

### Affermazioni aperte e quantificatori

**Definizione** Una *affermazione aperta* è una affermazione che coinvolge una o più variabili.

*Esempi*

(a)  $5 \geq 3x - 2$

(b) Il bambino ha un quaderno rosso.

Una affermazione aperta non è né vera né falsa: essa diventa una proposizione solo quando sono sostituiti valori particolari alle variabili, o è definito l'insieme sul quale va valutata (detto universo). Denotiamo con  $p(x)$  una affermazione che coinvolge una variabile,  $x$ , e con  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una affermazione aperta nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Esempio*  $p(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 = 5x_1 - 2x_3 + 7x_4$

**Definizione** L'*insieme di verità* di una affermazione aperta è la collezione degli oggetti di uno specifico 'universo' che rendono vera l'affermazione.

*Esempio*  $p(x) : x < 3$

(i) Se l'universo è l'insieme dei numeri naturali, allora l'insieme di verità è  $\{1, 2\}$ .

(ii) Se l'universo è l'insieme dei numeri interi, l'insieme di verità è  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

**Definizione** Fissata una affermazione aperta  $p(x)$ ,

a) l'espressione

$$\forall x, p(x)$$

si legge 'per ogni  $x$  nell'universo considerato,  $p(x)$  è vera'. Il simbolo  $\forall$  viene detto **quantificatore universale**.

b) l'espressione

$$\exists x, p(x)$$

si legge 'per qualche  $x$  nell'universo considerato,  $p(x)$  è vera'. Il simbolo  $\exists$  viene detto **quantificatore esistenziale**.

c) L'espressione

$$\exists ! x, p(x)$$

si legge 'per uno ed un solo  $x$  nell'universo considerato,  $p(x)$  è vera'. Il simbolo  $\exists !$  viene detto **quantificatore di esistenza e unicità** (ed è un particolare quantificatore esistenziale).

**Esempio** Nell'universo dei numeri reali  $\exists x, x^2 > 0$  è vera, mentre  $\forall x, x^2 > 0$  è falsa (per  $x = 0$  l'affermazione non è vera).

Nella geometria euclidea, è vera la proposizione *Data una circonferenza, esiste uno ed un solo punto equidistante da tutti i punti della circonferenza.* Ci si riferisce al centro della circonferenza.

Nel linguaggio corrente, i quantificatori non sono sempre espressi con chiarezza.

**Esempi**

(1) "Alcuni quadrilateri sono quadrati" significa " $\exists x, (x \text{ è un quadrilatero e } x \text{ è un quadrato})$ ".

(2) "Tutti i quadrati hanno quattro lati." significa " Per tutti gli  $x$ , se  $x$  è un quadrato, allora  $x$  ha quattro lati." In generale, "Tutti i  $p(x)$  sono  $q(x)$ ." significa " $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x))$ ".

(3) "Nessun gatto ama bagnarsi" significa che "Ogni gatto non ama bagnarsi", cioè " Per tutti gli  $x$ , se  $x$  è un gatto, allora è falso che  $x$  ama bagnarsi." L'insieme di verità di "Il gatto  $x$  ama bagnarsi" è l'insieme vuoto.

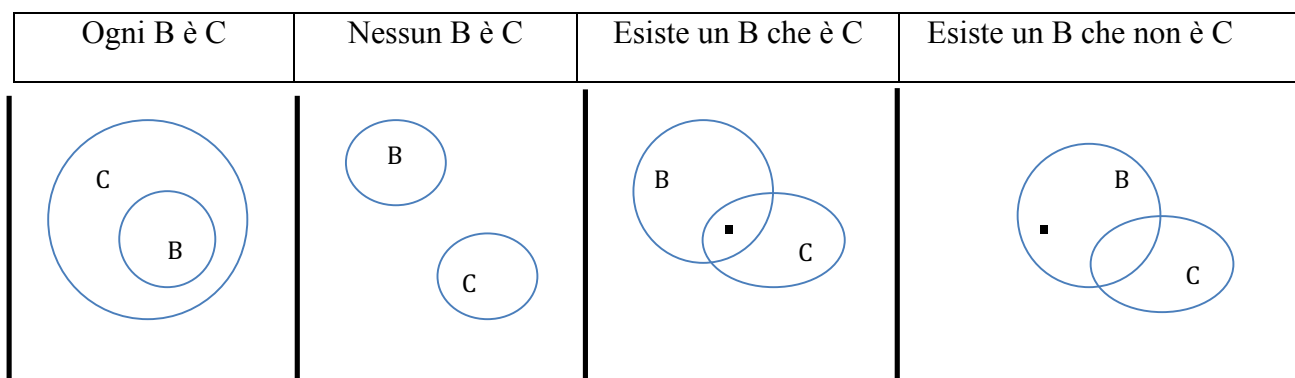
(4) "C'è un dottore" può significare oppure "C'è esattamente un dottore" oppure "C'è almeno un dottore"

