1 Esercizi sui modelli continui

Esercizio 1.1. *Sia X unif distribuita in $[0,1]$ e $Y = -\frac{1}{3}\log(1-X)$.*
(i) trovare la densità di Y; si tratta di una densità nota?
(ii) calcolare $P(-\sqrt{3} < Y \leq 1/3)$;
(iii) calcolare $a \doteq \int_0^{+\infty} P(Y > t)dt$; che relazione c' è tra a e $E(Y)$?

Soluzione

(i) Y segue una legge esponenziale di parametro 3.
Infatti

$$
\begin{aligned}
P\left(Y \leq x\right) =& P\left(-\frac{1}{3}\log(1-X) \leq x\right) = P\left(\log(1-X) \geq -3x\right) = \\
=& P\left(1 - X \geq e^{-3x}\right) = P\left(X \leq 1 - e^{-3x}\right),
\end{aligned}
$$

da cui, ricordando che la funzione di ripartizione $F_X(x)$ di una v.a. X uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,1]$ e'

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0; \\ x \text{ se } x \in [0,1]; \\ 1 \text{ se } x > 1; \end{cases}
$$

si ottiene

$$
F_Y(x) = P\left(Y \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 - e^{-3x} < 0 \text{ ovvero se } x < 0; \\ 1 - e^{-3x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}
$$

(ii) $P(-\sqrt{3} < Y \leq \frac{1}{3}) = F_Y(\frac{1}{3}) - F_Y(-\sqrt{3}) = 1 - e^{-3\frac{1}{3}} - 0 = 1 - e^{-1}$.

(iii) $P(Y > t) = e^{-3t}$ e dunque

$$
a = \int_0^{\infty} P(Y > t)dt = \int_0^{\infty} e^{-3t}dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}.
$$

Risulta pertanto $a = E(Y)$.

In generale se U e' una variabile aleatoria non negativa, si dimostra che $E(U) = \int_0^{\infty} P(U > t)dt$.

Esercizio 1.2. *Siano X e Y v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$.*
Sia $Z = \max(X, 2Y)$. Trovare la densità di Z.

Soluzione

Calcoliamo dapprima la funzione di ripartizione di Z:

$$\begin{aligned} F_Z(t) =& P(Z \le t) = P(X \le t, 2Y \le t) = P\left(X \le t, Y \le \frac{1}{2}t\right) = \\ =& P\left(X \le t\right) P\left(Y \le \frac{1}{2}t\right). \end{aligned}$$

Poiché la funzione di ripartizione comune $F(x)$ di X ed Y è, come gia' ricordato

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0; \\ x \text{ se } x \in [0,1]; \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ P\left(X \le t\right) P\left(Y \le \frac{1}{2}t\right) = \dfrac{t^2}{2} & \text{se } t \in [0,1]; \\ 1P\left(Y \le \frac{1}{2}t\right) = \dfrac{t}{2} & \text{se } t \in (1,2]; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

Pertanto, la densita' $f_Z(t)$ di Z e'

$$f_Z(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0,1]; \\ \frac{1}{2} & \text{se } t \in (1,2]; \\ 0 & \text{se } t < 0 \text{ oppure } t > 2. \end{cases}$$

Esercizio 1.3. *Per $a > 0$, sia X una v.a. di densità*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \textit{se } 0 < x < a \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

i) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.
ii) Trovare la densità di $Y = \sqrt{X}$.
iii) Trovare il valore di $a > 1/2$ affinché risulti $P(x \le 1/2) = 1/2$.

