Affermazioni aperte e quantificatori

Definizione Una ***affermazione aperta*** è una affermazione che coinvolge una o più variabili.

Esempi

(a) $5 \geq 3x - 2$

(b) Ha un quaderno rosso.

Una affermazione aperta non è né vera né falsa: essa diventa una proposizione solo quando sono sostituiti valori particolari alle variabili, o è definito l'insieme sul quale va valutata (detto universo). Denotiamo con $p(x)$ una affermazione che coinvolge una variabile, x, e con $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una affermazione aperta nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esempio $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$: $x_2 = 5x_1 - 2x_3 + 7x_4$

Definizione L'*insieme di verità* di una affermazione aperta è la collezione degli oggetti di uno specifico 'universo' che rendono vera l'affermazione.

Esempio $p(x)$: $x < 3$

(i) Se l'universo è l'insieme dei numeri naturali, allora l'insieme di verità è $\{1, 2\}$.

(ii) Se l'universo è l'insieme dei numeri interi, l'insieme di verità è $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.\}$.

Definizione Fissata una affermazione aperta $p(x)$,

a) l'espressione

$$\forall x,\ p(x)$$

si legge 'per ogni x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\forall$ viene detto ***quantificatore universale***.

b) l'espressione

$$\exists\, x,\ p(x)$$

si legge 'per qualche x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\exists$ viene detto ***quantificatore esistenziale***.

c) L'espressione

$$\exists\,!\, x,\ p(x)$$

si legge 'per uno ed un solo x nell'universo considerato, p(x) è vera'. Il simbolo $\exists\,!$ viene detto ***quantificatore di esistenza e unicità*** (ed è un particolare quantificatore esistenziale).

Esempio Nell'universo dei numeri reali $\exists\, x,\ x^2 > 0$ è vera, mentre $\forall\, x,\ x^2 > 0$ è falsa (per $x = 0$).
Nella geometria euclidea, è vera la proposizione *In un cerchio, esiste* ***uno ed un solo*** *punto equidistante da tutti i punti della circonferenza.'* Ci si riferisce al centro del cerchio.

Nel linguaggio corrente, i quantificatori non sono sempre espressi con chiarezza.

Esempi

(1) "*Alcuni quadrilateri sono quadrati*" significa "$\exists\, x$, (x è un quadrilatero e x è un quadrato)".

(2) "*Tutti i quadrati hanno quattro lati.*" significa " Per tutti gli x, se x è un quadrato, allora x ha quattro lati." In generale, "Tutti i $p(x)$ sono $q(x)$." significa "$\forall\, x,\ (\ p(x) \Rightarrow q(x))$".

(3) "*Nessun gatto ama bagnarsi*" significa che "*Ogni gatto non ama bagnarsi*", cioè " Per tutti gli x, se x è un gatto, allora è falso che x ama bagnarsi." L'insieme di verità di "Il gatto x ama bagnarsi" è l'insieme vuoto.

(4) "*C'è un dottore*" può significare oppure "*C'è esattamente un dottore*" oppure "*C'è almeno un dottore*"

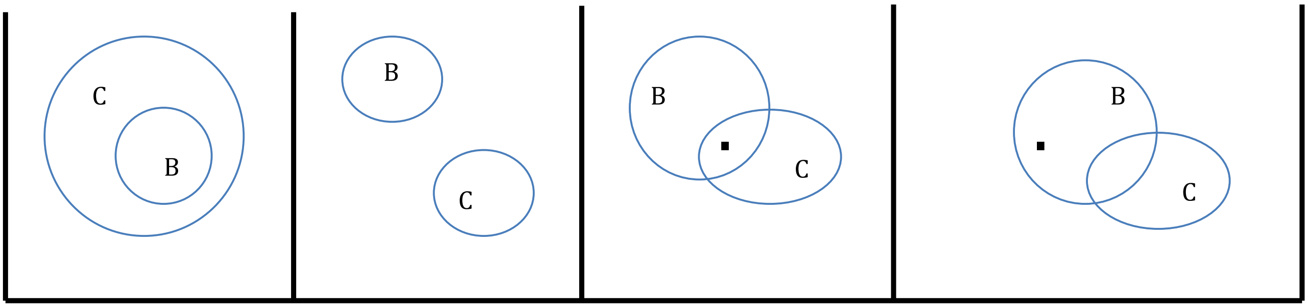
Frasi della forma: "Qualche B...", "Alcuni B..." verrano intesi nel senso di 'Esiste almeno un B....", non escludendo che tale B sia unico.

