Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 13

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(\sinh(x^2) + \cos(2\sqrt{x}))} - e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{\sin(x^2) - \frac{x^2 - x^4}{1 + 3x^2}}.$$

Determinare gli sviluppi di Taylor di ordine $n = 2$ di f e g in $x_0 = 0$ e calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Per quanto riguarda la funzione f, si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + \log\left(x^2 + 1 - \frac{4x}{2!} + \frac{16x^2}{4!} + o(x^2)\right)\right)^{1/2} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \left(1 + \log\left(1 - 2x + \frac{5x^2}{3} + o(x^2)\right)\right)^{1/2} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= \left(1 + \left(-2x + \frac{5x^2}{3} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(-2x + o(x)\right)^2 + o(x^2)\right)^{1/2} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= \left(1 - 2x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{1/2} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-2x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) - \frac{1}{8}\left(-2x + o(x)\right)^2 - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= x^2\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + o(x^2) \\
&= -\frac{7x^2}{6} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Invece per la funzione g abbiamo che

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left(x^2 + o(x^4) - (x^2 - x^4)(1 + 3x^2)^{-1}\right)^{1/2} \\
&= \left(x^2 + o(x^4) - (x^2 - x^4)(1 - 3x^2 + o(x^2))\right)^{1/2} \\
&= \left(x^2 - x^2 + x^4 + 3x^4 + o(x^4))\right)^{1/2} = 2x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Così il primo limite è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7x^2}{6} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{7}{12}.$$

Per il secondo limite abbiamo che per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(\sinh(x^2) + \cos(2\sqrt{x}))} - e^{-x} \sim \sqrt{\log\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)} \sim x$$

e

$$g(x) = \sqrt{\sin(x^2) - \frac{x^2 - x^4}{1 + 3x^2}} \sim \sqrt{-\frac{-x^4}{3x^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{3}.$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dato che $f(x) = |g(x)|$, consideriamo anche la funzione $g(x) = (x-3)e^{1/(2-x)}$. Per $x \to \pm\infty$ si ha che

$$g(x) = (x-3)(1 + 1/(2-x) + o(1/x)) = x - 3 - 1 + o(1) = x - 4 + o(1).$$

Quindi la funzione f, per $x \to +\infty$ ha un asintoto obliquo $y = x - 4$ e per $x \to -\infty$ ha un asintoto obliquo $y = -x + 4$. Inoltre $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$.
Per $x \neq 2$, la derivata prima di g è

$$g'(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^2}.$$

Notiamo $g' = f'$ per $x > 3$ e $g' = -f'$ per $x < 3$. Il punto $x = 3$ è un punto angoloso per la funzione f:

$$f'_-(3) = -g'(3) = -1/e \quad \text{e} \quad f'_+(3) = g'(3) = 1/e.$$

Si noti che $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0$.
Inoltre si ha che f è crescente in $[(3-\sqrt{5})/2, 2)$, in $(2, (3+\sqrt{5})/2]$ e in $[3, +\infty)$. La funzione f è decrescente in $(-\infty, (3-\sqrt{5})/2]$ e in $[(3+\sqrt{5})/2, 3]$. Il punto $x = (3+\sqrt{5})/2 \approx 2.618$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = (3-\sqrt{5})/2 \approx 0.382$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo assoluto mentre $x = 3$ è un punto di minimo assoluto con $f(3) = 0$.
Per $x \neq 2$, la derivata seconda di g è

$$g''(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{3x - 7}{(x-2)^4}.$$

Quindi f è convessa in $(-\infty, 2)$, in $(2, 7/3]$ e in $[3, +\infty)$, ed è concava in $(7/3, 3]$. Il punto $x = 7/3 \approx 2.333$ è l'unico punto di flesso.

