Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 12

SOLUZIONI

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})\log\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|}{\left((x-2)^2+\log(\frac{x}{2})\right)\log|x-2|}$$

calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Per $x \to 0^+$ si ha che

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2}\log\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\log\left(\frac{x}{2}\right)\log(2)} = \frac{\sqrt{2}\left(\log(x)+\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{(\log(x)-\log(2))\log(2)} \to \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Così

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Per $x \to 2$, posto $y = x-2 \to 0$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{y+2})\log\left(\left|\sin\frac{\pi(y+2)}{2}\right|\right)}{\left(y^2+\log(\frac{y+2}{2})\right)\log(|y|)} = -\sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{1+\frac{y}{2}}-1)\log\left(\left|\sin\frac{\pi y}{2}\right|\right)}{\left(y^2+\log(1+\frac{y}{2})\right)\log(|y|)}.$$

Dato che per $y \to 0$,

$$\sqrt{1+\frac{y}{2}} \sim 1+\frac{y}{4}, \quad y^2+\log\left(1+\frac{y}{2}\right) \sim \frac{y}{2}$$

e

$$\frac{\log\left|\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right|}{\log|y|} \sim \frac{\log\left(\frac{\pi|y|}{2}\right)}{\log|y|} = \frac{\log|y|+\log\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\log|y|} \to 1,$$

Abbiamo che

$$f(x) \sim -\sqrt{2}\,\frac{y/4\cdot 1}{y/2} \to -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e dunque

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \left(\frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3}\right)^\alpha dx$$

al variare del parametro $\alpha > 0$ e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Per $\alpha > 0$, sia

$$f(x) = \left(\frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3}\right)^\alpha.$$

Nell'intervallo $(0,1)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e 1^-.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha \log^{-2\alpha}(x)}.$$

Quindi, per la convergenza, $\alpha < 1$ oppure $\alpha = 1$ e $-2\alpha > 1$, ossia solo la condizione $\alpha < 1$.
Per $x \to 1^-$, $t = 1 - x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \left(\frac{\log^2(1-t)}{(1-(1-t)^\alpha)^3}\right)^\alpha \sim \left(\frac{(-t)^2}{(\alpha t)^3}\right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^{3\alpha}} \cdot \frac{1}{t^\alpha}.$$

Per la convergenza, $\alpha < 1$.
Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.
Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$. Poniamo prima $t = \sqrt{x}$ e $dx = 2tdt$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3}\right)^{1/2} dx &= \int_0^1 \frac{|\log(x)|}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{3/2}}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{-2\log(t)}{t(1-t)^{3/2}}\,(2tdt) \\
&= -4\int_0^1 \frac{\log(t)}{(1-t)^{3/2}}\, dt.
\end{aligned}$$

Consideriamo l'integrale indefinito e, dopo aver integrato per parti, poniamo $s = \sqrt{1-t}$. Quindi $dt = -2sds$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(t)}{(1-t)^{3/2}}\, dt &= 2\int \log(t)\, d((1-t)^{-1/2}) \\
&= \frac{2\log(t)}{\sqrt{1-t}} - 2\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} \\
&= \frac{2\log(1-s^2)}{s} - 2\int \frac{(-2sds)}{(1-s^2)s} \\
&= \frac{2\log(1-s^2)}{s} + 2\int \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right) ds \\
&= \frac{2\log(1-s^2)}{s} + 2\log\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + c.
\end{aligned}$$

Infine

$$\int_0^1 \left(\frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3}\right)^{1/2} dx = -4\int_0^1 \frac{\log(t)}{(1-t)^{3/2}}\,dt = -8[F(s)]_{s=1}^0 = 16\log(2)$$

dove

$$F(s) = \frac{\log(1-s^2)}{s} + \log\left|\frac{s+1}{s-1}\right|.$$

Si noti che

$$\lim_{s\to 0^+} F(s) = \lim_{s\to 0^+}\left(\frac{-s^2+o(s^2)}{s} + \log(1+o(1))\right) = 0.$$

e

$$\lim_{s\to 1^-} F(s) = \lim_{s\to 1^-}\left(\log(1-s)\left(\frac{1}{s}-1\right) + \frac{\log(1+s)}{s} + \log(1+s)\right) = 2\log(2).$$

Esercizio 3.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\log(x)\, y^2(x)}{x(1+\log^2(x))} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è a variabili separabili. C'è una soluzione stazionaria $y(x) = 0$ e $x > 0$. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{\log(x)}{x(1+\log^2(x))}\, dx$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = \int \frac{d(\log^2(x))}{2(1+\log^2(x))} = \frac{\log(1+\log^2(x))}{2} + c.$$

Per la condizione $y(1) = 1$ si ha che $c = -1$. Così la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{2}{2 - \log(1+\log^2(x))}$$

con intervallo di esistenza $I = (\exp(-\sqrt{e^2-1}), \exp(\sqrt{e^2-1}))$ (il denominatore non deve annullarsi).

