Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) settembre 2013

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale V delle matrici reali 2×2, sia assegnata l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da $X \mapsto XA$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Determina la dimensione ed una base del nucleo di f.

b) Determina la dimensione e una base dell'immagine di f.

c) Determina la matrice che rappresenta f nella base $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ (in dominio e codominio).

2) In uno spazio affine reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera la retta r di equazioni $2x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$, $x_1 + x_3 + 2 = 0$, e la retta s passante per i punti $P(1, -1, 0)$ e $Q(0, 0, 1)$.

a) Determina un vettore direttore per r e discuti se r e s sono sghembe o complanari.

b) Determina (se tale retta esiste) un sistema di equazioni parametriche per una retta t incidente sia r che s e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

c) Determina equazioni cartesiane per una retta r' passante per P e parallela a r.

3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate (x_1, x_2). Considera, inoltre, l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ abbiano come immagine, rispettivamente, i punti $A'(1, 1)$, $B'(2, -1)$, $C'(-1, 2)$.

a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità φ.

b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine $\varphi(r)$ tramite φ della retta r di equazione $2x_1 - x_2 + 1 = 0$.

4) Nello spazio affine numerico reale $\mathbf{A}^5_{\mathbf{R}}$, considera i punti

$$A(1, 0, 1, 0, 1), B(0, 1, 1, 0, 2).$$

Determina un sistema di equazioni cartesiane normali per il sottospazio generato da A, B.

5) Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in sè. Considera vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ in V (con n naturale > 0) e denota con U il sottospazio vettoriale da essi generato.

a) Se un vettore $\mathbf{v} \in V$ è tale che $f(\mathbf{v}) \in f(U)$, è possibile concludere che $\mathbf{v} \in U$?

b) Se un vettore $\mathbf{v} \in V$ è tale che $f(\mathbf{v}) \in f(U)$, è possibile concludere che $\mathbf{v} \in (U + Ker\, f)$?