1 Variabili aleatorie

Definizione 1.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilità e sia* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione reale.*
La funzione X *si dice variabile aleatoria se, per ogni* $t \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} = X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Il risultato di un fenomeno aleatorio è in molti casi un numero o una serie di numeri. Si pensi ad esempio al lancio di un dado, o al gioco del lotto, ecc...
A volte poi non è interessante il risultato in sé quanto piuttosto una sua rielaborazione.
Si pensi alla legge ipergeometrica, che esprime la probabilità di ottenere un certo numero di oggetti di tipo 1 quando si proceda a una serie di estrazioni senza rimpiazzo da un' urna che contiene oggetti di tipo 1 e tipo 2. Evidentemente l' esperimento produce come risultato una sequenza di oggetti che noi rielaboriamo contando quelli di tipo 1 usciti.

Più in generale si può essere interessati ad una *funzione* di un esperimento aleatorio.
Affinché si possano calcolare Probabilità di eventi che si esprimono tramite queste funzioni è necessario che, per opportuni sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{R}$ accada che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

A tale scopo la condizione (1) assicura che, comunque fissato un intervallo B di $\mathbb{R}$, allora $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Infatti se $a \leq b$ si ha

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\} \in \mathcal{A};$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}^c \cap \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\} = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A};$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega : a - \frac{1}{n} < X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

Più in generale detta $\mathcal{B}$ la σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ generata dagli intervalli[1], la condizione (1) equivale al fatto che per ogni $B \in \mathcal{B}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

[1] Questa particolare σ-algebra è nota come σ-algebra di Borel.

Ora se X è una variabile aleatoria, è possibile calcolare le probabilità di eventi espressi per mezzo di X introducendo su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una misura di probabilità che dipende da X. Più precisamente

Definizione 1.2. *Sia X una variabile aleatoria sullo spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L' applicazione $P_X : \mathcal{B} \to [0,1]$ tale che*

$$P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B) \tag{2}$$

è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ detta LEGGE (O DISTRIBUZIONE) *di X.*

A seconda dei valori che assumono, le variabili aleatorie possono essere distinte in

1 **Variabili Aleatorie Discrete** se $Im(X)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ finito o numerabile;

2 **Variabili Aleatorie Continue** se $Im(X)$ è un sottoinsieme continuo di $\mathbb{R}$.

2 Variabili Aleatorie Discrete

Sia X una variabile aleatoria discreta. Indichiamo con $\{x_1, x_2, ...\}$ l' insieme finito o numerabile dei valori che X può assumere.
consideriamo gli insiemi $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, i = 1, 2, ...$
Abbiamo dimostrato che tali insiemi sono eventi, e quindi ha senso calcolare $P(A_i)$.

Definizione 2.1. *Si chiama densità discreta della variabile aleatoria X l'applicazione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ tale che*

$$\begin{aligned} p_X(x_i) =& P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \\ p_X(x) =& 0 \textit{ per ogni } x \notin \{x_1, x_2, ...\} \end{aligned} \tag{3}$$

Proprietà

1 $p_X(x_i) \geq 0$ per ogni $i = 1, 2, ...;$

2 $\sum_{i \geq 1} p_X(x_i) = 1.$

Dimostrazione
La prima proprietà deriva banalmente dalle proprietà della misura di Probabilità.
La seconda deriva dal fatto che la sequenza di eventi $\{\omega : X(\omega) = x_i\}_{i\geq 1}$ è una partizione di Ω. Infatti, siccome X è una funzione

$$\{\omega : X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega : X(\omega) = x_j\} = \phi, i \neq j,$$

ed inoltre, siccome $Im(X) = \{x_1, x_2, ...\}$,

$$\Omega = \{\omega : X(\omega) \in \{x_1, x_2, ...\}\} = \cup_{i\geq 1}\{\omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Conoscere la densità di una variabile aleatoria discreta equivale a conoscerne la legge.

Chiaramente, se è nota la legge di X allora è nota anche la sua densità. Infatti abbiamo visto che $\{\omega : X(\omega) = x_i\} = \{X^{-1}(x_i)\}$ sono eventi, e dunque dalla formula (2) calcolata per $B = x_i$ al variare di $i \geq 1$ si ottiene la densità.
Se invece è nota la densità, allora per ogni $B \in \mathcal{B}$

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in B\}\cap\Omega = \{\omega : X(\omega) \in B\}\cap\cup_{i\geq 1}\{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

poiché come si è visto, $\{\omega : X(\omega) = x_i\}_{i\geq 1}$ è una partizione di Ω. Allora

$$\begin{aligned} P_X(B) =& P(\{\omega : X(\omega) \in B\} \cap \cup_{i\geq 1}\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \\ =& P(\cup_{i\geq 1, x_i\in B}\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \\ =& \sum_{i\geq 1, x_i\in B} P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \sum_{i\geq 1, x_i\in B} p_X(x_i) \end{aligned} \tag{4}$$

che conclude la dimostrazione.

