1 Valore Medio di variabili aleatorie discrete

Sia (X,Y) un vettore aleatorio discreto di densità $p_{X,Y}$ con densità marginali p_X e p_Y. Poniamo $Im(X) = \{x_1, x_2, ...\}$ e $Im(Y) = \{y_1, y_2, ...\}$.

Diremo che X ha *valore medio finito* (*speranza matematica finita*) se

$$\sum_{i\geq 1} |x_i| p_X(x_i) < +\infty. \tag{1}$$

In tal caso il valore medio si indica con $E(X)$ ed ha la seguente espressione

$$E(X) = \sum_{i\geq 1} x_i p_X(x_i). \tag{2}$$

Vedremo che *la media è un operatore lineare sullo spazio delle variabili aleatorie*, ovvero se $X_1, ..., X_m$ sono variabili aleatorie discrete dotate di media, allora ogni combinazione lineare $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_mX_m$, con $a_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{i, .., m\}$ ammette media finita uguale alla combinazione lineare delle medie.
A tale proposito premettiamo la seguente Proposizione

Proposition 1.1. *Sia* $X = (X_1, ..., X_m)$ *un vettore aleatorio discreto a valori in* $Im(X) = \{x^{(1)}, x^{(2)}, ...\}$ *di densità* p_X *e sia* $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *una funzione. Si consideri la variabile aleatoria reale* $Z = \phi(X)$. Z *ha media finita se e solo se*

$$\sum_{i\geq 1} |\phi(x^{(i)})| p_X(x^{(i)}) < +\infty,$$

ed in tal caso

$$E(Z) = \sum_{i\geq 1} \phi(x^{(i)}) p_X(x^{(i)}).$$

Proprietà 1.2. *Siano* X *ed* Y *variabili aleatorie di media finita.*

1 *Per ogni* $c \in \mathbb{R}$ *la variabile aleatoria* cX *ha media finita e*

$$E(cX) = cE(X).$$

2 *la variabile aleatoria* $X + Y$ *ha media finita e*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

3 *Se* X *ed* Y *sono indipendenti, allora* XY *ha media finita e*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

4 Se $X \leq Y$ allora $E(X) \leq E(Y)$.

Proof. **1** Sia $c \in \mathbb{R}$. Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x) = cx$. Allora la variabile aleatoria cX ha media finita. Infatti

$$\sum_{i\geq 1} |cx_i| p_X(x_i) = |c| \sum_{i\geq 1} |x_i| p_X(x_i) < +\infty,$$

perché per ipotesi X ha media finita; dunque

$$E(cX) = c \sum_{i\geq 1} x_i p_X(x_i) = cE(X).$$

2 Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x, y) = x + y$. Dimostriamo innanzitutto che la variabile aleatoria $X + Y$ ha media finita

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |x_i + y_j| p_{X,Y}(x_i, y_j) \leq \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} (|x_i| + |y_j|) p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |x_i| p_{X,Y}(x_i, y_j) + \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |y_j| p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1} |x_i| \sum_{j\geq 1} p_{X,Y}(x_i, y_j) + \sum_{j\geq 1} |y_j| \sum_{i\geq 1} p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1} |x_i| p_X(x_i) + \sum_{j\geq 1} |y_j| p_Y(y_j) < +\infty,
\end{aligned}$$

perché per ipotesi X ed Y hanno media finita; dunque ripetendo gli stessi calcoli senza moduli si ottiene

$$\begin{aligned}
E(X + Y) &= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} (x_i + y_j) p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} x_i p_{X,Y}(x_i, y_j) + \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} y_j p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1} x_i \sum_{j\geq 1} p_{X,Y}(x_i, y_j) + \sum_{j\geq 1} y_j \sum_{i\geq 1} p_{X,Y}(x_i, y_j) = \\
&= \sum_{i\geq 1} x_i p_X(x_i) + \sum_{j\geq 1} y_j p_Y(y_j) = E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

3 Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x, y) = xy$ considerando che, essendo per ipotesi X ed Y indipendenti, $p_{X,Y} = p_X p_Y$. Dimostriamo dapprima che XYha media finita

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}|x_i y_j| p_{X,Y}(x_i, y_j) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}|x_i||y_j| p_X(x_i) p_Y(y_j) =$$
$$= \sum_{i\geq 1}|x_i| p_X(x_i)\sum_{j\geq 1}|y_j| p_Y(y_j) < +\infty,$$

perché per ipotesi X ed Y hanno media finita; dunque ripetendo gli stessi calcoli senza moduli si ottiene

$$E(XY) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} x_i y_j p_{X,Y}(x_i, y_j) = \sum_{i\geq 1} x_i p_X(x_i)\sum_{j\geq 1} y_j p_Y(y_j) = E(X)E(Y).$$

4 Notiamo che la variabile aleatoria $Z = Y - X$ ha media finita perché combinazione lineare di variabili aleatorie con media finita (vedi proprietà 1 e 2). Inoltre per ipotesi $Im(Z) \subseteq \mathbb{R}^+$ e quindi $E(Z) = \sum_{j\geq 1} z_j P(Z = z_j) \geq 0$. Quindi, sempre utilizzando le prime due proprietà si ha $0 \leq E(Z) = E(Y) - E(X)$, cioé $E(X) \leq E(Y)$.

