

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

- 1) Sia W lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata t , a coefficienti reali. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow W$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2 - 3t + t^2$, $f(\mathbf{e}_2) = -9t + t^2 - 2t^3$, $f(\mathbf{e}_3) = 1 + 3t + t^3$.
 - a) Determina $f(2, -1, 4)$ e discuti se f è iniettiva e/o suriettiva.
 - b) Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ in W .

- 2) In uno spazio affine reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3) . Considera la retta r di equazioni $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 + 2 = 0$, e il punto $A(1, 1, 2)$.
 - a) Determina equazioni parametriche vettoriali per r .
 - b) Determina l'intersezione tra il piano α di equazione $3x_2 - 2x_2 + x_3 = 5$ e la retta s per A e parallela ad r .
 - c) Determina equazioni cartesiane del piano β che contiene r e s .
 - d) Determina equazioni parametriche e cartesiane di un piano α per A e ortogonale a r .

- 3) Nello spazio vettoriale \mathbf{R}^4 , considera il sottospazio U generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = (3, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 0, -3, 2)$, e il sottospazio W generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (3, 11, -8, -7)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 2, -1)$. Determina la dimensione e una base per $U + W$ e, rispettivamente, per $U \cap W$.

- 4) a) Sia V lo spazio vettoriale formato dalle matrici con 3 righe e 2 colonne. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio U di V dato da tutte le matrici X tali che $AX = \mathbf{0}$. Calcola la dimensione di U e una sua base.

b) Se B è una matrice quadrata di ordine n fissata di rango r e W lo spazio delle matrici con n righe e m colonne, quale è la dimensione dello spazio delle matrici X di M tali che $BX = \mathbf{0}$?