Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 19 giugno 2013

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 2, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 1, -2)$. Considera il sottospazio $U$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$.

   a) Determina la dimensione e una base di $U$.

   b) Discuti se $\mathbf{u} = (1, -1, -4, 5)$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_4$, e, in caso positivo, determina esplicitamente una tale combinazione lineare.

   c) Determina la dimensione e una base dell'intersezione tra $U$ e il sottospazio $W$ di equazione $x_1 + x_2 = 0$.

2) In uno spazio euclideo di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3)$. Considera la retta $r$ per i punti $A(1, 0, -1)$ e $B(-1, 1, 3)$ e la retta $s$ di equazioni cartesiane $x_1 + 2x_2 + x_3 + 1 = 0, x_2 + 3x_3 + 1 = 0$.

   a) Discuti se le rette $r$ e $s$ sono sghembe.

   b) Determina equazioni cartesiane per la retta ortogonale e incidente $r$ e $s$.

   c) Determina l'equazione cartesiana di un piano $\alpha$ (se esiste) passante per l'origine e parallelo sia a $r$ che a $s$.

3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate $(x_1, x_2)$. Considera l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ abbiano come immagine, rispettivamente, i punti $O'(2, 1)$, $B'(-1, 1)$, $C'(3, 2)$.

   a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità $\varphi$.

   b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine tramite $\varphi$ della retta $r$ di equazione cartesiana $2x_1 - x_2 - 1 = 0$.

4) Al variare dello scalare $a \in \mathbf{R}$, considera l'applicazione lineare $f_a : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, definita da $f_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + ax_3, 2x_1 - x_2 + 3ax_3 + x_4, -x_1 + x_2 - a^2x_3 + (a+1)x_4)$. Per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ l'applicazione lineare $f$ è suriettiva?

5) Sia $V$ uno spazio vettoriale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Posto $f^2 = f \circ f$, mostra che $\mathrm{Im}\, f \supseteq \mathrm{Im}\, f^2$. Mostra inoltre che $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ se e solo se $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f = V$.