

Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 14

1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 6$ in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (\cos(x))^x.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - \log(n))^n (n + 9)^n \log(n)}{(n^2 + 5 \log(n))^n - (n^2 + 2)^n}.$$

3. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(\log|x|)^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, punti di massimo/minimo relativo, punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

Extra: determinare una retta che sia tangente al grafico di f in due punti distinti.

4. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx.$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$.

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = 2 \tan(y(x)) \log(x) \\ y(1) = \arcsin(1/e) \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 4x - \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^{3x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

8. Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} ,

$$z^4 + 4z^2 = -i\bar{z}(4 + z^2).$$

9. Sia f una funzione positiva e derivabile con la derivata continua in $[0, +\infty)$. Allora la superficie ottenuta ruotando completamente il grafico di f attorno all'asse x ha area A e delimita un volume V dati dai seguenti integrali impropri:

$$A = 2\pi \int_0^{+\infty} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{e} \quad V = \pi \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx.$$

Fare un esempio di una funzione f tale che A è divergente mentre V è convergente.