Proposizioni e tavole di verità

Una ***proposizione*** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il ***valore di verità*** della proposizione.
Nel contesto di questo insegnamento, una proposizione deve essere decidibile (cioè deve essere vera o, in alternativa, falsa). Le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni non sono proposizioni.
Esempio. Sono proposizioni:

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica* (ove si sia stabilito con precisione la data, il luogo, il calendario utilizzato)
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- *3x = 5*
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo, Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora ritenere possibili entrambe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.

Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscole, come p, q. L'utilizzo di una lettera per simboleggiare una proposizione è utile in varie situazioni. Un primo esempio è legato alla possibilità di rappresentare in una breve tabella i possibili valori di verità, elencando tutti i casi possibili: tali tabelle sono dette ***tavole (o tabelle) di verità***.

Esempio. (V indica Vero, F indica Falso) Se abbiamo solo la proposizione p, la tavola della verità è:

p
V
F

Se abbiamo due proposizioni p e q, la tavola diventa:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E' possibile che dichiarazioni diverse (ma che hanno lo stesso significato) esprimano la stessa proposizione. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday, Aujourd'hui c'est dimanche* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità). Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due proposizioni hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) sono considerati come se fossero la stessa proposizione e diciamo che sono logicamente equivalenti: dunque, **due proposizioni sono *(logicamente) equivalenti* se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi)**.

Una ***tautologia*** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele.*
Una ***contraddizione*** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.
Un ***paradosso*** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "*questa frase è falsa*".

Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.

1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$.

2. Due proposizioni p e q sono collegate con un ***connettivo logico*** tra i seguenti:

operazione su p e q	**simbolo**	**lettura del simbolo**	**esempio**
congiunzione logica	$p \wedge q$	p e q	*Guardo un film e mangio il pop-corn* *Sono richiesti l'invito e l'abito da sera*
disgiunzione logica	$p \vee q$	p o q	$x< y$ o $x>y$ *Leggo un libro o vado al cinema* *L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.*
implicazione logica	$\Rightarrow$	p implica q se p allora q	*Se ho la febbre, sono malato* *Se piove, andiamo al cinema*
coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	p se e solo se q	*Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto* *Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali*

Viceversa, individuando i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una ***proposizione elementare*** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale e gli è arrivata una telefonata.*

Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

Negazione

La negazione di una proposizione *p* è la proposizione che è vera quando *p* è falsa e falsa quando *p* è vera. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg\, p$ (che si legge *non* p).

Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

p	$\neg p$
V	F
F	V

Esempi: *p : mangio la mela*
¬p:non mangio la mela / non è vero che mangio la mela
q : dormo per terra
¬q:non dormo per terra/non è vero che dormo per terra

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza: $\neg(\neg p)$ è equivalente a p:

p	$\neg p$	$\neg\,(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Osserva: la negazione richiede una particolare attenzione quando nella frase compaiono dei quantificatori; infatti, *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

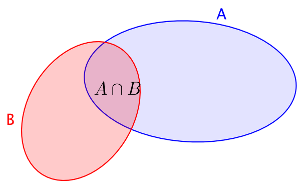
p : tutti i bambini parlano	*¬p:non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla*
q : non vado mai in piscina	*¬q:qualche volta vado in piscina/almeno una volta vado in piscina*
r: un alunno partecipa alla gara	*¬r:nessun alunno partecipa alla gara*
t:nessun genitore mi ha parlato	*¬t:mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato*

Rappresentazione insiemistica

Gli insiemi possono essere rappresentati attraverso diagrammi di Eulero-Venn; è importante ricordare che l'aver disegnato un diagramma, non comporta necessariamente che gli insiemi rappresentati siano non vuoti.

Dato un insieme A, un suo sottoinsieme C è un insieme tale che tutti gli elementi di C sono anche elementi di A. In tal caso, scriviamo $C \subseteq A$.

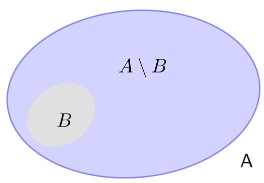
Dati due insiemi A e B, si denota con $\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$ l'insieme formato dagli elementi comuni di A e B: tale insieme è detto **intersezione di A e B**. L'insieme $A \cap B$ è un sottoinsieme sia di A che di B e può essere raffigurato come la parte più scura in

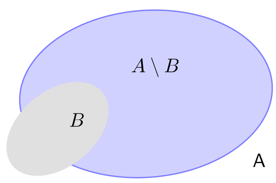


L'insieme unione di A e B, denotato con $A \cup B$, è invece l'insieme di tutti gli elementi che stanno in A o in B: $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$

L'insieme complementare di B in A, denotato da A\B, è formato da tutti gli elementi di A che non sono in B: $\mathbf{A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}}$.