Esercizio 3.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x^2+x} = (x^2+x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è lineare e del primo ordine. Abbiamo che $a(x) = 1/(x^2+x)$ e dato che la condizione iniziale è $y(1) = 2e$, possiamo supporre che $x > 0$. Così

$$A(x) = \int \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = x/(x+1)$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D\left(\frac{xy(x)}{x+1}\right) = x^2 e^x.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$\frac{xy(x)}{x+1} = \int x^2 e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

Se imponiamo la condizione $y(1) = 2e$ abbiamo che $c = 0$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{(x+1)(x^2-2x+2)e^x}{x}$$

con intervallo di esistenza $I = (0, +\infty)$.

Esercizio 3.c. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{4}{x} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è lineare e del primo ordine. Abbiamo che $a(x) = 1/(\sqrt{x}(\sqrt{x}+1))$ e $x > 0$. Così

$$A(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{x}+1}\, d(\sqrt{x}) = \log\left((\sqrt{x}+1)^2\right)$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = (\sqrt{x}+1)^2$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D\left((\sqrt{x}+1)^2 y(x)\right) = \frac{4(\sqrt{x}+1)^2}{x} = 4 + \frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$(\sqrt{x}+1)^2 y(x) = \int \left(4 + \frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}\right) dx = 4x + 16\sqrt{x} + 4\log(x) + c.$$

Imponendo $y(1) = 5$ si ha che $c = 0$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{4(x + 4\sqrt{x} + \log(x))}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

con intervallo di esistenza $I = (0, +\infty)$.

Esercizio 3.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 16x^3 y(x)(2 + \sqrt{y(x)}) \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è a variabili separabili. C'è una soluzione stazionaria $y(x) = 0$ e $y(x) \geq 0$. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int \frac{1}{y(2+\sqrt{y})}\, dy = \int 16x^3\, dx.$$

Ponendo $z = \sqrt{y}$, si ha che $2zdz = dy$ e

$$\int \frac{1}{y(2+\sqrt{y})}\, dy = \int \frac{2dz}{z(2+z)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right) dz = -\log\left(\frac{\sqrt{y}+2}{\sqrt{y}}\right).$$

Dunque

$$\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{y}}\right) = -4x^4 + c.$$

Per la condizione $y(0) = 4$ si ha che $c = \log(2)$. Così

$$\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{y}}\right) - \log(2) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = -4x^4$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{4}{(2e^{-4x^4} - 1)^2}$$

con intervallo di esistenza $I = (-(\log(2)/4)^{1/4}, (\log(2)/4)^{1/4})$ (il denominatore non deve annullarsi).

Esercizio 3.e. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{y(x)(4-x^2)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è a variabili separabili. Non ci sono soluzioni stazionarie. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int y\, dy = \int \frac{dx}{4-x^2}$$

da cui

$$\frac{y^2(x)}{2} = \int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -2 < 0$ si ottiene che $c = 2$ e nell'esplicitare la y è necessario scegliere la radice quadrata con il segno negativo.
Possiamo così concludere che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) + 4}.$$

L'intervallo di esistenza della soluzione si ottiene imponendo che l'argomento della radice quadrata sia positivo (il valore nullo va escluso perché $y(x) \neq 0$):

$$\left(-2\,\frac{e^8-1}{e^8+1}, 2\right).$$

Esercizio 3.f. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} \arcsin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

L'equazione differenziale è a variabili separabili. Non ci sono soluzioni stazionarie. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int e^y dy = \int \arcsin(x)\, dx$$

da cui, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} e^{y(x)} &= \int \arcsin(x)\, dx \\ &= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si determina la costante c:

$$1 = 0 + 1 + c \implies c = 0.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \log\left(x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right)$$

e l'intervallo di esistenza della soluzione è $[-1, 1]$.

