PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 4, MATEMATICA, 16/06/2017

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segna V se è vera, F se è falsa.
Ogni esercizio viene valutato 6 punti se vengono fornite tutte e sole le risposte corrette; altrimenti, la valutazione è 0.

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbf{R}^3$, considera una curva $\sigma : (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (1+cos\, t, sin\, t, 2\, sin\frac{t}{2})$.

V F (a) σ è una curva regolare piana;
V F (b) il sostegno di σ è contenuto in una sfera di raggio 1;
V F (c) la torsione di σ è costante;
V F (d) σ è curva geodetica nella superficie sferica che la contiene.

Esercizio 2. Nel piano euclideo, considera i punti $F_1(-1, 0)$ e $F_2(1, 0)$. Se P è un punto del piano, denota con d_i la distanza tra P e F_i, $(i = 1, 2)$. Fissa un numero reale positivo $b > \sqrt{2}$ e considera il luogo γ dei punti P tali $d_1\, d_2 = b^2$.

V F (a) γ è una varietà differenziabile di dimensione 1 definita da una equazione algebrica di secondo grado;
V F (b) γ è definito implicitamente dall'equazione $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2 = b^2$.
V F (c) l'iperbole equilatera di centro l'origine (assi di simmetria uguali agli assi coordinati) e avente F_1 e F_2 come vertici, interseca γ formando un angolo acuto;
V F (d) il valore assoluto della curvatura nei punti di γ dipende solo dalla distanza dall'origine.

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbf{R}^3$, considera una curva regolare $\sigma : (0, 1) \to \mathbf{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco con curvatura mai nulla. Sia $X : (0, 1) \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}^3$ la superficie regolare definita da $X(u, v) = \sigma(u) + v\, \mathbf{b}(u)$, ove ϵ sia un numero reale positivo sufficientemente piccolo e con $\mathbf{b}(u)$ si indica la binormale a σ in $\sigma(u)$.

V F (a) la superficie X ha curvatura totale nulla;
V F (b) σ è geodetica nella superficie X;
V F (c) la superficie X ha curvatura media nulla.

Esercizio 4. Considera l'applicazione $\sigma : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(x) = (x, 0,\, 1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$. Sia S la superficie di $\mathbf{R}^3$ ottenuta ruotando σ attorno all'asse z.

V F (a) S è regolare in $(0, 0, 0)$ con piano tangente $z = x$;
V F (b) S non ha punti parabolici;
V F (c) S ha solo punti iperbolici;
V F (d) S non è localmente diffeomorfa al piano.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo, considera la quadrica Γ di equazione $3x^2+2y^2+3z^2+2xz-4 = 0$.

V F (a) Γ è un iperboloide a punti ellittici;
V F (b) il piano tangente a Γ nel punto $P(0, \sqrt{2}, 0)$ ha equazione $y = \sqrt{2}$.
V F (c) è sufficiente una rotazione per portare Γ in forma canonica;
V F (d) i piani che contengono l'asse z intersecano Γ lungo linee asintotiche.