  è dunque data da

$$\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Nel caso particolare in cui  $P(3, -7, 12)$ , si ricava che  $\tau_{\mathbf{v}}(P)$  è il punto  $(4, -5, 15)$ .

**Problema 3.3. Omotetia** Determina l'immagine del punto  $Q(x_1, x_2, x_3)$  tramite l'omotetia di rapporto  $-5$  e centro  $C(6, -3, -8)$  in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando  $Q(-9, 2, 3)$ .

*Soluzione.* In base alla definizione 3.1.10, l'omotetia  $\varphi$  di rapporto  $-5$  e centro  $C$  è definita da  $\varphi(Q) = C + (-5) \mathbf{CQ}$ , per ogni  $Q \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Si ricava dunque:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 + 3 \\ x_3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5(x_1 - 6) \\ -3 - 5(x_2 + 3) \\ -8 - 5(x_3 + 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 36 \\ -5x_2 - 18 \\ -5x_3 - 48 \end{pmatrix}.$$

Nel caso numerico particolare, si ha  $\varphi(Q) = (-9, -28, -63)$ .

**Problema 3.4. Simmetria rispetto all'origine** Determina l'immagine del punto  $Q(x_1, x_2, x_3)$  tramite la simmetria di centro l'origine  $O$  in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando  $Q(2, -3, 1)$ .

*Soluzione.* In base alla Definizione 3.1.11, la simmetria  $\varphi$  di centro l'origine è l'omotetia di rapporto  $-1$  e centro l'origine ed è dunque definita da  $\varphi(Q) = O - \mathbf{OQ}$ . L'immagine di  $Q$  è quindi data da:

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova  $\varphi(Q) = (-2, 3, -1)$ .

**Problema 3.5. Simmetria** Determina l'immagine del punto  $Q(x_1, x_2, x_3)$  tramite la simmetria di centro  $C(7, -6, 11)$  in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ .

Come caso particolare, si svolga l'esercizio fissando  $Q(2, -3, 1)$ .

*Soluzione.* In base alla Definizione 3.1.11, la simmetria  $\varphi$  di centro  $C$  è l'omotetia di rapporto  $-1$  e centro  $C$  ed è definita da  $\varphi(Q) = C - \mathbf{CQ}$ . L'immagine di  $Q$  è quindi data da:

$$\varphi(Q) = C - \mathbf{CQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - 7 \\ x_2 + 6 \\ x_3 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 14 \\ -x_2 - 12 \\ -x_3 - 22 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, si trova  $\varphi(Q) = (12, -9, -23)$ .

**Problema 3.6. Punto medio** Determina il punto medio  $M$  tra i punti  $P(p_1, p_2, p_3)$  e  $Q(q_1, q_2, q_3)$  in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando  $P(3, -4, 7)$  e  $Q(3, 5, -1)$  in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ .

*Soluzione.* Ricordando la Definizione 3.1.12 e l'equazione (3.8), il punto medio  $M$  di  $P$  e  $Q$  è caratterizzato dalla condizione  $\mathbf{Q} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{P}$  ed ha coordinate pari alla semisomma delle coordinate di  $P$  e  $Q$ :  $M = (\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_3+q_3}{2})$ . Si ricava  $M(3, 1/2, 3)$ .

### AFFINITÀ ASSEGNATE MEDIANTE L'IMMAGINE DI PUNTI INDIPENDENTI

**Problema 3.7.** In  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  siano fissati i punti

$$\begin{aligned} P_0(1, 0), Q_0(2, 1), \\ P_1(0, 1), Q_1(2, 0), \\ P_2(1, 1), Q_2(3, -1). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Discuti se esiste una affinità  $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  tale che  $\varphi(P_i) = Q_i$  per ogni  $i = 0, 1, 2$ , e, in caso affermativo, descrivila.

*Soluzione. Primo modo* Se l'affinità cercata  $\varphi$  esiste, l'immagine tramite essa di un punto  $P(x_1, x_2)$  avrà coordinate della forma  $y_1 = ax_1 + bx_2 + e$ ,  $y_2 = cx_1 + dx_2 + f$ , con  $ad - bc \neq 0$ . Per imporre che  $\varphi(P_0) = Q_0$ , sostituiamo

$(1, 0)$  al posto di  $(x_1, x_2)$  e  $(2, 1)$  al posto di  $(y_1, y_2)$ ; otteniamo due relazioni lineari:  $2 = a + e$ ,  $1 = c + f$ . Imponendo in modo analogo l'immagine di tutti i punti, ricaviamo il sistema lineare nelle incognite  $a, b, c, d, e, f$ :

$$\begin{cases} 2 = a + e \\ 1 = c + f \\ 2 = b + e \\ 0 = d + f \\ 3 = a + b + e \\ -1 = c + d + f \end{cases}$$