□

Esempio 1.3. *Diamo un esempio di variabile aleatoria discreta che non ha media finita.*
Dapprima ricordiamo che $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$. *Possiamo allora definire una variabile aleatoria* X *a valori in* $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *con densità* $p_X(n) = \frac{6}{\pi}\frac{1}{n^2}$. *Allora la media di* X *esiste finita se*

$$\sum_{n\geq 1} n p_X(n) < +\infty, \text{ ma } \sum_{n\geq 1} n p_X(n) = \frac{6}{\pi}\sum_{i\geq 1}\frac{1}{n} = +\infty.$$

2 Calcolo del Valore Medio delle Variabili Aleatorie notevoli

- **Variabile Aleatoria di Bernoulli di parametro** p

  Sia $X \sim B(p)$. Ricordiamo che la sua densità $p(1) = p,\ p(0) = 1 - p$.

  $$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$$

- **Variabile Aleatoria Binomiale di parametri** n, p

  Sia $X \sim B(n, p)$. Ricordiamo che

  $$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

Calcoliamo il valore medio utilizzando la definizione

$$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ =& \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ =& np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^j (1-p)^{n-1-j} = np. \end{aligned}$$

Utilizziamo ora la proprietà di linearità del valore medio. Consideriamo n variabili aleatorie indipendenti $X_1, ..., X_n$ con $X_k \sim B(p)$. $k \in \{0, ..., n\}$. Sappiamo che $X = X_1 + ... + X_n \sim B(n, p)$. Per calcolare $E(X)$ basterà applicare la proprietà 2 e ricordare che il valore medio di una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p:

$$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = np.$$

- **Variabile Aleatoria Ipergeometrica di parametri** n, r, b

Sia X una variabile aleatoria ipergeometrica, definita da n prove, r elementi di tipo 1 (successo) b elementi di tipo 2 (insuccesso). La densità di X è strettamente positiva sull' insieme $\{\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{r, n\}\}$ e vale

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}, \ k \in \{\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{r, n\}\},$$

Anche in questo caso possiamo calcolare il valore medio sia utilizzando direttamente la definizione, sia utilizzando la proprietà di linearità del valore medio (più immediato). Possimo infatti rappresentare X come somma di n variabili aleatorie (non indipendenti!!!) $X_1, ..., X_n$, con X_k la variabile aleatoria che vale 1 se si è ottenuto un successo all k-sima prova. Sappiamo che $X_k \sim B(\frac{r}{r+b})$ $k \in \{0, ..., n\}$ e che $X = X_1 + ... + X_n$. Quindi dalla proprietà 2, ricordando che $E(X_k) = \frac{r}{r+b}$ si ottiene:

$$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = n\frac{r}{r+b}.$$

- **Variabili aleatorie Geometrica modificata e Geometrica**

  Sia X una variabile aleatoria geometrica modificata di parametro p. Ricordiamo che
  $$p_X(k) = p(1-p)^{k-1},\ k \geq 1.$$
  Per calcolare il valore medio impostiamo una equazione come segue
  $$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k\geq 1} kp(1-p)^{k-1} = \sum_{k\geq 1}(k-1+1)p(1-p)^{k-1} = \\ =& \sum_{k\geq 1}(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} = \sum_{h\geq 1} hp(1-p)^h + 1 = \\ =& (1-p)\sum_{h\geq 1} hp(1-p)^{h-1} + 1 = (1-p)E(X) + 1, \end{aligned}$$
  ovvero $E(X)$ è soluzione dell' equazione $E(X) = (1-p)E(X) + 1$, cioé $E(X) = \frac{1}{p}$.

  Se consideriamo la variabile aleatoria $Y = X - 1$, allora Y è una variabile aleatoria geometrica di parametro p e, sempre per la linearità del valor medio $E(Y) = E(X) - 1 = \frac{1-p}{p}$.

- **Variabile aleatoria di Poisson**

  Sia $X \sim Po(\lambda)$. Allora $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k \geq 0$, quindi
  $$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\ =& \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{h\geq 0}\frac{\lambda^h}{h!}e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

3 Momenti e Momenti centrati

Definizione 3.1. *Diremo che X possiede il momento di ordine k, $k \in \mathbb{N}$ se la variabile aleatoria X^k ammette media finita, ed in tal caso si chiama momento di ordine k la quantità $E(X^k)$.*

Definizione 3.2. *Diremo che X possiede il momento centrato di ordine k, $k \in \mathbb{N}$ se la variabile aleatoria $(X - E(X))^k$ ammette media finita, ed in tal caso si chiama momento di ordine k la quantità $E((X - E(X))^k)$.*

Osserviamo che, grazie alla Proposizione 1.1, per il calcolo dei momenti e dei momenti centrali, è sufficiente conoscere la densità di X; infatti

$$E(X^k) = \sum_{j \geq 1} x_j^k P_X(x_j),$$
$$E((X - E(X))^k) = \sum_{j \geq 1} (x_j - E(X))^k P_X(x_j).$$

Vale inoltre la seguente

Proposition 3.3. *Se X possiede il momento di ordine k, allora possiede momento finito per ogni $j \leq k$;*
Se X ed Y possiedono momento di ordine k, allora anche $X + Y$ possiede il momento di ordine k.