PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 4, MATEMATICA, 16/06/2017

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segna V se è vera, F se è falsa.
Ogni esercizio viene valutato 6 punti se vengono fornite tutte e sole le risposte corrette; altrimenti, la valutazione è 0.

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbf{R}^3$, considera la curva $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (e^t cos\, t, e^t\ sin\, t, e^t)$.

V F (a) γ è una curva regolare;

V F (b) in un parametro d'arco s, la curvatura di γ è $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{s}$;

V F (c) la torsione di γ è $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{s}$ in un opportuno parametro d'arco s;

V F (d) il rapporto tra curvatura e torsione è costante.

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo, sia γ la curva parametrizzata da $x(t) = (t^3 + t^2 + 1, 4t^3 + 5t + 2, t^4 - t^3)$. Considera il punto $P(1, -7, 2)$.

V F (a) il piano per P normale a γ è parallelo al piano di equazione $x + 17y - 7z = 0$;

V F (b) il piano osculatore a γ nel punto P contiene il punto $(-21, -7, 70)$.

V F (c) la binormale a γ in P è ortogonale al vettore di componenti $(5, -13, 0)$.

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbf{R}^3$, considera la superficie S parametrizzata da $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definita da $\phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

V F (a) S è un paraboloide iperbolico;

V F (b) ϕ è una parametrizzazione ortogonale;

V F (c) la curvatura media di S è data da $H = \sqrt{(1 + 4u^2 + 4v^2)}$;

V F (d) $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 4uv$, al variare di (u, v) in $\mathbf{R}^2$, è una parametrizzazione di S.

Esercizio 4. Nello spazio $\mathbf{R}^3$, sia S la superficie che si ottiene ruotando la parabola di equazione $x^2 = 2z$ del piano x, z intorno all'asse z.

V F (a) la superficie S possiede un atlante costituito da un'unica carta;

V F (b) per il punto $A(2, 0, 2)$ passa una geodetica di S con tangente parallela al piano $z = 0$;

V F (c) l'origine è l'unico ombelico di S.

Esercizio 5. Sia S la superficie definita dall'equazione $z = x^2 - 2xy + 2y^2$.

V F (a) I punti di S sono tutti ellittici;

V F (b) S ha esattamente due punti ombelicali;

V F (c) la curva γ parametrizzata da $\gamma(t) = (2cos\, t + 2sint, 2sint, 4)$ è una linea di curvatura per S;

V F (d) S è localmente isometrica al piano in $(0, 0, 0)$.