Studiando il sistema, si vede che esiste una e una sola soluzione; a tale soluzione corrisponde quindi una ed una sola affinità  $\varphi$  che soddisfa le richieste: essa ha equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 1 \\ y_2 = -x_1 - 2x_2 + 2 \end{cases} \quad (3.22)$$

**Secondo modo** L'esistenza di  $\varphi$  è legata all'esistenza di una applicazione lineare  $\varphi_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi_l(P_i - P_0) = \varphi(P_i) - \varphi(P_0) = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Poniamo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2 = (1, -2)$ . Osserviamo che possiamo ricavare in modo semplice le componenti della base canonica rispetto a  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ ; infatti,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . L'applicazione cercata  $\varphi_l$  è dunque caratterizzata dalle condizioni:  $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ ,  $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = \mathbf{w}_2$ . Ritroviamo le equazioni (3.22).

**Problema 3.8.** In  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  siano fissati i punti

$$\begin{aligned} P_0(2, 1), \quad Q_0(2, 1), \\ P_1(1, -1), \quad Q_1(2, 0), \\ P_2(1, 3), \quad Q_2(3, -1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dire se esiste una affinità  $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  tale che  $\varphi(P_i) = Q_i$  per ogni  $i = 0, 1, 2$ , e, in caso affermativo, descriverla.

*Soluzione.* L'esistenza di  $\varphi$  è legata all'esistenza di una applicazione lineare  $\varphi_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi_l(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i) = \varphi(\mathbf{P}_0) \varphi(\mathbf{P}_i) = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Prova a terminare l'esercizio.

### IMMAGINE DI SOTTOSPAZI TRAMITE AFFINITÀ

**Problema 3.9.** Nel piano affine numerico reale  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ , sia assegnata l'affinità di equazioni:

$$\varphi : \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2 \\ y_2 = 6x_1 - x_2 + 4 \end{cases} \quad (3.24)$$

- Determina il rango di  $\varphi$ .
- Determina equazioni parametriche per l'immagine tramite  $\varphi$  della retta  $r$  passante per  $A(2, 1)$  e  $B(3, -1)$ .

c) Determina equazioni cartesiane per l'antiimmagine della retta  $s$  di equazione  $3x_1 - 2x_2 + 7 = 0$ .

d) Determina equazioni cartesiane dell'immagine tramite  $\varphi$  della retta  $r'$  di equazione  $2x_1 + 5x_2 - 3 = 0$ .

*Soluzione.* a) L'applicazione lineare  $\varphi_l$  associata a  $\varphi$  è  $\varphi_l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da  $\varphi_l(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 6x_1 - x_2)$ . La matrice associata a  $\varphi_l$  rispetto alla base canonica è la matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ , che ha rango 2: dunque  $\varphi$  ha rango 2 ed è invertibile in base alla Prop. 3.2.1.

b) Per la prop. 3.2.3,  $\varphi(r)$  è il sottospazio generato da  $\varphi(A) = (6, 15)$  e  $\varphi(B) = (3, 23)$ , e tale sottospazio deve essere una retta, perchè  $\varphi$  è un isomorfismo. Dunque  $\varphi(r)$  è la retta per  $\varphi(A) = (6, 15)$  di vettore direttore  $\varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B}) = (-3, 8)$ , e ha equazioni parametriche  $x_1 = 6 - 3t, x_2 = 15 + 8t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .

c) Un punto  $P(x_1, x_2)$  appartiene all'antiimmagine di  $s$  tramite  $\varphi$  se e solo se  $\varphi(P) \in s$ , cioè se e solo se  $3(x_1 + 2x_2 + 2) - 2(6x_1 - x_2 + 4) + 7 = -9x_1 + 8x_2 + 5 = 0$ .

d) Poiché  $\varphi$  è invertibile, un punto  $Q(q_1, q_2)$  appartiene all'immagine  $\varphi(r')$  se e solo se  $\varphi^{-1}(Q) \in r'$ . Poichè

$$\varphi^{-1}(Q) = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ q_2 - 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ q_2 - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} q_1 + 2q_2 - 10 \\ 6q_1 - q_2 - 8 \end{pmatrix},$$

sostituendo le coordinate  $\varphi^{-1}(Q)$  nell'equazione di  $r'$  si trova la relazione  $2(q_1 + 2q_2 - 10) + 5(6q_1 - q_2 - 8) - 36 = 32q_1 - q_2 - 96 = 0$ . Una equazione cartesiana di  $\varphi(r')$  è dunque data da  $32x_1 - x_2 - 96 = 0$ .