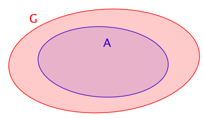
La definizione di A\B resta vera anche se B è un sottoinsieme di A.





Possiamo rappresentare le proposizioni in vari modi attraverso insiemi.

Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*. Possiamo rappresentare la proposizione *p* disegnando l'insieme G delle cose gialle e disegnando l'insieme A delle rose che



stiamo considerando come sottoinsieme di G:

Alternativamente, possiamo disegnare l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme B delle rose gialle. L'affermazione che la proposizione *p* sia vera, equivale al fatto che il sottoinsieme B coincide con A (perché non ci sono rose che non siano gialle). La negazione $\neg p$, significa che *non è vero che le rose sono gialle*: dunque, equivale a dire che il complementare A\B di B in A è non vuoto.

Esercizio: Mostra che $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Congiunzione

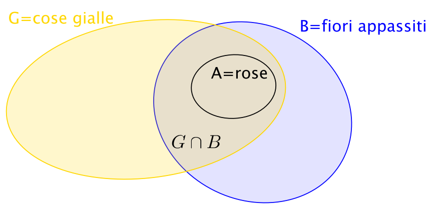
La ***congiunzione*** di due proposizioni p e q è una proposizione che è vera quando entrambe p e q sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni p e q viene denotata con $p \wedge q$, che si legge p e q.
La tavola della verità di $p \wedge q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: - Determina la tavola della verità di $q \wedge p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \wedge q) \wedge r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\neg (p \wedge q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\neg p) \wedge q$.
- Determina la tavola della verità di $p \wedge (\neg q)$.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la congiunzione $p \wedge q$*: le rose sono gialle e appassite*. L'insieme delle rose gialle e appassite è l'intersezione dell'insieme delle rose gialle con l'insieme delle rose appassite.

Possiamo rappresentare verità della congiunzione $p \wedge q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione $p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'intersezione $G \cap B$:



Disgiunzione

La ***disgiunzione*** di due proposizioni p e q è una proposizione che è falsa quando entrambe p e q sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

La tavola della verità di $p \vee q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

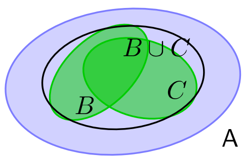
E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni p e q:
a) la *disgiunzione inclusiva* quando p e q possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

E' richiesto il biglietto o l'abbonamento

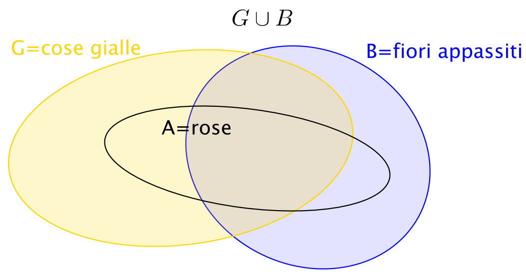
b) la *disgiunzione esclusiva* quando p e q non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con $p \dot{\vee} q$)

$2>3$ *oppure* $2<3$

In italiano non si distingue in modo chiaro tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.
Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la disgiunzione $p \vee q$*: le rose sono gialle o appassite*.
L'insieme delle rose che sono gialle o appassite coincide con l'unione dell'insieme B delle rose gialle e dell'insieme C delle rose appassite. La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui $B \cap C$ risulta vuoto.



Possiamo rappresentare la verità della disgiunzione $p \vee q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione $p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'unione $G \cup B$:



Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \vee p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \vee q) \vee r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \vee q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \vee q$.
- Determina la tavola della verità di $p \vee (\sim q)$.

