

**Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O**  
**Foglio di esercizi n. 13**

1. Siano

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(\sinh(x^2) + \cos(2\sqrt{x}))} - e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{\sin(x^2) - \frac{x^2 - x^4}{1 + 3x^2}}.$$

Determinare gli sviluppi di Taylor di ordine  $n = 2$  di  $f$  e  $g$  in  $x_0 = 0$  e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^4 \frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} dx$$

e calcolarlo per  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + x^2)y'(x) = xy(x)(y^2(x) + 1) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $\{y(x) : x \in I\}$  dove  $I$  è l'intervallo di esistenza della soluzione  $y(x)$ .

5. Risolvere le seguenti equazioni in  $\mathbb{C}$ .

a.  $(z - 2i)^2 = -4$

b.  $||z| - 2i|^2 = 4$

c.  $(z^4 + 16)(z^2 + 4iz - 13) = 0$

d.  $(1 + i)^2((z + 4i)^2 - i) = 6$

e.  $(z + 3)^3 = 64$

f.  $\bar{z}^2(12 + |z|^2) = -64$

g.  $|z| + iz\text{Re}(z) = z^2$

h.  $|3z - 2i| = |6 - i\bar{z}|$

6. Fare un esempio di:

a. un numero complesso  $z$  tale che  $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = -2$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ ;

b. due numeri interi positivi  $n$  e  $m$  tali che il sistema  $\begin{cases} z^n = 1 \\ z^m = -1 \end{cases}$  ha esattamente 4 soluzioni.