Le proposizioni aperte contenenti quantificatori possono di 4 differenti tipologie e vengono identificate da una vocale maiuscola A, I, E, O :

	Universale affermativa	***Esempi***	***Simbolo***
Universale affermativa	Tutti i B sono C Ogni B è C	Tutti i cani hanno la coda	A (è la prima vocale di **A**ffirmo)
Universale negativa	Nessun B è C Tutti i B non sono C Ogni B non è C	Nessun bambino ha il diario	E (è la prima vocale di N**e**go)
Particolare affermativa	Esiste un B che è C	Un bambino è seduto	I (è la seconda vocale di Aff**i**rmo)
Particolare negativa	Esiste B che non è C	Qualche bambino non ha lo zaino	O (è la seconda vocale di Neg**o**)

Possiamo rappresentare insiemisticamente queste proposizioni, scegliendo sempre la rappresentazione più generale. La presenza di un puntino nell'insieme significa che c'è almeno un elemento.

Ogni B è C	Nessun B è C	Esiste un B che è C	Esiste un B che non è C



Per memorizzare i tipi, è possibile fare riferimento alla figura detta 'quadrato delle opposizioni':

Universale affermativa A	Universale negativa E
I Particolare affermativa	O Particolare negativa

Definizione Due affermazioni aperte, relative allo stesso universo, sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di verità.

Esempio $x \leq 3$ è equivalente a $x < 4$ nell'universo dei numeri naturali, ma non è equivalente nell'universo dei numeri reali.

Teorema Per ogni affermazione aperta $p(x)$,
(1) Negare che una proposizione sia vera per tutti gli x equivale a mostrare che esiste un x per cui la proposizione è falsa:

$$\neg(\forall\, x,\ p(x)) \text{ è equivalente a } \exists\, x,\ \neg\, p(x)$$

(2) Negare l'esistenza di un x per il quale la proposizione sia vera, equivale a mostrare che, per tutti gli x, la proposizione è falsa:

$$\neg\exists\, x,\ p(x) \text{ è equivalente a } \forall\, x,\ \neg\, p(x)$$

Dimostrazione (1) $\neg(\forall\, x,\ p(x))$ è vero per ogni x se e solo se $(\forall\, x,\ p(x))$ è falso
se e solo se l'insieme di verità di $p(x)$ non è tutto l'universo
se e solo se l'insieme di verità di $\neg p(x)$ è non vuoto,
se e solo se $\exists\, x, \neg\, p(x)$ è vero.
(2) Svolgere per esercizio (simile alla precedente).

Sillogismi condizionali

Un ***sillogismo*** (ragionamento concatenato) è un argomento formato da due proposizioni (dette *premesse*) e una terza proposizione, detta *conclusione*. Diciamo che la conclusione *discende logicamente* dalle premesse, o è *logicamente valida*, quando la conclusione resta vera in *tutti* i casi nei quali le premesse sono vere.

In un ***sillogismo condizionale***, una delle due premesse è una proposizione condizionale, mentre l'altra premessa afferma la verità o la falsità di uno tra antecedente o conseguente. La premessa che è una proposizione condizionale è detta ***premessa maggiore*** (ed è della forma *se p allora q*), mentre l'altra premessa è detta ***premessa minore*** (ed è data dalla proposizione p in forma affermativa o negativa oppure dalla proposizione q in forma affermativa o negativa). La ***conclusione*** può essere la proposizione p in forma affermativa o negativa oppure la proposizione q in forma affermativa o negativa (ma p e q non coincidono).

In un sillogismo condizionale, per discutere se la conclusione è logicamente valida, si suppone che le due premesse siano vere (indipendentemente dal fatto che a volte non sembrano ragionevoli) e si verifica se la verità della conclusione segue utilizzando solo le informazioni date dalle premesse.

Esempi:

Premessa maggiore: Se mi annoio, vado a teatro. *Premessa minore*: Mi annoio *Conclusione*: Vado a teatro	*Premessa maggiore*: Se indosso il cappotto lungo, inciampo. *Premessa minore*: Inciampo *Conclusione*: indosso il cappotto lungo
in questo caso, la conclusione è valida	conclusione non valida, perchè i motivi per cui inciampo possono essere tanti. E' possibile che io indossi il cappotto lungo, e la conclusione affermi un fatto vero, ma il ragionamento non è corretto.

