Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 20 giugno 2014

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale $V$ delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali, considera le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(\mathbf{A}_1) = (1,0,1)$, $f(\mathbf{A}_2) = (2,-1,1)$, $f(\mathbf{A}_3) = (1,-1,0)$, $f(\mathbf{A}_4) = (0,1,1)$.

a) Verifica che $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di $V$.

b) Determina la dimensione e una base di Ker $f$ e Im $f$, rispettivamente.

c) Scrivi la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base standard di $V$ nel dominio e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$ nel codominio.

d) Considera l'applicazione lineare $g_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $g(x,y,z) = x + y + az$. Determina, se esiste, $a \in \mathbf{R}$ tale che $g_a \circ f$ sia l'applicazione nulla.

2) In uno spazio euclideo reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3)$. Considera il punto $A(1,1,2)$ e il piano $\alpha$ di equazione $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

a) Determina equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $A$ e per l'origine $O$.

b) Determina equazioni parametriche per una retta $s \subset \alpha$ incidente e ortogonale a $r$.

c) Determina equazioni cartesiane del piano $\beta$ che contiene $A$ e $s$.

d) Determina la distanza di $A$ da $\alpha$ e le coordinate del punto di $\alpha$ più vicino a $A$.

e) Determina l'area del triangolo di vertici $A$, $O$, $B = (0,1,4)$.

3) a) In $\mathbf{R}^4$, sia $U$ il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ e sia $W$ il sottospazio generato da

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determina una base del sottospazio $U \cap W$.

b) Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici reali con $n$ colonne, e $\mathbf{C}$ una matrice le cui righe sono le righe di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$. Denota con $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^n$ delle soluzioni di $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ in $n$ e con $W$ il sottospazio delle soluzioni di $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$.

È vero che, se $\mathbf{R}^n$ è la somma diretta di $U$ e $W$, allora rg $(\mathbf{C})$ = rg $(\mathbf{A})$ + rg $(\mathbf{B})$?

È vero il viceversa?