Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 11

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\,dx.$$

Ricordando che $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, poniamo $t = \sin^2(x)$, allora $dt = 2\sin(x)\cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\,dx &= \int_0^{1/2} \log^2(t)\,dt \\
&= \Big[t\log^2(t)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t\,d(\log^2(t)) \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\int_0^{1/2} \log(t)\,dt \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\Big[t\log(t) - t\Big]_0^{1/2} \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} + \log(2) + 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\log\left(e^x - e^{x/2}\right)\,dx.$$

Ponendo $t = e^{x/2}$ abbiamo che $x = 2\log(t)$, $dx = 2dt/t$ e

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\log\left(e^x - e^{x/2}\right)\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{\log(t^2 - t)}{t^3}\,dt.$$

Integrando per parti abbiamo

$$2\int \frac{\log(t^2 - t)}{t^3}\,dt = \int \log\left(t^2 - t\right)\,d(-t^{-2}) = -\frac{\log(t^2 - t)}{t^2} + \int \frac{2t-1}{t^2(t^2-t)}\,dt.$$

La funzione razionale da integrare si decompone come

$$\frac{2t-1}{t^2(t^2-t)} = \frac{2t-1}{t^3(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t-1}$$

dove si trova che

$$D = \left(\frac{2t-1}{t^3}\right)_{t=1} = 1 \quad \text{e} \quad C = \left(\frac{2t-1}{t-1}\right)_{t=0} = 1.$$

Ponendo $t = 2$ e $t = -1$, otteniamo altre due equazioni, rispettivamente $2A + B = -3$ e $-A + B = 0$ e quindi otteniamo $A = B = -1$. Dunque

$$\int \frac{2t-1}{t^2(t^2-t)}\,dt = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c.$$

Infine

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\log\left(e^x-e^{x/2}\right)\,dx &= \Big[-\frac{\log\left(t^2-t\right)}{t^2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\log\left(\frac{t-1}{t}\right)\Big]_1^{+\infty}\\ &= 0-\left(\lim_{t\to1^+}\left(-\frac{\log\left(t^2-t\right)}{t^2}+\log\left(\frac{t-1}{t}\right)\right)+1-\frac{1}{2}\right)\\ &= -\lim_{t\to1^+}\left(-\frac{\log\left(t-1\right)}{t^2}+\log(t-1)\right)-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^\alpha \log^5(1+x^x)}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\log^3(x)}{(x-1)^\alpha \log^5(1+x^x)}.$$

Nell'intervallo $(1, +\infty)$, i punti da indagare sono due: 1^+ e $+\infty$.
Per $x \to 1^+$, $t = x - 1 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\log^3(1+t)}{t^\alpha \log^5(2)} \sim \frac{t^3}{t^\alpha \log^5(2)} \sim \frac{1}{\log^5(2)} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-3}}.$$

Così, per la convergenza, $\alpha - 3 < 1$ ossia $\alpha < 4$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\log^3(x)}{x^\alpha \log^5(x^x)} = \frac{\log^3(x)}{x^\alpha \cdot x^5 \log^5(x)} = \frac{1}{x^{\alpha+5} \log^2(x)}.$$

Quindi, per la convergenza, $\alpha + 5 \geq 1$ ossia $\alpha \geq -4$ (si noti che l'esponente del logaritmo è $2 > 1$).
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $-4 \leq \alpha < 4$.

Esercizio 2.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^\alpha \log^2(1+x^3)}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(x^8)}{x^\alpha \log^2(1+x^3)}.$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da controllare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^8}{x^\alpha (x^3)^2} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}.$$

Quindi, per la convergenza, $\alpha - 2 < 1$ ossia $\alpha < 3$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^\alpha \log^2(x^3)} \sim \frac{\pi/2}{9} \cdot \frac{1}{x^\alpha \log^2(x)}.$$

Così, per la convergenza, $\alpha \geq 1$.

L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $1 \le \alpha < 3$.

Esercizio 2.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^\alpha}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^\alpha}$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$, c'è solo un punto da controllare ossia 0^+ (si noti che per $x \to (\pi/2)^-$, $f(x) \to 1$).
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{x^2}{2})^3)^\alpha} \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{3x^2}{2}))^\alpha} = \frac{1}{(3/2)^\alpha} \cdot \frac{x^2}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{(3/2)^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha-2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $2\alpha - 2 < 1$ e l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha < 3/2$.

Esercizio 2.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^\alpha(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^\alpha(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}.$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+ e in $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{(2x)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $\alpha - 1/2 < 1$, ossia $\alpha < 3/2$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, $t = \pi/2 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\pi/4}{\sin^\alpha(\pi - 2t)\,\sqrt{\sin(t)}} \sim \frac{\pi/4}{\sin^\alpha(2t)\,t^{1/2}} \sim \frac{\pi/4}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{t^{\alpha+1/2}}.$$

Per l'integrabilità, $\alpha + 1/2 < 1$, ossia $\alpha < 1/2$.
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha < 1/2$.

