

**Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O**  
**Foglio di esercizi n. 12**

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log \left| \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) \right|}{\left( (x-2)^2 + \log \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log |x-2|}$$

calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio per  $\alpha > 0$ ,

$$\int_0^1 \left( \frac{\log^2(x)}{x(1-x^\alpha)^3} \right)^\alpha dx$$

e calcolarlo per  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy specificando in ciascun caso l'intervallo di esistenza della soluzione.

a. 
$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\log(x) y^2(x)}{x(1 + \log^2(x))} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{4}{x} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} y'(x) = 16x^3 y(x) (2 + \sqrt{y(x)}) \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)(4 - x^2)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} \arcsin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

a. 
$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 25xe^x \\ y(0) = -4, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{2x} - 2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 4 \sin(x) + 6 \cos^2(x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

5. Fare un esempio di:

- a. una funzione limitata  $f(x)$  tale che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y''(x) + 3y(x) = f(x)$  sono non limitate;
- b. di quattro numeri complessi  $z_1, z_2, z_3, z_4$  che sono vertici di un quadrilatero (convesso) con tutti i quattro lati della stessa lunghezza, ma con le due diagonali di lunghezza diversa.