

Introduzione a una teoria assiomatica materiale

Una teoria assiomatica (o, sistema assiomatico) comprende il seguente insieme di informazioni

1. Un elenco di **termini primitivi (o indefiniti)**, cioè un elenco di parole per le quali non viene fornita una descrizione precisa, ma solo una spiegazione. Le parole in questo elenco vengono utilizzate nella teoria successiva come se fossero noti e condivisi da tutti.
2. Un elenco di **assiomi** (detti anche **postulati**): sono enunciati che illustrano le proprietà dei termini primitivi e le loro relazioni. Tali enunciati vengono considerati veri.
3. Un elenco di **regole logiche**: queste sono le uniche regole da utilizzare.

A partire da questi dati, è possibile introdurre altri termini (ma solo se definiti con precisione) e altri enunciati (ma solo se essi possono essere dimostrati utilizzando solo le regole logiche specificate e gli assiomi):

4. Le **definizioni**: un elenco di parole (che può essere allungato a piacere) di termini che vengono univocamente precisati, utilizzando i termini primitivi, gli assiomi o le definizioni introdotte in precedenza. Sono parole che spesso vengono introdotte per comodità, per rendere più corti ed efficaci gli enunciati.

5. I **teoremi**, cioè enunciati per i quali è possibile dimostrare che sono veri usando solo i termini primitivi, gli assiomi, le regole logiche. Naturalmente, è possibile utilizzare nella dimostrazione anche teoremi già dimostrati in precedenza.

Per precisione, bisognerebbe inserire nella struttura assiomatica anche la lingua nella quale ci esprimiamo. Inoltre, utilizzeremo spesso, senza dichiararlo, i numeri reali, parte della teoria degli insiemi, la logica aristotelica.

Eventuali raffigurazioni possono essere utilizzate solo come supporto, e non costituiscono una dimostrazione.

Un sistema assiomatico è **consistente (o coerente)** se non contengono contraddizioni (cioè non ci sono enunciati che sono veri e falsi contemporaneamente, in essi).

Un **modello** di un sistema assiomatico si ottiene assegnando ai termini primitivi un significato, in modo che valgano gli assiomi. Esistono modelli concreti (ottenuti utilizzando oggetti e relazioni concreti) e modelli astratti. **Se è possibile trovare un modello concreto per un sistema assiomatico, allora il sistema è consistente.**

Un sistema assiomatico è **completo** se, comunque fissato un enunciato, è possibile dimostrare che esso è vero o è falso. Il sistema assiomatico dell'aritmetica non è completo (Gödel).

In un sistema assiomatico, un assioma è **indipendente** dagli altri se non può essere dedotto come un teorema utilizzando solo gli altri assiomi.

Due modelli di uno stesso sistema assiomatico sono **isomorfi** se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi, tale che conservi tutte le relazioni.

Argomentazione valida e dimostrazioni dirette e indirette

Un **teorema** (affermazione dimostrata) è dedotto utilizzando tautologie o argomentazioni valide a partire da una lista di termini non definiti (concetti primitivi), termini definiti (definizioni), ipotesi, teoremi dimostrati in precedenza.

Definizione. Un **argomento** consiste di premesse e di una conclusione. Diciamo che l'argomento è **valido** se (e solo se) la conclusione è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere. Se le premesse sono p_1, \dots, p_n e la conclusione è q , l'argomento è valido se e solo se $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$ è una tautologia.

Esempi (a) Un argomento valido tramite *modus ponens*: Se un parallelogramma è un quadrato, allora è un rettangolo. Il parallelogramma $ABCD$ è un quadrato. Allora $ABCD$ è un rettangolo.

(b) Un argomento valido per transitività (o per definizione): Se un triangolo è isoscele, allora due suoi lati sono congruenti. Se in un triangolo due lati sono congruenti, allora anche due angoli sono congruenti. Allora, se un triangolo è isoscele, due suoi angoli sono congruenti.

Definizione. La dimostrazione di un teorema è una successione di argomenti validi che utilizzano le premesse del teorema e il sistema assiomatico.

Le giustificazioni permesse all'interno di una dimostrazione sono:

- 1) per ipotesi
- 2) per ipotesi assurda
- 3) per l'assioma
- 4) per il teorema
- 5) per la definizione
- 6) per il passo di una dimostrazione
- 7) per una regola di logica

In base agli argomenti utilizzati, le dimostrazioni sono *dirette* o *indirette*.

Esercizi: Siano n e m numeri naturali.

- a) Mostra che se n è multiplo di 3, anche nm è multiplo di 3.
- b) Mostra che $n(n+1)$ è pari.
- c) Mostra che $n(n+1)(n+2)$ è multiplo di 3.
- d) Mostra che se n è multiplo di 3, anche $n^2 - n$ è multiplo di 3.
- e) Mostra che se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
- f) Mostra che se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
- g) Mostra che se n e m sono multipli di 3, anche $n+m$ è multiplo di 3.

