Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 30 gennaio 2015

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Nello spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti reali, considera le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(\mathbf{A}_1) = (0,0,1)$, $f(\mathbf{A}_2) = (1,1,-1)$, $f(\mathbf{A}_3) = (1,1,0)$, $f(\mathbf{A}_4) = (1,1,1)$.

a) Verifica che $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di V.

b) Determina la dimensione e una base di Ker f e Im f, rispettivamente.

c) Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard di V nel dominio e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$ nel codominio.

2) Nel piano euclideo reale di dimensione 2, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate (x_1, x_2). Considera la retta s_1 di equazioni parametriche

$$x_1 = 1 - 2t, x_2 = 2t \quad (t \in \mathbf{R}),$$

la retta s_2 di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ e la retta s_3 di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 2 = 0$.

a) Determina una equazione cartesiana per s_1.

b) Determina una equazione cartesiana della retta r parallela a s_3 e passante per $P_0 = s_1 \cap s_2$.

c) Determina equazioni parametriche per la retta l per $P_1 = s_1 \cap s_3$ e ortogonale a s_3.

d) Determina la distanza dell'origine O dalla retta s_2.

e) Discuti se esiste un punto $B \in s_2$ tale che il triangolo di vertici O, B, P_0 abbia area 100.

f) Determina il luogo dei punti a distanza 1 da s_1.

3) a) Considera il sistema lineare reale $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ in 4 indeterminate, ove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e sia W il sottospazio affine formato dalle soluzioni.

a) Determina una descrizione parametrica e la dimensione di W.

b) Discuti se esiste una matrice quadrata non nulla reale $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$. In caso di risposta positiva, determina il massimo rango che una tale $\mathbf{B}$ può avere.