PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 CON ELEMENTI DI STORIA 2, MATEMATICA, 16/06/2017

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette; altrimenti, la valutazione è 0.
Le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritti come vettori righe.

Test 1. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Siano assegnati il punto $A(1, 3, -7\,i)$ e la retta r di equazioni $4\,x + (1 + 7i)\,y + 2\,z - 6 = 0, 2\,x + 3i\,y - 4 = 0$:

V F (a) la retta r non ha punti in comune con la retta complessa coniugata $\overline{r}$;
V F (b) il piano di equazione $2i\,x - 3i\,y + z = 0$ passa per A e è parallelo a r;
V F (c) il piano di equazione $3\,x - y + 5z + 8 = 0$ è reale e non interseca r.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, siano fissati un sistema di riferimento ortonormale reale e il piano α di equazione $(2 - i)x_1 - x_2 + (1 - i)x_3 = 0$:

V F (a) esiste una unica retta isotropa passante per $A(2, -i, 3i)$ parallela a α;
V F (b) esiste una retta reale ortogonale a α;
V F (c) il piano α interseca il coniugato $\overline{\alpha}$ in una retta reale.

Test 3. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2$, considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [2x_0 + 2x_1 + x_2, 4x_0 + 5x_1 + 8x_2, -5x_0 - 6x_1 - 8x_2].$$

V F (a) il punto $[-1, 2, -1]$ è fisso per φ;
V F (b) esistono tre punti non allineati che sono fissi per φ;
V F (c) esiste una unica retta per $[-1, 2, -1]$ che sia globalmente fissa rispetto a φ.

Test 4. Nello spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbb{R}^4$, considera il sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$ e lo spazio vettoriale quoziente V/W:

V F (a) le classi $[1, -1, 0, -1]$ e $[0, -2, 0, 0]$ coincidono;
V F (b) il quoziente V/W ha dimensione 2;
V F (c) il sottospazio di V generato da $(2, -1, 1, -1)$ e $(-1, 1, 0, 0)$ è isomorfo alla propria immagine tramite la proiezione canonica sul quoziente.

Test 5. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, considera la retta r per $A[0,1,2,-1]$ e $B[-1,0,1,-1]$. Siano $[u_0,u_1,u_2,u_3]$ le coordinate duali nello spazio proiettivo duale.

V F (a) il piano di equazione $x_0-2x_2+x_3=0$ contiene la retta r;
V F (b) la retta passante per A e B contiene il punto $C[1,1,0,-1]$;
V F (c) il sottospazio duale di r è sghembo rispetto alla retta dello spazio duale di equazione $-u_0+u_2-u_3=0, u_0-u_1=0$.

Test 6. Nello spazio vettoriale numerico reale $V=\mathbb{R}^3$ considera la base $\mathcal{B}$ composta da $\mathbf{v}_1=(1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2=(1,3,4)$, $\mathbf{v}_3=(0,1,2)$. Nello spazio vettoriale duale V^* sia fissato $\mathbf{v}^*=\mathbf{e}_1^*-\mathbf{e}_2^*+3\mathbf{e}_3^*\in V^*$.

V F (a) il vettore $\mathbf{v}^*$ appartiene alla base duale di $\mathcal{B}$;
V F (b) la forma lineare φ su V definita da $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2+3x_3$ è proporzionale a $\mathbf{v}^*$;
V F (c) Ker $\mathbf{v}^*$ ha intersezione non nulla con il nucleo di ogni elemento di V^*.

Test 7. Considera l'inclusione del piano affine reale nel piano proiettivo numerico reale data da $(x,y)\mapsto[x_0,x_1,x_2]=[1,x,y]$. Considera la retta r di equazione $5x-y=0$ e il punto $A(1,2)$.

V F (a) il birapporto dei punti (1, 5), (0,0), (-1,5), (1,1) è [2,1];
V F (b) il completamento proiettivo della retta parallela a r e passante per A ha equazione omogenea $2x_1-x_2=0$;
V F (c) il completamento proiettivo di r e la retta proiettiva di equazione $5x_0-x_1+x_2=0$ non hanno punti impropri in comune.