Esercizio 3.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2x\, y(x) = 3x\, e^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Abbiamo che $a(x) = 2x$,

$$A(x) = \int 2x\, dx = x^2$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = e^{x^2}$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D(e^{x^2} y(x)) = 3x.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$e^{x^2} y(x) = \frac{3x^2}{2} + c$$

e così la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{3x^2}{2} + c \right).$$

Se imponiamo la condizione $y(1) = e^{-1}$ abbiamo che $c = -1/2$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3x^2 - 1}{2e^{x^2}}$$

con intervallo di esistenza $I = \mathbb{R}$.

Esercizio 3.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)\, y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Abbiamo che $a(x) = \tan(x)$ e dato che la condizione iniziale è $y(0) = 4$, possiamo supporre che $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Così

$$A(x) = \int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = -\log(\cos(x))$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = 1/\cos(x)$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D\left(\frac{y(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$\frac{y(x)}{\cos(x)} = \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c.$$

Se imponiamo la condizione $y(0) = 4$ abbiamo che $c = 4$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \cos(x)(\tan(x) + 4) = \sin(x) + 4\cos(x)$$

con intervallo di esistenza $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

Esercizio 3.c. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan(x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Abbiamo che $a(x) = 1/x$ e dato che la condizione iniziale è $y(1) = -1$, possiamo supporre che $x \in (0, +\infty)$. Così

$$A(x) = \int \frac{dx}{x} = \log(x)$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = x$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D\left(xy(x)\right) = 2x\arctan(x).$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$xy(x) = \int 2x\arctan(x)\,dx = x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) + c.$$

Se imponiamo la condizione $y(1) = -1$ abbiamo che $c = -\pi/2$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = x\arctan(x) + \frac{\arctan(x)}{x} - \frac{\pi}{2x} - 1$$

con intervallo di esistenza $I = (0, +\infty)$.

Esercizio 3.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 3x^2 y(x) = \dfrac{e^{x^3}}{x^2+4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Abbiamo che $a(x) = -3x^2$, così

$$A(x) = -\int 3x^2\,dx = -x^3$$

e dunque il fattore integrante è $e^{A(x)} = e^{-x^3}$. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante e otteniamo

$$D\left(e^{-x^3} y(x)\right) = \frac{1}{x^2+4}.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a x si trova

$$e^{-x^3} y(x) = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\arctan(x/2)}{2} + c.$$

Se imponiamo la condizione $y(0) = 1$ abbiamo che $c = 1$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{x^3}\left(\frac{\arctan(x/2)}{2} + 1\right)$$

con intervallo di esistenza $I = \mathbb{R}$.

Esercizio 4.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x}{y(x)(y^2(x)+1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Non ci sono soluzioni stazionarie. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int y(y^2+1)\,dy = \int 2x\,dx$$

e quindi

$$\frac{y^4(x)}{4} + \frac{y^2(x)}{2} = x^2 + c.$$

Per la condizione $y(0) = -1$ si ha che $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Così

$$y^4(x) + 2y^2(x) - (4x^2+3) = 0.$$

Per determinare la soluzione $y(x)$ risolviamo prima l'equazione di secondo grado rispetto a $y^2(x)$:

$$y^2(x) = -1 \pm \sqrt{1+4x^2+3} = -1 \pm 2\sqrt{x^2+1}.$$

Notiamo che la soluzione con il segno negativo deve essere esclusa perché il $y^2(x) \geq 0$. Infine, delle due radici quadrate di $y^2(x)$, prendiamo quella con il segno negativo perché $y(0) = -1$. La soluzione cercata è

$$y(x) = -\sqrt{-1+2\sqrt{x^2+1}}$$

con intervallo di esistenza $I = \mathbb{R}$ (si noti che gli argomenti delle due radici quadrata sono entrambi positivi).

Esercizio 4.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x(y^2(x)-4)}{1+x^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Ci sono due soluzioni stazionarie: $y = 2$ e $y = -2$. Per $y(x) \neq \pm 2$, separando le variabili e integrando si ha

$$\int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

da cui

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \frac{\log(1+x^2)}{2} + c$$

e quindi

$$\log\left|\frac{y(x)-2}{y(x)+2}\right| = 2\log(1+x^2)+2c.$$

Per la condizione $y(0)=4$ si ha che $2c=\log(1/3)$. Così

$$\left|\frac{y(x)-2}{y(x)+2}\right| = \frac{1}{3}(1+x^2)^2$$

e

$$\frac{y(x)-2}{y(x)+2} = \pm\frac{1}{3}(1+x^2)^2.$$

Scegliamo il segno positivo in modo che valga la condizione $y(0)=4$. Infine esplicitando la soluzione $y(x)$ abbiamo

$$1-\frac{4}{y(x)+2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^2$$

e

$$y(x) = -2+\frac{4}{1-\frac{1}{3}(1+x^2)^2} = -2+\frac{12}{3-(1+x^2)^2}.$$

con intervallo di esistenza $I=(-\sqrt{\sqrt{3}-1},\sqrt{\sqrt{3}-1})$ (è l'intervallo nel dominio di $y(x)$ che contiene il punto 0).