Esempio 2.2. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $A \in \mathcal{A}$. Chiamiamo funzione indicatrice di A la variabile aleatoria $\mathbb{1}_A$ definita come segue*

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & se\ \omega \in A; \\ 0 & se\ \omega \notin A. \end{cases}$$

Banalmente $Im(\mathbb{1}_A) = \{0, 1\}$ con densità pari a

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{1}_A}(1) =& P(\mathbb{1}_A^{-1}(1)) = P(A); \\ p_{\mathbb{1}_A}(0) =& P(\mathbb{1}_A^{-1}(0)) = 1 - P(A). \end{aligned}$$

3 Variabile aleatoria Binomiale

Su uno spazio di probabilità (Ω, A, P) siano dati n eventi indipendenti ed equiprobabili $A_1, ..., A_n$. Indichiamo con $p = P(A_i),\ i = 1, ..., n$. Sappiamo che la probabilità dell' evento

$C_k = \{$ si verificano esattamente k eventi tra gli $A_1, ..., A_n\},\ k \in \{0, ..., n\}$

è data dalla relazione

$$P(C^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

Consideriamo per ogni $k \in \{0, ..., n\}$ la funzione indicatrice dell' evento A_k che abbiamo indicato con $\mathbb{1}_{A_k}$.
Consideriamo poi la variabile aleatoria X definita come

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

Allora $Im(X) = \{0, 1, ..., n\}$ ed inoltre la sua densità è pari a

$$p_X(k) = P(X^{-1}(k)) = P(C^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

La variabile aleatoria così costruita si chiama variabile binomiale di parametri n, p (e si indica con $Bin(n, p)$).

Nell' ambito di una serie di prove indipendenti e binarie, detta p la probabilità di ottenere un successo su ogni singola prova, la variabile aleatoria che conta il numero di successi su n prove è una binomiale di parametri n e p.

Esempio 3.1. *Si effettuano n estrazioni con rimpiazzo da un' urna che contiene 2 tipi di palline, b bianche ed r rosse. Il numero di palline bianche estratte è una variabile aleatoria binomiale di parametri n e $\frac{b}{b+r}$.*

La variabile aleatoria $Bin(1, p)$, ottenuta per $n = 1$ è anche nota come VARIABILE ALEATORIA DI BERNOULLI e si indica con $B(p)$.

Esempio 3.2. *I bulloni prodotti da un'azienda presentano difetti con una percentuale del 20%. Tali bulloni sono poi confezionati in scatole da 3 bulloni ciascuna. Qual è la probabilità che in una scatola vi sia al più un bullone difettoso?*

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di bulloni difettosi in una scatola.
Osserviamo che i bulloni sono di due tipi, e che, se la produzione è molto vasta si può pensare che ogni bullone inserito nella scatola sia difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$ e indipendentemente dagli altri, ovvero si può assumere X binomiale di parametri $\frac{1}{5}, 3$.
Una volta individuata la variabile di interesse, bisogna esprimere l' evento che ci interessa in termini di tale variabile. In questo caso l' evento "la scatola contiene al più un bullone difettoso" corrisponde all' evento $\{X \leq 1\}$ e quindi, usando la formula (4) si ottiene

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) =& p_X(0) + p_X(1) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(1-\frac{1}{5}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(1-\frac{1}{5}\right)^2 = \\ =& 0.8^3 + 3 \times 0.2 \times 0.8^2 \simeq 0.896. \end{aligned}$$

4 Variabile aleatoria Ipergeometrica

Sia data un' urna contenente b biglie bianche ed r biglie rosse.
Si effettuano n $(n \leq b + r)$ estrazioni senza reimmissione. Indichiamo con $A_i = \{\text{esce una biglia rossa all' i-sima estrazione}\}$ e consideriamo la variavile aleatoria Y definita come

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

La variabile aleatoria così definita conta il numero di biglie bianche su n estrazioni senza rimpiazzo. Evidentemente la densità di Y è strettamente positiva sull' insieme $\{\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{r, n\}\}$ e, ricordando la distribuzione Ipergeometrica

$$p_Y(k) = P(Y^{-1}(k)) = P(A^k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}, \ k \in \{\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{r, n\}\},$$

dove $A_k =$ si estraggono esattamente k palline rosse $\}$.

Osserviamo che sia la v.a. binomiale che la v.a. ipergeometrica sono associate al conteggio del numero di volte in cui si verifica un determinato evento in presenza di un numero finito n di prove ripetute. La differenza fondamentale è che la v.a. binomiale si ricava nell'ambito di prove ripetute indipendenti, nell' altro caso tali prove non sono indipendenti.

Esempio 4.1. *Sia data un' urna contenente* 2 *biglie bianche ed* 8 *biglie rosse.*
Si effettuano 3 *estrazioni senza reimmissione. Calcolare la probabilità di estrarne al più una bianca.*

Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte. O Y è chiaramente Ipergeometrica di parametri 2,8,3. L' evento "si estrae al più una biglia bianca" corrisponde all' evento $\{Y \leq 1\}$ e quindi, usando la formula (4) si ottiene

$$P(Y \leq 1) = p_Y(0) + p_Y(1) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \simeq 0.93.$$

Per casa: Esercizio 1.39 pag. 20 Abundo