Esercizio 4.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $z^2 - z - 2 = 0$ sono 2 e -1. Dato che l'equazione differenziale è omogenea, la soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1/3 \\ C_2 = -1/3 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{3}.$$

Esercizio 4.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2 = 0$ è risolta da 3 con molteplicità 2. Dato che l'equazione differenziale è omogenea, la soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 3C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = (1 - 2x)e^{3x}.$$

Esercizio 4.c. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $z^2 + z = 0$ è risolta da 0 e -1 e quindi la soluzione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Alla funzione $f(x) = x^2$ si associa il numero 0 che è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1. Dunque la soluzione particolare è della forma

$$y_*(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Allora sostituendo y_* nell'equazione differenziale si ha

$$(6Ax + 2B) + (3Ax^2 + 2Bx + C) = 3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C) = x^2$$

da cui

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 6A + 2B = 0 \\ 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

Così

$$y_*(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + y_*(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = -1 + 2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$$

In alternativa, visto che nell'equazione differenziale non compare $y(x)$, si può procedere riducendo l'ordine: integrando i due membri rispetto a x si ottiene

$$y'(x) + y(x) = \int (y''(x) + y'(x))\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$$

e dato che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si ottiene che $c = 1$. Quindi basta ancora risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y'(x) + y(x) = \frac{x^3}{3} + 1.$$

Moltiplicando per il fattore integrante e^x e integrando si ha che

$$\begin{aligned} e^x y(x) &= \int e^x \left(\frac{x^3}{3} + 1 \right) dx = \frac{x^3 e^x}{3} + e^x - \int x^2 e^x\, dx \\ &= \frac{x^3 e^x}{3} + e^x - x^2 e^x + 2 \int x e^x\, dx \\ &= \frac{x^3 e^x}{3} + e^x - x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x + c \\ &= \frac{x^3 e^x}{3} - x^2 e^x + 2x e^x - e^x + c. \end{aligned}$$

Dato che $y(0) = 1$ si ha che $c = 2$ e ritroviamo la soluzione

$$y(x) = -1 + 2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$$

Esercizio 4.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 25xe^x \\ y(0) = -4, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $z^2 + 2z + 2 = 0$ è risolta da $-1 + i$ e $-1 - i$ e quindi la soluzione omogenea è

$$y_{\text{om}}(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x).$$

Alla funzione $f(x) = 25xe^x$ si associa il numero 1 che non è una soluzione dell'equazione caratteristica. Dunque la soluzione particolare è della forma

$$y_*(x) = e^x(Ax + B).$$

Allora sostituendo y_* nell'equazione differenziale si ha

$$e^x(Ax + B + 2A) + 2e^x(Ax + B + A) + 2e^x(Ax + B) = e^x(5Ax + 5B + 6A) = 25xe^x$$

da cui

$$\begin{cases} 5A = 25 \\ 5B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \end{cases}$$

Così

$$y_*(x) = e^x(5x - 4)$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = y_{\text{om}}(x) + y_*(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) + e^x(5x - 4).$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = -4$, $y'(0) = 2$,

$$\begin{cases} C_1 - 4 = -4 \\ -C_1 + C_2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-x} \sin(x) + e^x(5x - 4).$$

Esercizio 4.e. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{2x} - 2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $z^2 + z - 2 = 0$ è risolta da 1 e -2 e quindi la soluzione omogenea è

$$y_{\text{om}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Alla funzione $f_1(x) = e^{2x}$ si associa il numero 2 che non è una soluzione dell'equazione caratteristica. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_{1*}(x) = Ae^{2x}.$$

Allora sostituendo y_{1*} nell'equazione differenziale si ha

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 4Ae^{2x} = e^{2x}$$

da cui $A = 1/4$.
Alla funzione $f_2(x) = -2$ si associa il numero 0 che non è una soluzione dell'equazione caratteristica. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_{2*}(x) = A.$$

Allora sostituendo y_{2*} nell'equazione differenziale si ha

$$0 + 0 - 2A = -2$$

da cui $A = 1$. Così la soluzione generale è

$$y(x) = y_{\text{om}}(x) + y_{1*}(x) + y_{2*}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{4} + 1.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{4} + 1 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + \frac{1}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{-5e^{-2x} + e^{2x}}{4} + 1.$$

