Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 27 febbraio 2013

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (-6, 3, -4, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-4, 2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Considera inoltre il sottospazio W di equazioni $x_2 = 0$ e il sottospazio U generato dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

   a) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti.

   b) Determina la dimensione e una base dell'intersezione tra i sottospazi U e W.

   c) Determina la matrice, rispetto alla base canonica in dominio e codominio, dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Determina inoltre una base dell'immagine di U tramite f.

2) In uno spazio affine di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera il piano α di equazione $3x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$; considera inoltre la retta r per i punti $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 0, -1)$ la retta s per A e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

   a) Discuti se la retta r è parallela ad α .

   b) Determina l'intersezione tra il piano α e la retta s.

   c) Determina dimensione e equazioni cartesiane per l'intersezione tra il piano α e il piano β generato da r e s.

3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate (x_1, x_2). Considera, inoltre, l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $A(1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 2)$ abbiano come immagine, rispettivamente, i punti $A'(0, 0)$, $B'(1, 0)$, $C'(0, 1)$.

   a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità φ.

   b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine tramite φ della retta r per A e per $D(3, 0)$.

4) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^5$, considera il prodotto scalare standard $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i$.

   a) Se il sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ ha dimensione 2 e il sottospazio W ha dimensione 3, è vero che, necessariamente, $U^\perp$ e $W^\perp$ hanno intersezione non nulla? Giustifica la risposta.

   b) È vero che, se due sottospazi hanno intersezione non nulla, anche i loro ortogonali hanno intersezione non nulla? Giustifica la risposta.