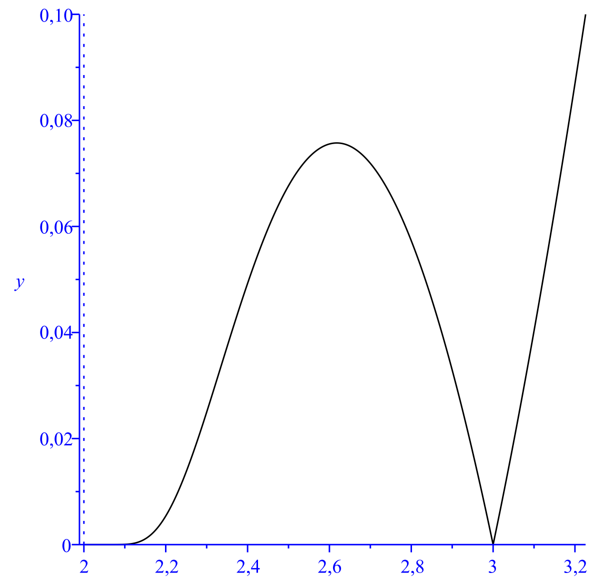

Grafico di $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$ in $[2, 3.2]$

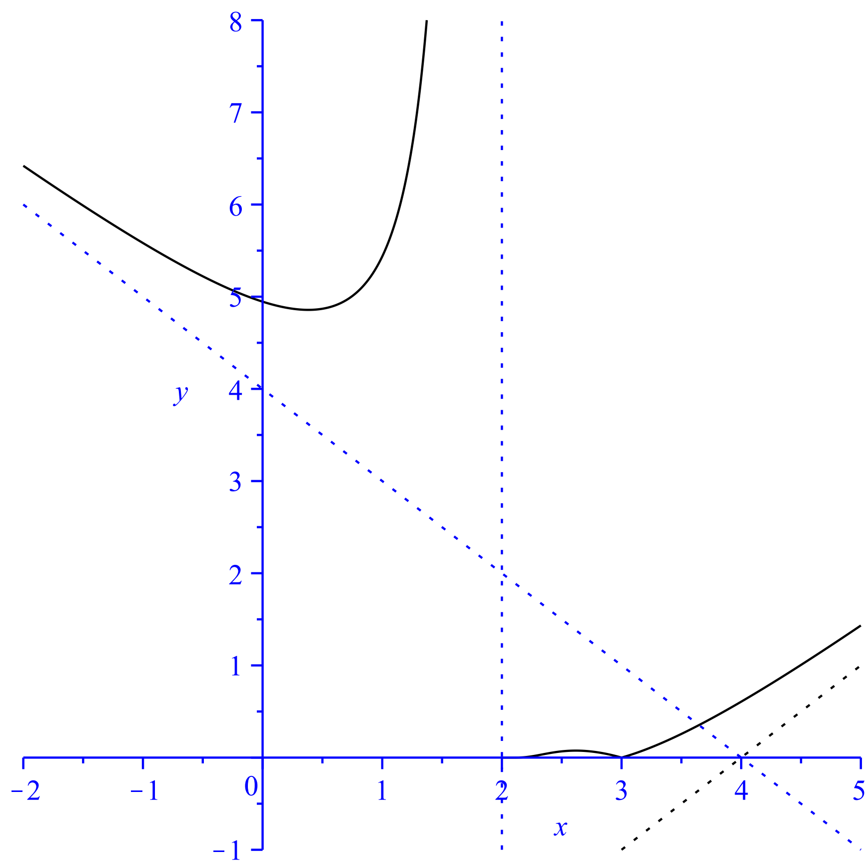

Grafico di $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$

Esercizio 3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nell'intervallo $(0,4)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e 4^-.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha} \sim \frac{5x^{2\alpha-1}}{4^\alpha x^\alpha} = \frac{5}{4^\alpha}\cdot\frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Quindi, per la convergenza, $1-\alpha<1$, ossia $\alpha>0$.
Per $x \to 4^-$, $t = 4-x \to 0^+$,

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha} \sim \frac{C}{t^\alpha}.$$

Per la convergenza, $\alpha < 1$.
Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0<\alpha<1$.
Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$. Poniamo prima $t=\sqrt{x}$ e $dx = 2tdt$,

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{5+3\sqrt{x}}{(4x-x^2)^{1/2}}\,dx &= 5\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} + 3\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \\
&= \frac{5}{2}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}} + 3\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \\
&= \left[5\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right) - 6\sqrt{4-x}\right]_0^4 \\
&= 5\pi + 12.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y'(x) = xy(x)(y^2(x)+1) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $\{y(x) : x \in I\}$ dove I è l'intervallo di esistenza della soluzione $y(x)$.