### COMPOSIZIONE DI AFFINITÀ

**Problema 3.10.** Considera le affinità  $\varphi: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  e  $\psi: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  su  $\mathbb{R}$  di equazioni rispettivamente

$$\varphi: \begin{cases} x' = 3x + y + 2 \\ y' = x - y + 7 \\ z' = x - y + 2 \end{cases} \quad \psi: \begin{cases} x'' = x' + y' + z' \\ y'' = 2x' + 3 \\ z'' = z' - y' + 2 \end{cases} \quad (3.25)$$

a) Determina le equazioni della composizione  $\psi \circ \varphi$  e l'applicazione lineare ad essa associata.

b) Determina equazioni parametriche dell'immagine tramite  $\psi$  della retta  $r$  di  $\mathbb{A}^3$  passante per i punti  $E(0, 3, -1)$  e  $F(2, 5, 0)$  e del piano  $\pi$  di equazione  $4x' + 2y' + z' = -3$ .

*Soluzione.* a) Posti  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

l'affinità  $\varphi$  ha equazioni  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ , mentre l'affinità  $\psi$  ha equazioni  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{d}$ . La composizione  $\psi \circ \varphi$  ha quindi equazione

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{c} + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 + 11 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b) L'affinità  $\psi$  è iniettiva perchè l'applicazione lineare associata è iniettiva: quindi, l'immagine della retta  $r$  è una retta  $r'$ , e l'immagine del piano  $\pi$  è un piano  $\pi'$ . La retta  $r'$  passa per  $\psi(E)(3, 0, 4)$ , ha vettore direttore  $\psi_l(\mathbf{EF}) = (5, 4, -1)$ , e equazioni parametriche  $x_1 = 3 + 5t$ ,  $x_2 = 4t$ ,  $x_3 = 4 - t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ . Un punto  $Q(q_1, q_2, q_3)$  appartiene al piano  $\pi'$  se e solo se  $\psi^{-1}(Q) = -\frac{1}{4}(-2(q_2 - 3), -2x_1 + (q_2 - 3) + 2(q_3 - 2), -2q_1 + (q_2 - 3) - 2(q_3 - 2)) = -\frac{1}{4}(-2q_2 + 6, -2q_1 + q_2 + 2q_3 - 7, -2q_1 + q_2 - 2q_3 + 1)$  appartiene a  $\pi$ , cioè se e solo se  $-\frac{1}{4}[4(-2y' + 6) + 2(-2x' + y' + 2z' - 7) - 2x' + y' - 2z' + 1] + 3 = 0$ .

### RIFERIMENTI

Gli esercizi seguenti riguardano lo spazio affine numerico  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ .

**Problema 3.11.** Considera il punto  $P(2, -1, 5) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Determina le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R} = (Q, R)$ , ove  $Q(0, 1, 1)$ ,  $R = (\mathbf{v}_1 = (2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0)$ ).

*Soluzione.* Le coordinate  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  sono, per definizione, caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = Q + a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 + 4a_2 - a_3 \\ 1 + 3a_1 \\ 1 + 3a_2 \end{pmatrix}$$

Uguagliando componente per componente e risolvendo il sistema non omogeneo così ottenuto, si ricava che le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  sono  $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2)$ .

**Problema 3.12.** Considera il punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Determina le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R} = (Q, R)$ , ove  $Q(q_1, q_2, q_3)$ ,  $R = (\mathbf{v}_1 = (2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0)$ ). Come caso particolare, svolgi l'esercizio fissando  $Q(2, 0, 1)$ .

*Soluzione.* Le coordinate  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  sono, per definizione, caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q + a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} q_1 + 2a_1 + 4a_2 - a_3 \\ q_2 + 3a_1 \\ q_3 + 3a_2 \end{pmatrix}$$

In particolare,  $(a_1, a_2, a_3)$  sono le componenti, nel riferimento  $R$ , del vettore  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  (che ha coordinate  $\mathbf{x} - \mathbf{q} = (x_1 - q_1, x_2 - q_2, x_3 - q_3)$  nel riferimento standard). Posto  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  e detta  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  le cui

colonne sono formate dalle componenti dei vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  in base canonica, risulta che  $A\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{q}$ , e dunque:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \end{pmatrix}$$

Fissando  $Q(2, 0, 1)$ , si ricava che le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  sono:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 3.13.** Considera l'affinità  $\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  di equazioni

$$\psi : \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 - x_3 + 2 \\ y_3 = -x_1 + 3x_2 - 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

- a) Determina le equazioni di  $\psi$  nel riferimento  $(P_0, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3))$ , con  $P_0(2, -4, 3)$ .  
 b) Determina le equazioni di  $\psi$  nel riferimento  $(O, (\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3))$ .