Fraasi della forma: "Qualche B...", "Alcuni B..." verranno intesi nel senso di 'Esiste almeno un B....', non escludendo che tale B sia unico.

Le proposizioni aperte contenenti quantificatori sono suddivise in 4 differenti tipologie e vengono identificate da una vocale maiuscola A, I, E, O :

	<i>Universale affermativa</i>	<i>Esempi</i>	<i>Simbolo</i>
<i>Universale affermativa</i>	Tutti i B sono C Ogni B è C	Tutti i cani hanno la coda	A (è la prima vocale di Affirmo)
<i>Universale negativa</i>	Nessun B è C Tutti i B non sono C Ogni B non è C	Nessun bambino ha il diario	E (è la prima vocale di Nego)
<i>Particolare affermativa</i>	Esiste un B che è C	Un bambino è seduto	I (è la seconda vocale di Affirmo)
<i>Particolare negativa</i>	Esiste B che non è C	Qualche bambino non ha lo zaino	O (è la seconda vocale di Nego)

Possiamo rappresentare insiemisticamente queste proposizioni, scegliendo sempre la rappresentazione più generale. La presenza di un puntino nell'insieme significa che c'è almeno un elemento.



Per memorizzare i tipi, è possibile fare riferimento alla figura detta 'quadrato delle opposizioni':

Universale affermativa A	Universale negativa E
Particolare affermativa I	Particolare negativa O

**Definizione** Due affermazioni aperte, relative allo stesso universo, sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di verità.

**Esempio**  $x \leq 3$  è equivalente a  $x < 4$  nell'universo dei numeri naturali, ma non è equivalente nell'universo dei numeri reali.

**Teorema** Per ogni affermazione aperta  $p(x)$ ,

(1) Negare che una proposizione sia vera per tutti gli  $x$  equivale a mostrare che esiste un  $x$  per cui la proposizione è falsa:

$$\neg(\forall x, p(x)) \text{ è equivalente a } \exists x, \neg p(x)$$

(2) Negare l'esistenza di un  $x$  per il quale la proposizione sia vera, equivale a mostrare che, per tutti gli  $x$ , la proposizione è falsa:

$$\neg(\exists x, p(x)) \text{ è equivalente a } \forall x, \neg p(x)$$

**Dimostrazione** (1)  $\neg(\forall x, p(x))$  è vero se e solo se  $(\forall x, p(x))$  è falso  
 se e solo se l'insieme di verità di  $p(x)$  non è tutto l'universo  
 se e solo se l'insieme di verità di  $\neg p(x)$  è non vuoto,  
 se e solo se  $\exists x, \neg p(x)$  è vero.

(2) Svolgere per esercizio (simile alla precedente).

**Sillogismi condizionali**

Il ragionamento è un movimento della mente tramite il quale passiamo da alcune affermazioni – confrontate tra loro – alla formulazione di una nuova affermazione, che segue necessariamente da quelle precedenti.

Un **sillogismo** (ragionamento concatenato) è un argomento formato da due proposizioni (dette *premesse*) e una terza proposizione, detta *conclusione*. Diciamo che la conclusione *discende logicamente* dalle premesse, o è *logicamente valida*, quando la conclusione resta vera in *tutti* i casi nei quali le premesse sono vere.