Esercizio 4.f. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 4\sin(x) + 6\cos^2(x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $z^2 + 1 = 0$ è risolta da i e $-i$ e quindi la soluzione omogenea è

$$y_{\text{om}}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Notiamo che per applicare il metodo della somiglianza conviene riscrivere la funzione che compare sul lato destro:

$$f(x) = 4\sin(x) + 6\cos^2(x) = 4\sin(x) + 3\cos(2x) + 3$$

Alla funzione $f_1(x) = \sin(x)$ si associa il numero i che è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_{1*}(x) = x(A\cos(x) + B\sin(x)).$$

Allora sostituendo y_{1*} nell'equazione differenziale si ha

$$-2A\sin(x) + 2B\cos(x) - x(A\cos(x) + B\sin(x)) + x(A\cos(x) + B\sin(x)) = 4\sin(x)$$

da cui $A = -2$ e $B = 0$.
Alla funzione $f_2(x) = 3\cos(2x)$ si associa il numero $2i$ che non è una soluzione dell'equazione caratteristica. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_{2*}(x) = (C\cos(2x) + D\sin(2x)).$$

Allora sostituendo y_{2*} nell'equazione differenziale si ha

$$-4C\cos(2x) - 4D\sin(2x) + C\cos(2x) + D\sin(2x) = 3\cos(2x)$$

da cui $C = -1$ e $D = 0$. Alla funzione $f_3(x) = -3$ si associa il numero 0 che non è soluzione dell'equazione caratteristica. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_{3*}(x) = E.$$

Allora sostituendo y_{3*} nell'equazione differenziale si ha

$$0 + E = 3$$

da cui $E = 3$. Così la soluzione generale è

$$y(x) = y_{\text{om}}(x) + y_{1*}(x) + y_{2*}(x) + y_{3*}(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - 2x\cos(x) - \cos(2x) + 3.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,

$$\begin{cases} C_1 - 1 + 3 = 1 \\ C_2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = -\cos(x) + \sin(x) - 2x\cos(x) - \cos(2x) + 3.$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione limitata $f(x)$ tale che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + 3y(x) = f(x)$ sono non limitate.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti con equazione caratteristica $z^2 + 3 = 0$ con soluzioni $z_1 = i\sqrt{3}$, $z_2 = i\sqrt{3}$. La soluzione omogenea è limitata

$$y_{\mathrm{om}}(x) = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x).$$

Pertanto, per avere una soluzione generale non limitata, è necessario scegliere la funzione limitata $f(x)$ in modo che la soluzione particolare sia non limitata. Questo si può ottenere pensando al fenomeno della risonanza ponendo $f(x) = \sin(\sqrt{3}x)$. Al tale funzione si associa il numero $\sqrt{3}$ che è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1. Dunque la soluzione particolare relativa è della forma

$$y_*(x) = x(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)).$$

Allora sostituendo y_* nell'equazione differenziale si trova che $A = -\sqrt{3}/6$ e $B = 0$ e la soluzione generale è

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) - \frac{\sqrt{3}x\cos(\sqrt{3}x)}{6}.$$

che è non limitata dato che

$$\lim_{n\to\infty} y(\sqrt{3}(2n+1)\pi) = +\infty.$$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di di quattro numeri complessi z_1, z_2, z_3, z_4 che sono vertici di un quadrilatero (convesso) con tutti i quattro lati della stessa lunghezza, ma con le due diagonali di lunghezza diversa.

Il quadrilatero richiesto è un rombo che è parallelogramma con tutti i quattro lati della stessa lunghezza. Quindi, per le proprietà della somma di due numeri complessi, possiamo prendere $z_1 = 0$ e $z_3 = z_2 + z_4$ tali che $|z_2| = |z_4|$. Allora le due diagonali, $z_3 - z_1$ e $z_4 - z_2$ sono di lunghezza diversa se e solo se $|z_3| \neq |z_4 - z_2|$.
Ad esempio $z_1 = 0$, $z_2 = 5$, $z_4 = 3 + 4i$ e $z_3 = z_2 + z_4 = 8 + 4i$ hanno le proprietà richieste:

$$|z_2| = |z_4| = 5 \quad \text{e} \quad |z_3| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}, \quad |z_4 - z_2| = |-2 + 4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$