*Soluzione.* Posti  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , l'affinità  $\varphi$  ha equazioni  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ , mentre l'affinità  $\psi$  ha equazioni  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{d}$ .

La composizione  $\psi \circ \varphi$  ha quindi equazione  $\mathbf{z} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{c} + \mathbf{d}$

### AFFINITÀ CON CONDIZIONI ASSEGNATE

**Problema 3.14.** Nel piano affine numerico reale  $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  sono fissate le rette  $r : x_1 = 0$ ,  $s : x_2 = 0$ ,  $r' : 2x_1 - x_2 + 7 = 0$ ,  $s' : x_1 + 2x_2 - 4 = 0$ . Determina, se esiste, una affinità  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tale che  $\varphi(r) = r'$  e  $\varphi(s) = s'$ .

*Soluzione.* Osserviamo che  $r \cap s = O$  e  $r' \cap s' = Q_0(-\frac{10}{7}, \frac{29}{7})$ . L'affinità  $\varphi$ , se esiste, deve sicuramente verificare  $\varphi(O) = Q_0$ . Osserviamo inoltre che  $r$  ha per vettore direttore  $\mathbf{e}_2$  mentre  $r'$  ha per vettore direttore  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ : se l'affinità  $\varphi$  esiste, la lineare associata  $\varphi_l$  deve sicuramente verificare  $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{v}_1$  per un opportuno scalare  $k \neq 0$ . Analogamente,  $s$  ha per vettore direttore  $\mathbf{e}_1$  mentre  $s'$  ha per vettore direttore  $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ : se l'affinità  $\varphi$  esiste, la lineare associata  $\varphi_l$  deve sicuramente verificare  $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = h\mathbf{v}_2$  per un opportuno scalare  $h \neq 0$ . Osserviamo che, per ogni scelta di scalari non nulli  $h, k \in \mathbb{R}$ , la posizione  $\varphi_l^{hk}(\mathbf{e}_1) = h\mathbf{v}_2$  e  $\varphi_l^{hk}(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{v}_1$  individua una e una sola applicazione lineare  $\varphi_l^{hk}$  e che, per ogni tale scelta, l'affinità  $\varphi^{hk}$  definita da  $\varphi^{hk}(O + \mathbf{v}) = Q_0 + \varphi_l^{hk}(\mathbf{v})$  soddisfa le richieste. In particolare, per  $h = k = 1$  otteniamo l'affinità  $\varphi(x_1, x_2) = \varphi^{1,1}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 - \frac{10}{7}, -3x_1 + 2x_2 + \frac{29}{7})$ .

## Esercizi

**3.1.** Sia  $\mathbb{A}$  uno spazio affine su un campo, sia  $B$  un insieme e sia  $g : B \rightarrow \mathbb{A}$  una biezione. Mostra che se  $B$  è munito della struttura di spazio affine indotta da  $g$ , allora  $g$  è un isomorfismo di  $B$  su  $\mathbb{A}$ .

**3.2.** Prova che se  $\mathbf{V}$  è uno spazio vettoriale non nullo,  $\text{GL}(\mathbf{V})$  è un sottogruppo proprio del gruppo  $\mathbf{Aff}(\mathbf{V})$  delle affinità dello spazio affine  $\mathbf{V}$  canonicamente associato.

**3.3.** Siano  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$  spazi affini di dimensione finita sul campo  $\mathbb{K}$  e sia  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una affinità. Prova che  $\varphi$  è suriettiva se e solo se  $\text{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{A}'$ , e che  $\varphi$  è iniettiva se e solo se  $\text{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{A}$ .

**3.4.** Determina l'immagine del punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  tramite la traslazione di vettore  $\mathbf{v} = (-4, 7, 3)$ .

**3.5.** Determina l'immagine del punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  tramite l'omotetia  $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  di centro  $C(2, -4, 8)$  e rapporto 6.

**3.6.** Determina l'immagine del punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  tramite la simmetria  $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  di centro l'origine.

**3.7.** Determina l'immagine del punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  tramite la simmetria  $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  di centro  $C(3, -11, 45)$ .

**3.8.** Determinare il vettore delle coordinate di  $(2, -1, 5) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  nel riferimento cartesiano  $\mathcal{R} = (P, R)$ , ove  $P(0, 1, 1)$  e  $R = (\mathbf{v}_1 = (2, 3, 0), \mathbf{v}_2 = (4, 0, 3), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0))$ .

**3.9.** Considera il punto  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Determina le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R} = (Q, R)$ , ove  $Q(-6, 12, 1)$ ,  $R = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1))$ .

**3.10.** Considera il punto  $P(2, -1, 5) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ . Determina le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R} = (Q, R)$ , ove  $Q(1, 5, -2)$ ,  $R = (\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, -1))$ .