Soluzione

(i) Si ha:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \int_0^x \frac{2}{a}\left(1 - \frac{t}{a}\right) dt & \text{se } 0 < x < a \\ 1 & \text{se } x \ge a \end{cases}$$

Siccome
$$\int_0^x \frac{2}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)dt = \frac{x}{a}\left(\frac{2a-x}{a}\right),$$
si ottiene:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{a}\left(\frac{2a-x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases}.$$
(ii) Si ha, per $0 < t \leq \sqrt{a}$:
$$P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = \frac{y^2}{a}\left(\frac{2a-y^2}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\left(2ay^2 - y^4\right)$$
Derivando, si ottiene la densità di Y :
$$f_Y(y) = \frac{1}{a^2}(4ay - 4y^3)\mathbf{1}_{(0,\sqrt{a})}(y)$$
(iii) Si ha:
$$P(X \leq 1/2) = F(1/2) = \frac{1}{2a}\left(\frac{2a-1/2}{a}\right) = \frac{4a-1}{4a^2}$$
Imponendo che $P(X \leq 1/2) = 1/2$, si trova:
$$\frac{4a-1}{4a^2} = \frac{1}{2}, \text{ ovvero } 2a^2 - 4a + 1 = 0$$
che ha soluzioni $a = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; siccome $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1/2$, il valore di a cercato è $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 1.4. *(26-02-2013)*
Una scatola contiene 3 lampadine di tipo A e 2 lampadine di tipo B. Supponiamo che il tempo di vita delle lampadine di tipo A segua una legge esponenziale di parametro 3 (anni^{-1}), mentre quello delle lampadine di tipo B sia esponenziale di parametro 2 (anni^{-1}).
(i) Si estrae a caso una lampadina dalla scatola e la si collega ad un generatore. Calcolare la probabilità che essa funzioni per almeno $\frac{1}{4}$ (anno) e la densità della variabile aleatoria T associata al tempo di vita della lampadina;
(ii) Si collegano in serie una lampadina di tipo A ed una di tipo B; sia X il tempo di vita del circuito elettrico corrispondente. Posto $Y = 1 - e^{-5X}$,
a) trovare la densità di Y; si tratta di una densità nota?
b)calcolare $P(Y \geq \frac{1}{2} | Y \leq \frac{3}{4})$.

Soluzione

(i) Denotiamo con A l'evento "si sceglie una lampadina di tipo A" e con B l'evento "si sceglie una lampadina di tipo B"; siano: T_A il tempo di vita di una lampadina di tipo A, T_B quello di una lampadina di tipo B, e T il tempo di vita della lampadina scelta. Allora, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, inoltre T_A ha legge esponenziale di parametro 3 mentre T_B ha legge esponenziale di parametro 2. Si ha quindi:

a) $P(T \geq \frac{1}{4}) = P(T \geq \frac{1}{4}|A)P(A) + P(T \geq \frac{1}{4}|B)P(B) = \frac{3}{5}e^{-3/4} + \frac{2}{5}e^{-2/4}$

b) Ragionando come in a) per ogni $t > 0$ si ottiene

$$P(T \geq t) = \frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{-2t}$$

e dunque

$$P(T \leq t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - \frac{3}{5}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{-2t}$$

Derivando, si ottiene la densità di T :

$$f_T(t) = \frac{9}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}, t \geq 0.$$

(ii) Si ha:
$X = \min(T_A, T_B)$, quindi, se $t > 0$, per l'indipendenza di T_A e T_B :
$P(X \geq t) = P(T_A \geq t)P(T_B \geq t) = e^{-3t}e^{-2t} = e^{-5t}$; pertanto X ha legge esponenziale di parametro 5 e $P(X \leq x) = 1 - e^{-5x}$. Risulta poi, se $y \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) =& P(1 - e^{-5X} \leq y) = P(X \leq -\frac{1}{5}\ln(1 - y)) = \\ =& 1 - e^{\ln(1-y)} = 1 - (1 - y) = y \end{aligned}$$

Pertanto:
a) Y è uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 1)$,
b) $P(Y \geq \frac{1}{2}|Y \leq \frac{3}{4}) = P(Y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])/P(Y \leq \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 1.5. *(II-eso-2013)*
Sia data la funzione $f(x)$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{k}\left(\frac{x^2}{8} + x\right) & se \quad x \in [0, 8] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

i) Determinare k in modo tale che $f(x)$ sia la densità di probabilità di una variabile aleatoria X;
ii) calcolare la funzione di ripartizione di X e la probabilità condizionata dell' evento $\{X \in (2,4)\}$ all'evento $\{X \leq 6\}$.

