Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = (-2, 2, 1)$, $B = (-1, 2, 2)$ e la retta r_1 di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} .$$

a) Mostrare che la retta r_1 e la retta r_2 contenente A e B sono sghembe.

b) Trovare le coordinate di ciascun punto P che appartiene alla retta r_1 ed è tale che il triangolo ABP abbia area 3.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\, b - 2c,\ 3a + b + 3c,\ 3a + 2b + c\,)$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

---

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \dots, \dots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) = < v, u > \ u \, , \quad \forall \ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ \ dove \ \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.

Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il punto $A(2,-1,0)$ e i piani α, β e γ definiti da

$$\alpha : 2x - 3y + z + 1 = 0\,; \qquad \beta : x - y + z - 2 = 0\,; \qquad \gamma : x - 3y - z - 2 = 0\,.$$

Si denoti con r la retta intersezione tra β e γ.

a) Controllare se la retta r è parallela a α.

b) Determinare una equazioni cartesiana del piano δ contenente il punto A e ortogonale sia ad α che a β.

2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 3 nella variabile x. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (\,-2b + c,\; 3a + 3b + c,\; 3a + b + 2c\,).$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \dots , \dots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) =< v, u > \ u\,, \quad \forall\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad dove \ \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.

Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e il piano α definito da

$$\alpha : 3x - y + 2z + 1 = 0.$$

a) Discutere se esiste un piano β contenente i punti A e B e tale che l'intersezione tra α e β sia una retta parallela al vettore $\vec{AB}$.

b) Determinare equazioni cartesiane della retta r contenuta in α e formata dai punti diα equidistanti da A e B.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $M(2\times 2,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\,b-3d,\ 3a+b+d,\ 3a+2b-2d\,).$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $M(2\times 2,\mathbb{R})$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \ldots, \ldots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) = < v, u > \ u\,, \quad \forall\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ \ dove \ \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.

Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i tre punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (4, 1, 1)$ e la retta r_1 definita da

$$r_1 : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - t \\ z = 3t - 2 \end{cases} .$$

a) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra la retta r_1 e la retta r_2 che contiene i punti A e B.
b) Determinare le coordinate di ciascun punto D appartenente alla retta r_1 e tale che il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D abbia volume 2.

2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 3 nella variabile x.
Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (\,-3b + d,\, 3a + b + d,\, 3a - 2b + 2d\,).$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

---

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \dots, \dots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) =< v, u > \; u \,, \quad \forall \; v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad dove \;\; u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.

Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i tre punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (5, -5, 2)$.
Si denotino con α il piano contenente i punti A, B, C, mentre con r_1 la retta passante per i punti A e B.
a) Determinare l'area de triangolo di vertici A, B, C.
b) Determinare equazioni cartesiane della retta r_2 contenuta nel piano α, parallela alla retta r_1 e equidistante da C e da r_1.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $M(2\times 2,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\,-4c+d,\; 2a+3c+d,\; 2a-c+2d\,)$$

a) Trovare una base di Ker$f$, una base di Imf e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $M(2\times 2,\mathbb{R})$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \ldots, \ldots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) =< v, u > \ u\,, \quad \forall\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad dove\ \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.

Esame di Geometria del 26 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il piano α e la retta l definiti, rispettivamente, da:

$$\alpha : x + y - 2z = 1 \qquad l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

a) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra il piano α e la retta l.
b) Determinare le equazioni cartesiane di una retta r incidente e perpendicolare ad l, e contenuta in α.

2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 3 nella variabile x.
Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (\, c - 4d,\; 2a + c + 3d,\; 2a + 2c - d\,).$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker}f$, una base di $\mathrm{Im}f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^3$.

Nome: Cognome:

---

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard $< \dots, \dots >$ si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) = < v, u > \ u \,, \quad \forall\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \textit{dove} \ \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Determinare se f è diagonalizzabile.
c) Scrivere il polinomio caratteristico.