Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 29 luglio 2013

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbf{R}^5$ considera il sottospazio U definito dal sistema di equazioni $x_1 - 3x_2 + x_5 = 0, x_1 + x_3 - 3x_5 = 0$. Considera inoltre l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 - x_3 + x_4 + x_5, 2x_3 + 2x_4, 2x_2 - x_3 - x_5, x_1 - 2x_2, x_3 + x_4).$$

a) Determina la dimensione e una base di $f(U)$.

b) Determina la dimensione e una base di $U \cap Ker\, f$.

2) Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbf{R}^3$ considera l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da $f(1, 0, 1) = (2, 1, 3), f(1, 0, 2) = (3, 2, 1), f(1, 1, -1) = (1, 1, -2)$.

a) Determina $f(2, 5, 4)$.

b) Determina la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

3) Nello spazio euclideo $\mathbf{A}$ di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera i punti $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$.

a) Determina l'area del triangolo di vertici O, A, B' ove B' sia la proiezione ortogonale di B sul piano di equazione $x_1 - x_2 = 0$.

b) Determina equazioni parametriche del piano per A e ortogonale alla retta per A e B.

4) In uno spazio euclideo di dimensione 4, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale di origine O, con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4). Considera la retta r_1 passante per i punti $A(1, 0, 1, -1)$ e $B(-1, 1, 0, 2)$ e la retta r_2 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 - t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}\,.$$

a) Determina un sistema di equazioni cartesiane per r_1.

b) Determina la dimensione e equazioni cartesiane per il sottospazio affine generato da r_1 e r_2.

c) Discuti l'esistenza di una retta s incidente sia r_1 che r_2 e parallela al vettore di coordinate $(3, 2, 1, 1)$. Fornisci una caratterizzazione dei vettori w tali che esiste una retta incidente r_1 e r_2, e parallela a w.