Esempi di dimostrazioni indirette: Tesi: $p \Rightarrow q$

Dimostrazione per Contrapposizione Supponi che $\sim q$. Tramite una dimostrazione diretta, dimostra che $\sim p$. Concludi che $\sim q \Rightarrow \sim p$ e dunque $p \Rightarrow q$

Dimostrazione per Contraddizione Supponi $\sim p$. Tramite una dimostrazione diretta, dimostra che q e, contemporaneamente, $\sim q$. Concludi che, vista la contraddizione trovata, p è dimostrata.

Per provare che un enunciato è falso, è sufficiente fornire un controesempio.

Esempi di sistema assiomatico

Il Club delle Tartarughe [Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991, pp.30-34]

Termini primitivi: persona, insieme, appartenenza.

Definizioni: Il Club delle Tartarughe è un insieme di una o più persone.

Una persona appartenente al Club è detta *Tartaruga*.

I *comitati* sono insiemi di una o più Tartarughe.

Una Tartaruga appartenente a un Comitato è detta *membro* di quel comitato.

Due Comitati sono *uguali* se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo.

Due comitati che non hanno membri in comune sono detti *disgiunti*.

Assiomi 1. Ogni Tartaruga è membro di almeno un Comitato;

2. Per ogni coppia di due distinte Tartarughe esiste uno ed uno solo Comitato di cui entrambe sono membri;

3. Per ogni Comitato esiste uno ed uno solo Comitato disgiunto da esso.

Teorema: Ogni Tartaruga è membro di almeno due comitati.

Dimostrazione [provare a farla prima di leggere il seguito]

Passo 1: Sia "t" una Tartaruga. [ipotesi, denominazione]

Passo 2: t è membro di un Comitato "C" [Assioma 1, denominazione]

Passo 3. Esiste un comitato, che indichiamo con "D", che è disgiunto da C. [Assioma 3, denominazione]

Passo 4. Sia "u" un membro di D. [u esiste per definizione di Comitato]

Passo 5. u non è membro di C. [Definizione di "disgiunto"]

Passo 6. Esiste un Comitato, che indichiamo con "E", di cui sia t che u sono membri. [Assioma 2, denominazione].
 Passo 7. C ed E non sono uguali. [Definizione di "uguale"; 5, 6]
 Passo 8. t è membro sia di C che di E. [passi 2, 6]
 Passo 9. t è membro di almeno due Comitati. [Passi 7, 8]
 Passo 10. Di conseguenza ogni Tartaruga è Membro di almeno due Comitati. [generalizzazione: i passi precedentivalgono per ogni tartaruga]

Esercizi 1) Nel sistema del Club delle Tartarughe, mostra il Teorema 2: Ogni Comitato ha almeno due membri.

2) Considera il sistema assiomatico:

Termini primitivi: persona, insieme, appartenenza.

Definizioni: Il *Club di Facebook* è un insieme di uno o più utenti.

Una persona appartenente al Club è detta *Amico*.

I *Gruppi* sono insiemi di uno o più Amici.

Un Amico appartenente a un Gruppo è detta *membro* di quel comitato.

Due Gruppi sono *uguali* se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo.

Due Gruppi che non hanno membri in comune sono detti *disgiunti*.

Assiomi 1. Ogni Amico è membro di almeno un Gruppo;

2. Per ogni coppia di due distinti Amici esiste uno ed uno solo Gruppo di cui entrambi sono membri;

3. Per ogni Gruppo esiste uno ed uno solo Gruppo disgiunto da esso.

Mostra che:

Teorema 1: Ogni Amico è membro di almeno due gruppi.

Teorema 2: Ogni Gruppo ha almeno due membri.

Il Piano di Fano

Gino Fano (1871–1952), un matematico italiano, ha fornito quello che è considerato il primo esempio di sistema assiomatico 'geometrico' che comprende un numero finito di punti. Tale esempio ha molteplici applicazioni. Illustriamo solo una parte dell'esempio; tale parte viene detta Piano di Fano.

Assiomi per il Piano di Fano

Termini primitivi: *punto, linea, incidenza.*

Assioma 1. Esiste almeno una linea.

Assioma 2. Ogni linea ha esattamente tre punti incidenti ad essa.

Assioma 3. Non tutti i punti sono incidenti alla stessa linea.

Assioma 4. C'è una e una sola linea incidente ogni coppia di punti distinti.

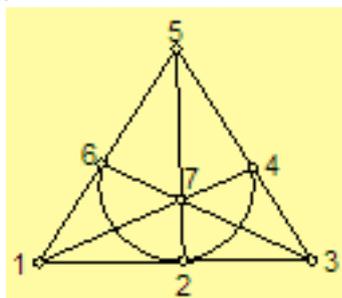
Assioma 5. C'è almeno un punto incidente a ogni coppia di linee distinte.

Due modelli isomorfi soddisfano gli assiomi del Piano di Fano:

Primo modello: è illustrato dalla seguente tabella

punti	linee
A, B, C, D, E, F, G	ADB, AGE, AFC, BEC, BGF, CGD, FDE

Secondo modello:



Nella Figura, i *punti* sono 7 piccoli cerchi e le linee sono sei segmenti di retta (ciascuno dei quali contiene tre punti) e una porzione di circonferenza (contenente 4, 2, 6).

Esercizio: Nel piano di Fano, mostra il **Teorema 1:** Due distinte linee si intersecano in esattamente un punto.