Test 8. Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica di equazione

$$2x^2+2y^2-4xy-3x+3y-2=0.$$

V F (a) γ è una iperbole;
V F (b) la retta $x-y=0$ contiene un punto doppio per γ.
V F (c) γ ha infiniti punti reali.

Test 9. Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica di equazione

$$2x^2-3y^2+5xy+x-3y=0.$$

V F (a) γ è una iperbole;
V F (b) la retta di equazione $x+3y+1=0$ interseca γ in due punti distinti;
V F (c) γ ha rango 2 e la retta di equazione $3x+2y+1=0$ contiene un suo punto doppio.

Test 10. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x=2y^2+y+1$:

V F (a) è una parabola;
V F (c) ha direttrice parallela all'asse y e vertice nel punto $(1,0)$.
V F (d) ha un asse di simmetria di equazione $x-2y=0$.

Cenni di soluzione

Test 1 Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Siano assegnati il punto $A(1,3,-7\,i)$ e la retta r di equazioni $4\,x+(1+7i)\,y+2\,z-6=0, 2\,x+3i\,y-4=0$:

F (a) la retta r non ha punti in comune con la retta complessa coniugata $\overline{r}$;
F (b) il piano di equazione $2i\,x-3i\,y+z=0$ passa per A e è parallelo a r;
F (c) il piano di equazione $3\,x-y+5z+8=0$ è reale e non interseca r.

La retta r passa per il punto reale $B(2,0,-1)$; un suo vettore direttore $\mathbf{v}$ ha componenti $(3i,-2,1+i)$ e genera un sottospazio non reale. Dunque r non è reale e interseca la retta coniugata nel suo unico punto reale, B.
Il piano di equazione $2i\,x-3i\,y+z=0$ non contiene A.
Il piano di equazione $3\,x-y+5z+8=0$ è reale (perchè descritto da una equazione cartesiana reale) ma non è parallelo a $\mathbf{v}$ (e dunque interseca propriamente r).

Test 2 Nello spazio euclideo complessificato, siano fissati un sistema di riferimento ortonormale reale e il piano α di equazione $(2-i)x_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 0$:

F (a) esiste una unica retta isotropa passante per $A(2,-i,3i)$ parallela a α;
F (b) esiste una retta reale ortogonale a α;
V (c) il piano α interseca il coniugato $\overline{\alpha}$ in una retta reale.

Il piano α non è isotropo. Dunque, per ogni punto passano due rette isotrope parallele a α. Ogni retta ortogonale a α è parallela al vettore $\mathbf{v}$ di componenti $(2-i,-1,1-i)$; poichè tale vettore genera un sottospazio non reale, tutte le rette ortogonali a α non sono reali. Poichè non è reale, il piano α interseca il coniugato in una retta reale.

Test 3 Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2$, considera la proiettività $\varphi:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ definita da

$$\varphi[x_0,x_1,x_2]=[2x_0+2x_1+x_2,4x_0+5x_1+8x_2,-5x_0-6x_1-8x_2].$$

V (a) il punto $[-1,2,-1]$ è fisso per φ;
F (b) esistono tre punti non allineati che sono fissi per φ;
F (c) esiste una unica retta per $[-1,2,-1]$ che sia globalmente fissa rispetto a φ.

Il vettore $\mathbf{v}=(-1,2,-1)\in\mathbb{R}^3$ è un autovettore di autovalore -1 per la lineare sovrastante φ_l definita da $\varphi_l(x_0,x_1,x_2)=(2x_0+2x_1+x_2,4x_0+5x_1+8x_2,-5x_0-6x_1-8x_2)$, e dunque il punto $P[-1,2,-1]$ è fisso per φ. L'applicazione φ_l ha autovalori -1 (con molteplicità geometrica 1 e molteplicità algebrica 2) e 1 (con molteplicità algebrica e geometrica 1, e autovettore $(3,-1,-1)$). Dunque φ ha due soli punti fissi P e $Q[3,-1,-1]$. La retta per P e Q è sicuramente globalmente fissa per φ, ma anche la retta per P e $T[0,1,-1]$ ha la stessa proprietà (tale retta è il proiettivizzato del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ corrispondente al blocco di Jordan di autovalore -1). In dettaglio, $\varphi_l(0,1,-1)=(1,-3,2)=-(-1,2,-1)-(0,1,-1)$. I punti P, Q, T non sono allineati.