Soluzione

i) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $k > 0$. quindi affinché $f(x)$ sia una densità di probabilità è sufficiente imporre la condizione $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, ovvero il parametro k deve essere positivo e soluzione dell' equazione

$$\int_0^8 \frac{3}{k}\left(\frac{x^2}{8}+x\right)dx = 1$$

$$\text{ovvero } \frac{1}{k}\left(\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^8 = \frac{1}{k}(64+96) = \frac{160}{k} = 1$$

cioé $\boxed{k = 160}$

ii)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{3}{160}\left(\frac{y^2}{8}+y\right)dy = \frac{1}{160}\left(\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{2}\right) & \text{se } x \in [0,8] \\ 1 & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

$$P(X \in (2,4)|X \leq 6) = \frac{P(\{X \in (2,4)\},\{X \leq 6\})}{P(X \leq 6)} = \frac{P(X \in (2,4))}{F_X(6)} =$$
$$= \frac{F_X(4)-F_X(2)}{F_X(6)} = \frac{\frac{1}{160}\left(\frac{64}{8}+\frac{48}{2}\right)-\frac{1}{160}\left(\frac{8}{8}+\frac{12}{2}\right)}{\frac{1}{160}\left(\frac{216}{8}+\frac{108}{2}\right)} = \frac{\frac{25}{160}}{\frac{81}{160}} = \frac{25}{81}$$

Esercizio 1.6. *(I-scritto-2013)*
Per $a > 0$, si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2a\sin x & \textit{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore di a in modo che $f(x)$ sia la densità di una v.a. assolutamente continua X.
(ii) Scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione di X.

(iii) Calcolare $P(0 \leq X \leq \pi/4)$.
(iv) Se $Y = \sin X$, trovare la densità e la funzione di ripartizione di Y; inoltre, calcolare, se esiste finita, $E(Y)$.

Soluzione
(i)+ (ii) Si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \big[-cosx \big]_0^{\pi/2} = 1$$

per cui deve essere $2a = 1$, ovvero $a = 1/2$. La densità di X è allora $f_X(x) = \sin x \mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(x)$ e la sua funzione di ripartizione è:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\ dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ 1 - \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 1 & \text{se } x > \pi/2 \end{cases}$$

(iii) $P(X \in [0, \pi/4]) = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}/2$.
(iv) Risulta $Y = \sin X \in [0,1]$ e per $y \in [0,1]$:

$$P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = P(X \leq \arcsin y)$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = f_X(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ , y \in [0,1]$$

Inoltre,

$$F_Y(y) = P(X \leq \arcsin y) = F_X(\arcsin y)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0; \\ 1 - \cos(\arcsin y) = 1 - \sqrt{1-y^2} & \text{se } y \in [0,1]; \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Si ha poi:

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ dy$$

Con la sostituzione $\sqrt{1-y^2} = t$, l' integrale diventa

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

e con l' ulteriore sostituzione $t = \sin u$, si ottiene infine

$$E(Y) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \big[(u + \sin u \cos u)/2\big]_0^{\pi/2} = \pi/4$$

Esercizio 1.7. *(III-scritto-15)*
Sia X una v.a. di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\ln^2(x)/2} & se\ x > 0; \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(i) Calcolare la densità di $Y = \ln(X)$. Si tratta di una densità nota?
(ii) Calcolare $P(Y \in (-1/2, 1/2))$.
(iii) Trovare la densità di $Z = Y^2$.

Soluzione
(i) $Im(Y) = \mathbb{R}$. Calcoliamo la su a funzione di ripartizione;

$$F_Y(t) = P(\ln(X) \leq t) = P(X \leq e^t) = F_X(e^t)$$

e quindi

$$f_Y(t) = P f_X(e^t)e^t = \frac{1}{e^t\sqrt{2\pi}} e^{\ln^2(e^t)/2} e^t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}.$$

ovvero $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
(ii) $P(Y \in (-1/2, 1/2)) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383$
(iii) Come è noto (visto a lezione), $Z = Y^2$ ha densità $\Gamma(1/2, 1/2)$