Equivalenza

Due proposizioni sono ***(logicamente) equivalenti*** se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

Esempio: Mostra che $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ sono equivalenti.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.
Ad esempio, possiamo pensare
p: questo angolo è acuto
q: questo angolo è ottuso
$\neg(p \vee q)$: *non è vero che questo angolo è acuto o ottuso.*
$\neg p \wedge \sim q$: *questo angolo non è acuto e non è ottuso.*

Esercizi Mostra che la congiunzione è commutativa, cioè $p \wedge q$ è equivalente a $q \wedge p$
- Mostra che la congiunzione è associativa, cioè $(p \wedge q) \wedge r$ è equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$
- Mostra che $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ sono equivalenti.

Esercizio Costruisci la tavola della verità per $(p \vee \neg q) \wedge r$.
Dobbiamo considerare tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni semplici coinvolte, e dobbiamo quindi considerare $2^3 = 8$ possibilità.

p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Proposizioni condizionali

Una ***proposizione condizionale*** è una proposizione della forma $p \Rightarrow q$, ove p e q siano due proposizioni. Ad esempio, se *p: il rubinetto è chiuso* e *q: non esce acqua dal mio lavandino*, otteniamo la proposizione condizionale *Se il rubinetto è chiuso, non esce acqua dal mio lavandino*.
Va osservato che non è rilevante che l'implicazione sia vera o falsa.
Esempi di una proposizione condizionale vera Se x è un numero pari, allora $x + 1$ è un numero dispari (b) Se $2 < 3$, allora $4 < 9$. (c) Se $3 < 2$, allora $9 < 4$.
Esempi di una proposizione condizionale falsa (a) Se x è un numero pari, allora $x + 2$ è un numero dispari. (b) Se $2 < 3$, allora $9 < 4$.
Esercizio: Trova la negazione della proposizione 'Se corro, allora ho sete'.

In una proposizione condizionale $p \Rightarrow q$, la proposizione p è detta ***antecedente (o ipotesi)***, mentre la proposizione q è detta ***conseguente (o tesi)***. Diciamo anche che p è ***condizione sufficiente*** per q, e che q è ***condizione necessaria*** per p.

La tavola della verità di una proposizione condizionale è la seguente (notare che, se l'ipotesi è falsa, si assume che l'implicazione sia vera sempre, interpretando l'implicazione come una promessa che non viene messa in discussione quando l'antecedente non accade):

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ad ogni proposizione condizionale $p \Rightarrow q$ risultano associate in modo formale altre proposizioni condizionali:

$q \Rightarrow p$ *l'implicazione inversa*

$\neg p \Rightarrow \neg q$ *l'implicazione contraria*

$\neg q \Rightarrow \neg p$ *l'implicazione contronominale*

Esempio: Considera la proposizione condizionale 'Se due rette del piano sono ortogonali, sono incidenti'. L'implicazione inversa è 'Se due rette del piano sono incidenti, allora sono ortogonali'. L'implicazione contronominale è 'Se due rette del piano non sono incidenti, non sono ortogonali.'

Esercizio: Trova l'implicazione inversa e la contronominale di 'Se corro, allora ho sete'.

Ogni proposizione condizionale è equivalente alla sua contronominale:

p	q	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\boldsymbol{\neg q \Rightarrow \neg p}$
V	V	F	F	**V**
V	F	V	F	**F**
F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	**V**

Esercizio: (a) Trova una implicazione condizionale vera la cui inversa sia falsa.

(b) $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge \neg q$.

(c) $\neg(p \wedge q)$ è equivalente a $p \Rightarrow \neg q$.

(d) $p \wedge (q \vee r)$ è equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(e) $p \vee (q \wedge r)$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Una ***coimplicazione*** $p \Leftrightarrow q$ è vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità. La corrispondente tavola della verità è:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esercizio: $p \Leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Le coimplicazioni sono frequenti in matematica; le definizioni sono spesso coimplicazioni.

Esempi (a) Un quadrilatero è un rettangolo se e solo se ha tutti gli angoli retti.

(b) $x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ or } x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ or } x = 4.$

Sitografia

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/economia/logicainsiemistica.pdf Prof. Garetto, Elementi di Logica,
https://www.youtube.com/watch?v=JczNoE43IuM proposizioni, negazione, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=_fjT7fnvttU congiunzione, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=lJX1AHKHFKU disgiunzione inclusiva, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=ehDBklEAx9Y disgiunzione esclusiva, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=Z7P-H5iA8QY implicazione
https://www.youtube.com/watch?v=QCnB4bi1ay0 doppia implicazione