Si possono presentare solo quattro casi di premesse per un sillogismo condizionale (le due premesse vengono raccolte da una parentesi grafa perché stiamo supponendo che siano entrambe vere):

$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{cases}$
Modus ponens (affermazione dell'antecedente)	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens (negazione del conseguente)**

Il fatto che sia possibile dedurre una conclusione logicamente corretta dipende solo dalla struttura del sillogismo condizionale, e non dal contenuto delle proposizioni coinvolte.

	Modus ponens	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens**
Premesse	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{cases}$
conclusione valida	q	non ci sono conclusioni valide	non ci sono conclusioni valide	$\neg q$

Sillogismi categorici

Riprendiamo la classificazione già appresa sulle tipologie delle proposizioni aperte semplici che contengono quantificatori (le chiamiamo **asserzioni categoriche**):

1. ***Universale affermativa: "tutti i B sono C"*** L'enunciato afferma che ogni elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Tutti gli italiani sono europei*.
Si designa l'enunciato universale affermativo con la lettera **A** (prima vocale di **A**FFIRMO)

2. ***Particolare affermativa: "qualche B è C"*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Qualche italiano è biondo.*
Si designa l'enunciato particolare affermativo con la lettera **I** (seconda vocale di AFF**I**RMO)

3. ***Universale negativa: "nessun B è C"*** L'enunciato afferma che nessun elemento che ha la proprietà B ha la proprietà C. Esempio: *Nessun corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato universale negativo con la lettera **E** (prima vocale di N**E**GO)

4. ***Particolare negativa: "qualche B non è C "*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B non ha la proprietà C. Esempio: *Qualche corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato particolare negativo con la lettera **O** (seconda vocale di NEG**O**)

Un sillogismo categorico è dato da due premesse e una conclusione, ciascuna delle quali sia una asserzione categorica. Il ***soggetto*** e il ***predicato*** della conclusione devono comparire uno in una premessa, e l'altro nell'altra: si chiama *premessa maggiore* la premessa che contiene il predicato, *premessa minore* la premessa che contiene il soggetto. Un ulteriore termine (detto ***termine medio***) compare in ciascuna delle premesse ma non nella conclusione. La conclusione è detta *logicamente valida* se è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere.

Il ***modo*** di un sillogismo in forma normale è dato dai tipi delle proposizioni categoriche in forma normale che esso contiene: A, E, I, O. Il modo viene identificato da una sequenza di tre lettere date in ordine definito, di cui la prima indica il tipo della premessa maggiore del sillogismo, la seconda il tipo della premessa minore, la terza il tipo della conclusione.
La ***figura*** di un sillogismo categorico indica la posizione del termine medio nelle premesse, posizione che può variare. Ci possono essere solo 4 possibili figure diverse in cui rispettivamente il termine medio può essere:
- prima figura: soggetto della premessa maggiore e predicato della premessa minore;
- seconda figura: predicato di entrambe le premesse;
- terza figura: soggetto di entrambe le premesse;
- quarta figura: predicato della premessa maggiore e soggetto della premessa minore.

Ci sono 64 modi diversi e 256 forme distinte (in base a modo e figura) possibili dei sillogismi categorici. Tuttavia, solo in pochi casi la conclusione è logicamente valida.

Esempi di sillogismi categorici e loro classificazione

	modo	**figura**	**conclusione valida**
Premessa maggiore: Tutti gli studenti amano cantare. *Premessa minore*: Mario è uno studente. *Conclusione*: Mario ama cantare.	A I I	I°	SI
Premessa maggiore: Qualche idraulico è giovane. *Premessa minore*: Qualche insegnante è giovane. *Conclusione*: Qualche insegnante è un idraulico.	I I I	II°	NO
Premessa maggiore: Qualche barbiere non è raffreddato *Premessa minore*: Tutti i barbieri sono biondi. *Conclusione*: Qualche biondo non è raffreddato.	OAO	III°	SI
Premessa maggiore: Qualche consigliere è avvocato. *Premessa minore*: Tutti gli avvocati sono laureati. *Conclusione*: Qualche laureato è un consigliere.	IAI	IV°	SI