Test 4 Nello spazio vettoriale numerico reale $V=\mathbb{R}^4$, considera il sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1=(1,0,0,-1)$ e lo spazio vettoriale quoziente V/W:

F (a) le classi $[1,-1,0,-1]$ e $[0,-2,0,0]$ coincidono;
F (b) il quoziente V/W ha dimensione 2;

V (c) il sottospazio di V generato da $(2,-1,1,-1)$ e $(-1,1,0,0)$ è isomorfo alla propria immagine tramite la proiezione canonica sul quoziente.

Si ha $(1,-1,0,-1)-(0,-2,0,0)=(1,1,0,-1)\notin W$, e duqque le classi $[1,-1,0,-1]$ e $[0,-2,0,0]$ sono distinte. Lo spazio quoziente V/W ha dimensione uguale a dim V - dim $W=4-1=3\neq 1$. il sottospazio U di V generato da $(2,-1,1,-1)$ e $(-1,1,0,0)$ ha intersezione nulla con W, perchè i vettori $(1,0,0,-1)$, $(2,-1,1,-1)$, $(-1,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti. Dunque la restrizione a U della proiezione canonica $V\to V/W$ è iniettiva.

Test 5 Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, considera la retta r per $A[0,1,2,-1]$ e $B[-1,0,1,-1]$. Siano $[u_0,u_1,u_2,u_3]$ le coordinate duali nello spazio proiettivo duale.

F (a) il piano di equazione $x_0-2x_2+x_3=0$ contiene la retta r;
F (b) la retta passante per A e B contiene il punto $C[1,1,0,-1]$;
F (c) il sottospazio duale di r è sghembo rispetto alla retta dello spazio duale di equazione $-u_0+u_2-u_3=0, u_0-u_1=0$.

Il piano di equazione $x_0-2x_2+x_3=0$ non contiene il punto B. I punti A, B, C non sono allineati, perchè i rispettivi vettori delle coordinate omogenee sono linearmente indipendenti. Nello spazio proiettivo duale e in coordinate duali, il sottospazio duale $r^\star$ di r ha dimensione proiettiva 1 e equazioni cartesiane $u_1+2u_2-u_3=0, -u_0+u_2-u_3=0$. Il sottospazio $U^\star$ di equazioni $-u_0+u_2-u_3=0, u_0-u_1=0$ ha dimensione proiettiva 1. Le rette $r^\star$ e $U^\star$ sono contenute nel medesimo piano proiettivo di equazione $-u_0+u_2-u_3=0$ e quindi hanno intersezione non vuota.

Test 6 Nello spazio vettoriale numerico reale $V=\mathbb{R}^3$ considera la base $\mathcal{B}$ composta da $\mathbf{v}_1=(1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2=(1,3,4)$, $\mathbf{v}_3=(0,1,2)$. Nello spazio vettoriale duale V^* sia fissato $\mathbf{v}^*=\mathbf{e}_1^*-\mathbf{e}_2^*+3\mathbf{e}_3^*\in V^*$.

F (a) il vettore $\mathbf{v}^*$ appartiene alla base duale di $\mathcal{B}$;
V (b) la forma lineare φ su V definita da $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2+3x_3$ è proporzionale a $\mathbf{v}^*$;
V (c) Ker $\mathbf{v}^*$ ha intersezione non nulla con il nucleo di ogni elemento di V^*.

Si ha che $\mathbf{v}^*(\mathbf{v}_1)=-2$; se $\mathbf{v}^*$ appartenesse alla base duale, tale valore sarebbe stato 1 o 0. Le forme lineari φ e $\mathbf{v}^*$ coincidono, e dunque sono proporzionali. La forma lineare $\mathbf{v}^*$ è non nulla, e quindi ha nucleo W di dimensione 2. Tale nucleo interseca sicuramente il nucleo della forma lineare nulla. Se, invece, ψ è una forma lineare non nulla, il suo nucleo ha dimensione 2, e interseca W in un sottospazio di dimensione almeno 1 in base alla formula di Grassmann.