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. L'unica soluzione stazionaria è $y(x) = 0$. Per $y(x) \neq 0$, separando le variabili e integrando si ha

$$\int \frac{dy}{y(y^2+1)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1} \right) dy = \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

e quindi

$$\log|y(x)| - \frac{\log(y^2(x)+1)}{2} = \frac{\log(1+x^2)}{2} + c.$$

Per la condizione $y(0) = -1$ si ha che $c = -\frac{\log(2)}{2}$. Così

$$2\log|y(x)| - \log(y^2(x)+1) = \log(1+x^2) - \log(2),$$

ossia

$$\frac{y^2(x)}{y^2(x)+1} = \frac{1+x^2}{2}.$$

Quindi risolvendo rispetto a $y^2(x)$ abbiamo che

$$1 + \frac{1}{y^2(x)} = \frac{y^2(x)+1}{y^2(x)} = \frac{2}{1+x^2}$$

da cui

$$y^2(x) = \frac{1}{\frac{2}{1+x^2} - 1} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Ricordando che $y(0) = -1$, otteniamo la soluzione cercata:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

con intervallo di esistenza $I = (-1, 1)$.
Notiamo che $y(x)$ è pari e

$$y'(x) = -\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

e quindi $y(x)$ è crescente in $(-1, 0]$ ed è decrescente in $[0, 1)$. Ne segue che $x = 0$ è un punto di massimo assoluto e

$$\sup\left(\{y(x) : x \in (-1,1)\}\right) = y(0) = -1 \quad \text{e} \quad \inf\left(\{y(x) : x \in (-1,1)\}\right) = \lim_{x \to 1^-} y(x) = -\infty.$$

Esercizio 5.a. Risolvere
$$(z-2i)^2=-4.$$

L'equazione data è equivalente a
$$0=(z-2i)^2+4=z^2-4iz+\underbrace{(-2i)^2}_{-4}+4=z^2-4iz=z(z-4i).$$

Quindi le soluzioni sono i due numeri complessi $z=0$ e $z=4i$.

Esercizio 5.b. Risolvere
$$||z|-2i|^2=4.$$

Dato che $|z|$ è un numero reale e $-2i$ è un mumero immaginario allora
$$||z|-2i|^2=|z|^2+(-2)^2=|z|^2+4.$$

Così l'equazione diventa $|z|^2+4=4$ e quindi $|z|=0$ e l'unica soluzione complessa è $z=0$.

Esercizio 5.c. Risolvere
$$(z^4+16)(z^2+4iz-13)=0.$$

Il primo fattore si annulla se e solo se z è una radice quarta di $-16=2^4e^{i\pi}$ ossia $z_k=2e^{i(\pi+2k\pi)/4}$, con $k=0,1,2,3$:
$$z_0=2e^{i\pi/4}=\sqrt{2}(1+i), \qquad z_1=2e^{3i\pi/4}=\sqrt{2}(-1+i),$$
$$z_2=2e^{5i\pi/4}=\sqrt{2}(-1-i), \qquad z_3=2e^{7i\pi/4}=\sqrt{2}(1-i).$$

Per il secondo fattore risolviamo l'equazione di secondo grado
$$z^2+4iz-13=0,$$

e otteniamo
$$z_4=-2i+\sqrt{(2i)^2+13}=3-2i, \quad z_5=-2i-\sqrt{(2i)^2+13}=-3-2i.$$

Le soluzioni complesse dell'equazione data sono sei: z_k con $k=0,1,2,3,4,5$.

Esercizio 5.d. Risolvere
$$(1+i)^2((z+4i)^2-i)=6.$$

Dato che $(1+i)^2=1+i^2+2i=2i$, quindi
$$(z+4i)^2=i+\frac{6}{2i}=i-3i=-2i.$$

Siccome le radici quadrate di $-2i=2e^{3\pi i/2}$ sono
$$\pm\sqrt{2}e^{3\pi i/4}=\pm\sqrt{2}(\cos(3\pi i/4)+i\sin(3\pi i/4))=\pm(-1+i),$$

allora le soluzioni complesse dell'equazione data sono due

$$-4i + (-1+i) = -1-3i \quad \text{e} \quad -4i - (-1+i) = 1-5i.$$

Esercizio 5.e. Risolvere
$$(z+3)^3 = 64.$$

Risolviamo prima l'equazione $w^3 = 64$ dove $w = z+3$ ossia determiniamo le radici terze complesse di 64. Dato che $64 = 2^6 e^{i0}$ le radici terze sono

$$w_k = 2^{6/3} e^{i(2k\pi)/3} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2$$

ossia
$$w_0 = 4e^{i0/3} = 4,\ w_1 = 4e^{i2\pi/3} = -2+2\sqrt{3}i,\ w_2 = 4e^{i4\pi/3} = -2-2\sqrt{3}i.$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:

$$z_0 = w_0 - 3 = 1, \quad z_1 = w_1 - 3 = -5+2\sqrt{3}i, \quad z_2 = w_2 - 3 = -5-2\sqrt{3}i.$$

