Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 10
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+e^{\log^2(n)/n}\right)^n}{(4^{1/n}+3^{1/n})^n(\sqrt{n}+1)^{\log(n)}}.$$

Abbiamo che per $n\to+\infty$,
$$\begin{aligned}\left(1+e^{\log^2(n)/n}\right)^n &= \left(1+1+\frac{\log^2(n)}{n}+\frac{\log^4(n)}{2n^2}+o(\log^4(n)/n^2)\right)^n\\ &= 2^n\left(1+\frac{\log^2(n)}{2n}+o(1/n)\right)^n\\ &= 2^n\exp\left(n\log\left(1+\frac{\log^2(n)}{2n}+o(1/n)\right)\right)\\ &= 2^n\exp\left(n\left(\frac{\log^2(n)}{2n}+o(1/n)\right)\right)\\ &= 2^n\exp\left(\frac{\log^2(n)}{2}+o(1)\right)\\ &= 2^n\exp\left(\frac{\log^2(n)}{2}\right)(1+o(1)).\end{aligned}$$

Si noti che al posto di $o(1/n)$ avremmo potuto mettere $o(1/n^a)$ con $1\le a<2$. Inoltre
$$\begin{aligned}(4^{1/n}+3^{1/n})^n &= (e^{\log(4)/n}+e^{\log(3)/n})^n\\ &= \left(1+\frac{\log(4)}{n}+1+\frac{\log(3)}{n}+o(1/n)\right)^n\\ &= 2^n\left(1+\frac{\log(\sqrt{12})}{n}+o(1/n)\right)^n\\ &= 2^n\sqrt{12}\,(1+o(1))\end{aligned}$$

e
$$(\sqrt{n}+1)^{\log(n)} = n^{\log(n)/2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\log(n)} = \exp\left(\frac{\log^2(n)}{2}\right)(1+o(1))$$

dove abbiamo applicato il fatto che per $n\to+\infty$,
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\log(n)} &= \exp\left(\log(n)\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(\log(n)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)\right)\to e^0=1.\end{aligned}$$

Infine

$$\frac{\left(1+e^{\log^2(n)/n}\right)^n}{(4^{1/n}+3^{1/n})^n(\sqrt{n}+1)^{\log(n)}} = \frac{2^n \exp\left(\frac{\log^2(n)}{2}\right)(1+o(1))}{2^n\sqrt{12}\,(1+o(1))\cdot\exp\left(\frac{\log^2(n)}{2}\right)(1+o(1))}$$
$$= \frac{1+o(1)}{\sqrt{12}} \to \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x^4)+2\arctan(\log(1-x)+x)}{\sin(x^2+4x)+2\arctan(\log(1-x)-x)}.$$

Abbiamo che per $x \to 0$,

$$\log(1-x) = \log(1+(-x)) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o((-x)^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Quindi

$$2\arctan(\log(1-x)+x) = 2\arctan\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3),$$

dove è stato usato lo sviluppo $\arctan(t) = t + o(t^2)$. Mentre

$$2\arctan(\log(1-x)-x) = 2\arctan\left(-2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$
$$= 2\left(\left(-2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{(-2x+o(x))^3}{3} + o(x^3)\right)$$
$$= -4x - x^2 + \frac{14x^3}{3} + o(x^3).$$

dove è stato usato lo sviluppo $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$. Inoltre

$$\sin(x^2+x^4) = (x^2+x^4) + o((x^2)^2) = x^2 + o(x^3)$$

e

$$\sin(x^2+4x) = (x^2+4x) - \frac{(4x+o(x))^3}{6} + o(x^3) = 4x + x^2 - \frac{32x^3}{3} + o(x^3).$$

Quindi

$$\frac{\sin(x^2+x^4)+2\arctan(\log(1-x)+x)}{\sin(x^2+4x)+2\arctan(\log(1-x)-x)} = \frac{x^2+o(x^3)-x^2-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}{4x+x^2-\frac{32x^3}{3}+o(x^3)-4x-x^2+\frac{14x^3}{3}+o(x^3)}$$
$$= \frac{-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}{-6x^3+o(x^3)} \to \frac{1}{9}.$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ e la funzione è pari. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = x^2(1 + o(1))$$

e quindi non ci sono asintoti per $x \to \pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} (x^2 + \log|x^2 - 3|) = -\infty.$$

Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata prima è

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{2x(x^2 - 2)}{x^2 - 3}.$$

Quindi f è crescente in $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$, in $[0, \sqrt{2}]$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$ mentre è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$, in $[-\sqrt{2}, 0]$ e in $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$. I punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo o di massimo assoluto.
Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2 - 3)^2}.$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -\sqrt{6}]$, in $[-1, 1]$ e in $[\sqrt{6}, +\infty)$ mentre è concava in $[-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$, in $(-\sqrt{3}, -1]$, in $[1, \sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, \sqrt{6}]$. I punti $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono dei flessi.