Esercizio 4.c. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{y(x)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

Non ci sono soluzioni stazionarie e $y(x)\neq 0$. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int y\,dy = \int \arcsin(x)\,dx$$

e quindi

$$\frac{y^2(x)}{2} = x\arcsin(x) - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c.$$

Per la condizione $y(0)=-2$ si ha che $c=1$. Così

$$y^2(x) = 2\left(x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+1\right)$$

e visto che $y(0)=-2<0$, la soluzione cercata è

$$y(x) = -\sqrt{2x\arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+2}$$

con intervallo di esistenza $I = (-1, 1)$. Si noti che l'argomento della radice quadrata è sempre positivo).

Esercizio 4.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3\sin(2x)\cos(x)\, y^2(x) \\ y(0) = 1/4 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

C'è una soluzione stazionaria: $y = 0$. Per $y(x) \neq 0$, separando le variabili e integrando si ha

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 3\sin(2x)\cos(x)\, dx = 6 \int \sin(x)\cos^2(x)\, dx$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = -2\cos^3(x) + c.$$

Per la condizione $y(0) = 1/4$ si ha che $c = -2$. Così la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2(1 + \cos^3(x))}$$

con intervallo di esistenza $I = (-\pi, \pi)$.

Esercizio 5.a. Fare un esempio di un'equazione differenziale lineare tale che ogni sua soluzione $y(x)$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 2$.

L'equazione differenziale lineare

$$y'(x) + y(x) = 2$$

ha la proprietà richiesta (è una modifica del primo esempio fatto a lezione). Usando il fattore integrante e^x si ha

$$(e^x y(x))' = e^x(y'(x) + y(x)) = 2e^x.$$

Quindi integrando si trova la soluzione generale

$$y(x) = e^{-x}(2e^x + c) = 2 + ce^{-x}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Infine

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} (2 + ce^{-x}) = 2.$$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di un'equazione differenziale non lineare tale che ogni sua soluzione $y(x)$ è limitata.

L'equazione differenziale non lineare

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}$$

ha la proprietà richiesta, infatti ogni sua soluzione $y(x)$ per rispettare il dominio della radice quadrata deve soddisfare la disuguaglianza $1 - y^2(x) \geq 0$ ossia $|y(x)| \leq 1$ e dunque è limitata.

Anche se non è necessario, separando le variabili, si possono determinare esplicitamente tutte le soluzioni: le soluzioni stazionarie 1 e -1 e

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (-\infty, -\pi/2] \\ \sin(x) & \text{per } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -1 & \text{per } x \in [\pi/2, +\infty) \end{cases}$$

e le sue traslate $y(x + c)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Esercizio 6.a. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(3+i)z = 2-4i.$$

Abbiamo che

$$z = \frac{2-4i}{3+i} = \frac{(2-4i)(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{6-12i-2i+4i^2}{3^2+1^2} = \frac{2-14i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Esercizio 6.b. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(2-i)\overline{z} - 5 = (1+2i)^3.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{5+(1+2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+3\cdot 2i+3\cdot(2i)^2+(2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+6i-12-8i}{2-i} \\ &= \frac{-6-2i}{2-i} = -2\frac{(3+i)(2+i)}{|2-i|^2} = -2\frac{6+2i+3i+i^2}{4+1} = -2\frac{5+5i}{5} = -2-2i.\end{aligned}$$

Quindi $z = \overline{(\overline{z})} = -2+2i$.

Esercizio 6.c. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$2z(z+1) = -|3-4i|.$$

Abbiamo che l'equazione si scrive come

$$0 = 2z(z+1) + |3-4i| = 2z^2 + 2z + \sqrt{3^2+(-4)^2} = 2z^2+2z+5$$

Così, $\Delta = (2)^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = -36 < 0$ e quindi le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2+6i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Esercizio 6.d. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$z^3 - z^2 + 8z + 10 = 0.$$

Dato che il polinomio a primo membro si annulla per $z_1 = -1$ (cercare radici intere tra i divisori del coefficiente 10), è divisibile per $z+1$. Il quoziente della divisione è il polinomio di secondo grado $z^2 - 2z + 10$ con $\Delta = -36 < 0$ che si annulla in

$$z_2 = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i.$$

In conclusione, l'equazione data ha tre soluzioni: $z_1 = -1$, $z_2 = 1+3i$ e $z_3 = 1-3i$.