In un **sillogismo condizionale**, una delle due premesse è una proposizione condizionale, mentre l'altra premessa afferma la verità o la falsità di uno tra antecedente o conseguente. La premessa che è una proposizione condizionale è detta **premessa maggiore** (ed è della forma *se p allora q*), mentre l'altra premessa è detta **premessa minore** (ed è data dalla proposizione *p* in forma affermativa o negativa oppure dalla proposizione *q* in forma affermativa o negativa). La **conclusione** può essere la proposizione *p* in forma affermativa o negativa oppure la proposizione *q* in forma affermativa o negativa (ma *p* e *q* non coincidono).

In un sillogismo condizionale, per discutere se la conclusione è logicamente valida, si suppone che le due premesse siano vere (indipendentemente dal fatto che a volte non sembrano ragionevoli) e si verifica se la verità della conclusione segue utilizzando solo le informazioni date dalle premesse.

**Esempi:**

<p><i>Premessa maggiore:</i> Se mi annoio, vado a teatro.  <i>Premessa minore:</i> Mi annoio  <i>Conclusione:</i> Vado a teatro</p>	<p><i>Premessa maggiore:</i> Se indosso il cappotto lungo, inciampo.  <i>Premessa minore:</i> Inciampo  <i>Conclusione:</i> indosso il cappotto lungo</p>
<p>in questo caso, la conclusione è valida</p>	<p>conclusione non valida, perchè i motivi per cui inciampo possono essere tanti.                  E' possibile che io indossi il cappotto lungo, e la conclusione affermi un fatto vero, ma il ragionamento non è corretto.</p>

Si possono presentare solo quattro casi di premesse per un sillogismo condizionale (le due premesse vengono raccolte da una parentesi grafa perché stiamo supponendo che siano entrambe vere):

$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
<b>Modus ponens</b> (affermazione dell'antecedente)	<b>affermazione</b> del conseguente	<b>negazione</b> dell'antecedente	<b>Modus tollens</b> (negazione del conseguente)

**Il fatto che sia possibile dedurre una conclusione logicamente corretta dipende solo dalla struttura del sillogismo condizionale, e non dal contenuto delle proposizioni coinvolte.**

	<b>Modus ponens</b>	<b>affermazione del conseguente</b>	<b>negazione dell'antecedente</b>	<b>Modus tollens</b>
<b>Premesse</b>	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
<b>conclusione valida</b>	<i>q</i>	non ci sono conclusioni valide	non ci sono conclusioni valide	$\neg q$

### Sillogismi categorici

Riprendiamo la classificazione già appresa sulle tipologie delle proposizioni aperte semplici che contengono quantificatori (le chiamiamo **asserzioni categoriche**):

1. **Universale affermativa:** “*tutti i B sono C*” L’enunciato afferma che ogni elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Tutti gli italiani sono europei.*

Si designa l’enunciato universale affermativo con la lettera **A** (prima vocale di AFFIRMO)

2. **Particolare affermativa:** “*qualche B è C*” L’enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Qualche italiano è biondo.*

Si designa l’enunciato particolare affermativo con la lettera **I** (seconda vocale di AFFIRMO)

3. **Universale negativa:** “*nessun B è C*” L’enunciato afferma che nessun elemento che ha la proprietà B ha la proprietà C. Esempio: *Nessun corvo sta volando.*

Si designa l’enunciato universale negativo con la lettera **E** (prima vocale di NEGO)

4. **Particolare negativa:** “*qualche B non è C*” L’enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B non ha la proprietà C. Esempio: *Qualche corvo sta volando.*

Si designa l’enunciato particolare negativo con la lettera **O** (seconda vocale di NEGO)

Un sillogismo categorico è dato da due premesse e una conclusione, ciascuna delle quali sia una asserzione categorica. Il **soggetto** e il **predicato** della conclusione devono comparire uno in una premessa, e l'altro nell'altra: *si chiama **premissa maggiore** la premessa che contiene il predicato, **premissa minore** la premessa che contiene il soggetto.* Un ulteriore termine (detto **termine medio**) compare in ciascuna delle premesse ma non nella conclusione. La conclusione è detta *logicamente valida* se è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere.

Il **modo** di un sillogismo in forma normale è dato dai tipi delle proposizioni categoriche in forma normale che esso contiene: A, E, I, O. Il modo viene identificato da una sequenza di tre lettere date in ordine definito, di cui la prima indica il tipo della premessa maggiore del sillogismo, la seconda il tipo della premessa minore, la terza il tipo della conclusione.

