

Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 11

1. Calcolare i seguenti integrali definiti.

a. $\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \log^2(\sin^2(x)) dx$ b. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \log(e^x - e^{x/2}) dx$

2. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. $\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^\alpha \log^5(1+x^x)} dx$ b. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^\alpha \log^2(1+x^3)} dx$
 c. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^\alpha} dx$ d. $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^\alpha(2x) \sqrt{\cos(x)}} dx$

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy specificando in ciascun caso l'intervallo di esistenza della soluzione.

a. $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 3xe^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$ b. $\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$
 c. $\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2 \arctan(x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} y'(x) - 3x^2y(x) = \frac{e^{x^3}}{x^2+4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy specificando in ciascun caso l'intervallo di esistenza della soluzione.

a. $\begin{cases} y'(x) = \frac{2x}{y(x)(y^2(x)+1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y'(x) = \frac{x(y^2(x)-4)}{1+x^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$
 c. $\begin{cases} y'(x) = \frac{\arcsin(x)}{y(x)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} y'(x) = 3 \sin(2x) \cos(x) y^2(x) \\ y(0) = 1/4 \end{cases}$

5. Fare un esempio di:

- a. un'equazione differenziale lineare tale che ogni sua soluzione $y(x)$ è tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 2$;
 b. un'equazione differenziale non lineare tale che ogni sua soluzione $y(x)$ è limitata.

6. Risolvere le seguenti equazioni in \mathbb{C} .

a. $(3+i)z = 2-4i$ b. $(2-i)\bar{z} - 5 = (1+2i)^3$
 c. $2z(z+1) = -|3-4i|$ d. $z^3 - z^2 + 8z + 10 = 0$