Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 4 febbraio 2014

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\, -b + d,\; 2a + 2b + d,\; 2a + b + 2d\,)$$

a) Determina una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.

b) Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\{E_{11}.E_{12}., E_{21}, E_{22}\}$ di V e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$.

c) Scrivi una descrizione parametrica dell'immagine inversa di $(0, 1, 1)$ tramite f e determina, se esiste, una matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a = 0$ e $f(M) = (0, 1, 1)$.

2) In uno spazio affine reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Si consideri la retta r di equazioni $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + 2x_3 + 1 = 0$, e la retta s passante per i punti $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 3, 4)$.

a) Determina equazioni parametriche e cartesiane di un piano α (se esiste) per A parallelo sia ad r che a s.

b) Determina equazioni parametriche per la retta r' passante per A e parallela ad r'.

c) Discuti se r e s sono sghembe.

3) Nello spazio affine numerico reale $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$, considera il sottospazio affine S generato dai punti

$$A(1, 1, 1, 0), B(2, 1, 0, 1), C(1, 1, 2, 3).$$

Controlla se i punti A, B, C sono indipendenti e determina la dimensione ed equazioni parametriche e cartesiane di S.

4) In uno spazio vettoriale V di dimensione finita, considera una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, con $n \geq 3$. Per ogni $i = 1, \dots, n$, considera il sottospazio U_i generato da $\mathcal{B} \setminus \{\mathbf{v}_i\}$.

a) E' vero che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in U_1 + U_2 \setminus (U_1 \cup U_2)$?

b) Determina la dimensione e una base di $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ per $i \neq j$.

c) Trova un esempio (specificando anche il valore di n) con $(i, j) \neq (k, h)$ in cui $V \neq U_{i,j} + U_{k,h}$ e un altro esempio, sempre con $(i', j') \neq (k', h')$, in cui $V = U_{i',j'} + U_{k',h'}$.