La **figura** di un sillogismo categorico indica la posizione del termine medio nelle premesse, posizione che può variare. Ci possono essere solo 4 possibili figure diverse in cui rispettivamente il termine medio può essere:

- prima figura: soggetto della premessa maggiore e predicato della premessa minore;
- seconda figura: predicato di entrambe le premesse;
- terza figura: soggetto di entrambe le premesse;
- quarta figura: predicato della premessa maggiore e soggetto della premessa minore.

Ci sono 64 modi diversi e 256 forme distinte (in base a modo e figura) possibili dei sillogismi categorici. Tuttavia, solo in pochi casi la conclusione è logicamente valida.

#### Esempi di sillogismi categorici e loro classificazione

	modo	figura	conclusione valida
Premessa maggiore: Tutti <b>gli studenti</b> <b>amano cantare</b> . Premessa minore: <b>Mario</b> è <b>uno studente</b> . Conclusione: <b>Mario</b> <b>ama cantare</b> .	A II	I°	SI
Premessa maggiore: Qualche <b>idraulico</b> è <b>giovane</b> . Premessa minore: Qualche <b>insegnante</b> è <b>giovane</b> . Conclusione: <b>Qualche insegnante</b> è <b>un idraulico</b> .	III	II°	NO
Premessa maggiore: Qualche <b>barbiere</b> <b>non è raffreddato</b> Premessa minore: Tutti <b>i barbieri</b> <b>sono biondi</b> . Conclusione: <b>Qualche biondo</b> <b>non è raffreddato</b> .	OA O	III°	SI
Premessa maggiore: Qualche <b>consigliere</b> è <b>avvocato</b> . Premessa minore: Tutti <b>gli avvocati</b> <b>sono laureati</b> . Conclusione: <b>Qualche laureato</b> è <b>un consigliere</b> .	IA I	IV°	SI

**Esercizio** Per ciascuno dei sillogismi ipotetici nell'elenco, discuti se la conclusione è logicamente corretta:

- a. Se supero l'esame della patente mi tingo i capelli.  
Ho superato l'esame della patente.  
Conclusione: Mi tingo i capelli.
- b. Se non piove esco per una scampagnata.  
Piove.  
Conclusione: Non esco.
- c. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.  
Non vado al cinema.  
Conclusione: Sono arrivato in ritardo.

**Esercizio** Per ciascuna delle coppie di premesse, discuti se è possibile trovare una conclusione logicamente corretta e, in caso positivo, trascrivila completando il sillogismo ipotetico:

- d. Se non supero l'esame della patente mi tingo i capelli.  
Ho superato l'esame della patente.  
Conclusione: .....
- e. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.  
Vado al cinema.  
Conclusione: .....

**Esercizio** Per ciascuno dei sillogismi categorici, determina modo e figura, fornisci una rappresentazione insiemistica e discuti se la conclusione è logicamente corretta:

- a. Tutti gli oleandri sono arbusti.  
Qualche arbusto è una pianta sempreverdi.  
Conclusione: Tutte le piante sempreverdi sono piante oleandri.
- b. Qualche elefante è addormentato.  
Giorgio è un elefante.  
Conclusione: Giorgio è addormentato.
- c. Nessun musicista è un muratore.  
Alcuni operai edili sono muratori.  
Alcuni operai edili non sono musicisti.

**Esercizio** Scrivi un sillogismo categorico per ciascuna figura.

**Esercizio** Per ciascuna coppia proposta di premesse, completa inserendo una conclusione e stabilisci se la conclusione è logicamente corretta:

- a. Tutti gli autoveicoli devono rispettare il codice stradale.  
Tutti autobus sono autoveicoli.  
.....
- b. I capelli sono sottili.  
Qualche capello è biondo.  
.....
- c. Tutti i roditori sono mammiferi.  
Alcuni animali non sono roditori.  
.....
- d. Tutti i roditori sono mammiferi.  
Alcuni animali non sono mammiferi.  
.....
- e. Nessun ladro è una persona onesta.  
Gianni è un ladro.  
.....
- f. Nessun ladro è una persona onesta.  
Gianni non è un ladro.  
.....