

Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 12

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right|}{((x-2)^2 + \log(\frac{x}{2})) \log |x-2|}$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio per $\alpha > 0$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3} \right)^\alpha dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy specificando in ciascun caso l'intervallo di esistenza della soluzione.

| | |
|--|---|
| a. $\begin{cases} y'(x) = \frac{\log(x) y^2(x)}{x(1 + \log^2(x))} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$ |
| c. $\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{4}{x} \\ y(1) = 5 \end{cases}$ | d. $\begin{cases} y'(x) = 16x^3 y(x)(2 + \sqrt{y(x)}) \\ y(0) = 4 \end{cases}$ |
| e. $\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)(4 - x^2)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$ | f. $\begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} \arcsin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ |

4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

| | |
|---|--|
| a. $\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ |
| c. $\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ | d. $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 25xe^x \\ y(0) = -4, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$ |
| e. $\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{2x} - 2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$ | f. $\begin{cases} y''(x) + y(x) = 4 \sin(x) + 6 \cos^2(x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$ |

5. Fare un esempio di:

- a. una funzione limitata $f(x)$ tale che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + 3y(x) = f(x)$ sono non limitate;
- b. di quattro numeri complessi z_1, z_2, z_3, z_4 che sono vertici di un quadrilatero (convesso) con tutti i quattro lati della stessa lunghezza, ma con le due diagonali di lunghezza diversa.