Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 25 gennaio 2013

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) In uno spazio vettoriale $V$ di dimensione 3, sia assegnata una base $\mathcal{B}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

a) Determina la dimensione ed una base del nucleo di $T$.

b) Determina la dimensione e una base dell'immagine di $T$.

c) Controlla se l'immagine di $T$ è in somma diretta con il nucleo di $T$.

2) In uno spazio affine reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3)$. Si consideri la retta $r$ di equazioni $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + 1 = 0$ in un riferimento cartesiano, e la retta s passante per i punti $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 2)$.

a) Discuti se $r$ e $s$ sono sghembe.

b) Determina (se tale retta esiste) un sistema di equazioni parametriche per una retta $t$ incidente sia $r$ che $s$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

c) Determina una equazione cartesiana per un piano $\alpha$ passante per l'origine e parallelo sia a $r$ che ad $s$ (se tale piano esiste).

3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate $(x_1, x_2)$. Considera la retta $r$ di equazione $x_1 + 2x_2 - 5 = 0$. Considera, inoltre, l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ abbiamo come immagine, rispettivamente, i punti $A'(2, 3)$, $B'(1, 1)$, $C'(-1, 2)$.

a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità $\varphi$.

b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine $\varphi(r)$ della retta $r$ tramite $\varphi$.

4) Nello spazio affine numerico reale $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$, considera i punti

$$A(1, 0, 1, 1), B(1, 1, 0, 2), C(1, 2, -1, 3).$$

Controlla se i punti $A$, $B$, $C$ sono indipendenti e determina un sistema di equazioni cartesiane normali per il sottospazio da essi generato.

5) Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in sè.

a) Dimostra che la composizione $f^h = f \circ f \cdots \circ f$ è lineare per ogni $h$ naturale..

b) Sia $\mathbf{v}$ un vettore tale che $f^4(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $f^3(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Mostra che i vettori $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{v})$, $f^2(\mathbf{v})$, $f^3(\mathbf{v})$ sono linearmente indipendenti.