Test 7 Considera l'inclusione del piano affine reale nel piano proiettivo numerico reale data da $(x,y)\mapsto[x_0,x_1,x_2]=[1,x,y]$. Considera la retta r di equazione $5x-y=0$ e il punto $A(1,2)$.

F (a) il birapporto dei punti (1, 5), (0,0), (-1,5), (1,1) è [2,1];
F (b) il completamento proiettivo della retta parallela a r e passante per A ha equazione omogenea $2x_1-x_2=0$;
V (c) il completamento proiettivo di r e la retta proiettiva di equazione $5x_0-x_1+x_2=0$ non hanno punti impropri in comune.

I punti $(1,5),(0,0),(-1,5),(1,1)$ non sono allineati. Il completamento proiettivo di ogni retta parallela a r interseca la retta impropria $x_0 = 0$ nel punto $[0,1,5]$. La retta proiettiva di equazione $5x_0 - x_1 + x_2 = 0$ ha punto improprio $[0,1,1] \neq [0,1,5]$.

Test 8 Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica di equazione

$$2x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x + 3y - 2 = 0.$$

F (a) γ è una iperbole;
F (b) la retta $x - y = 0$ contiene un punto doppio per γ.
V (c) γ ha infiniti punti reali.

Si utilizza l'inclusione del piano affine nel piano euclideo data da $(x,y) \mapsto [x,y,1]$. La conica γ ha matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, con $\det A = 0$, $\det A_{33} = 0$: è dunque una conica propria degenere con un unico punto improprio $[1,1,0]$ (e tale punto è reale). Essa ha rango 2, e quindi ha un unico punto doppio Q (necessariamente reale). La conica γ è dunque formata da una coppia di rette parallele e distinte (e il punto improprio di γ coincide con l'unico punto doppio Q e con il punto improprio di $x - y = 0$). La retta di equazione $x = 0$ interseca γ nei punti reali di coordinate affini $(0,-2)$ e $(0,1/2)$, e dunque è composta da due rette reali, e ha quindi infiniti punti reali. In dettaglio, γ è composto dalle rette di equazione $x - y - 2 = 0$ e $2x - 2y + 1 = 0$.

Test 9 Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica di equazione

$$2x^2 - 3y^2 + 5xy + x - 3y = 0.$$

V (a) γ è una iperbole;
F (b) la retta di equazione $x + 3y + 1 = 0$ interseca γ in due punti distinti;
F (c) γ ha rango 2 e la retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ contiene un suo punto doppio.

La conica γ ha matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, con $\det A = -60 \neq 0$ e $\det A_{33} = -49 < 0$: è dunque una conica propria non degenere a centro (e, in particolare, una iperbole), priva di punti doppi. La retta di equazione $x + 3y + 1 = 0$ interseca γ nel punto $(2,-1)$ e il suo punto improprio appartiene al completamento proiettivo di γ.

Test 10 Nel piano euclideo, la conica di equazione $x = 2y^2 + y + 1$:

V (a) è una parabola;
F (c) ha direttrice parallela all'asse y e vertice nel punto $(1,0)$.
F (d) ha un asse di simmetria di equazione $x - 2y = 0$.

La conica γ ha matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $\det A = -4 \neq 0$ e $\det A_{33} = 0$: è dunque una conica propria non degenere e, in particolare, una parabola. Il punto improprio Q del completamento proiettivo di γ ha coordinate omogenee $[1,0,0]$. L'asse di simmetria di γ ha dunque equazione della forma $y = k$ e non può avere equazione $x - 2y = 0$; in dettaglio, l'asse di simmetria di γ ha equazione $y = -1/4$ e non contiene il punto $(1, 0)$, che quindi non può essere il vertice. Si noti che la polare di $(1, 0)$ (che è tangente a γ in tale punto), non è ortogonale all'asse di di simmetria: ciò dimostra, indipendentemente, che $(1, 0)$ non è il vertice della parabola; il vertice è il punto $(7/8, -1/4)$.