Esercizio 5.f. Risolvere
$$\overline{z}^2(12 + |z|^2) = -64.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$(x-iy)^2(12 + x^2 + y^2) = -64$$

ossia
$$(x^2 - b^2 - 2ixy)(12 + x^2 + y^2) = -64.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(12 + x^2 + y^2) = -64 \\ -2xy(12 + x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

da cui
$$\begin{cases} (-y^2)(12 + y^2) = -64 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x^2)(12 + x^2) = -64 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} y^4 + 12y^2 - 64 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^4 + 12x^2 + 64 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema è risolto da
$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

mentre il secondo non ha soluzione. Così le soluzioni dell'equazione data sono due: $2i$ e $-2i$.

Esercizio 5.g. Risolvere
$$|z| + iz\mathrm{Re}(z) = z^2.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che
$$\sqrt{x^2+y^2} + i(x+iy)x = (x+iy)^2$$
ossia
$$\sqrt{x^2+y^2} + ix^2 - xy = x^2 - y^2 + 2ixy.$$
Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - xy = x^2 - y^2 \\ x^2 = 2xy \end{cases}$$
Dalla seconda equazione $x(x-2y) = 0$ otteniamo che $x = 0$ oppure $x = 2y$, da cui
$$\begin{cases} |y| = -y^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{5}|y| - 2y^2 = 4y^2 - y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$
e risolvendo si ottiene
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y \in \{0, 1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\} \\ x = 2y \end{cases}.$$
Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:
$$0, \quad \frac{2+i}{\sqrt{5}}, \quad -\frac{2+i}{\sqrt{5}}.$$

Esercizio 5.h. Risolvere
$$|3z - 2i| = |6 - i\overline{z}|.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali, l'equazione data è equivalente a
$$|3(x+iy) - 2i| = |6 - i(x-iy)|$$
ossia
$$|3x + i(3y-2)| = |(6-y) - ix|.$$
Elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo
$$(3x)^2 + (3y-2)^2 = (6-y)^2 + (-x)^2,$$
e così
$$9x^2 + 9y^2 - 12y + 4 = 36 - 12y + y^2 + x^2$$
da cui
$$x^2 + y^2 = 32/8 = 2^2.$$
Quindi le soluzioni sono infinite e sono tutti i punti della circonferenza centrata in 0 e di raggio 2, ossia tutti i numeri complessi z tali che $|z| = 2$.

Esercizio 6.a. Fare un esempio di un numero complesso z tale che $(1+i)z + (1-i)\overline{z} = -2$ e $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0$.

Ponendo $z = x + iy$, abbiamo che l'equazione data diventa

$$(1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) = -2$$

ossia

$$2x + 2y = -2$$

da cui otteniamo $y = x + 1$ e $z = x + i(x+1)$ dove $x \in \mathbb{R}$.
Per determinare z in modo che $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0$ è necessario e sufficiente che $|z| < 1$. Dato che

$$|z| = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{1 + 2x(1+x)}$$

ne segue che $x(1+x) < 0$ ossia $x \in (-1, 0)$. Ad esempio, per $x = -\frac{1}{2}$, il numero complesso

$$z = x + i(x+1) = \frac{-1+i}{2}$$

soddisfa le proprietà richieste.

Esercizio 6.b. Fare un esempio di due numeri interi positivi n e m tali che il sistema

$$\begin{cases} z^n = 1 \\ z^m = -1 \end{cases}$$

ha esattamente 4 soluzioni.

Sappiamo che se n e m sono numeri interi positivi allora l'equazione $z^n = 1$ ha n soluzioni distinte e $z^m = -1$ ha m soluzioni distinte in ogni caso posizionate lungo la circonferenza unitaria $|z| = 1$. Per avere esattamente 4 soluzioni in comune possiamo porre $m = 4$ e fare in modo che le soluzioni di $z^4 = -1$ siano anche soluzioni di $z^n = 1$.
Notiamo che se $z^4 = -1$ allora

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Dunque ponendo $n = 8$ abbiamo che il sistema ha esattamente 4 soluzioni. Per la stessa ragione anche la coppia $m = 4$ e $n = 8k$ con k intero positivo soddisfa la richiesta.