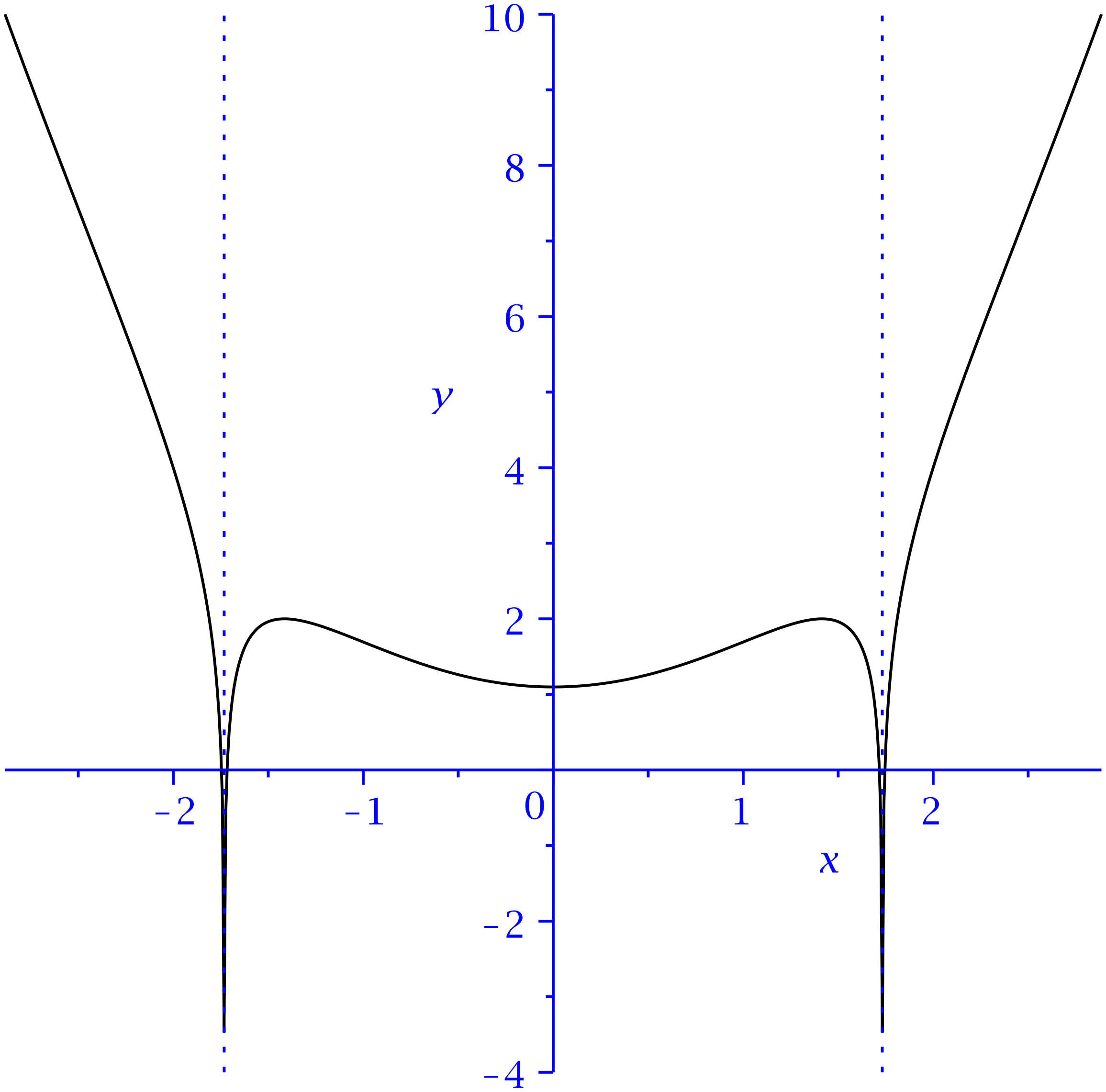

Grafico di $f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$

Esercizio 3.a. Calcolare

$$\int_0^2 \frac{3x^3+2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Ponendo $x = 2\sin(t)$ abbiamo che $dx = 2\cos(t)dt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{3x^3+2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{24\sin^3(t)+8\sin^2(t)}{2\cos(t)}\,(2\cos(t)dt) \\
&= 24\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\sin(t)\,dt + 4\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2t))\,dt \\
&= 24\Big[-\cos(t)+\frac{\cos^3(t)}{3}\Big]_0^{\pi/2} + 4\Big[t-\frac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\pi/2} \\
&= 24\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{\pi}{2} = 16+2\pi
\end{aligned}$$

dove $2\sin^2(t) = 1-\cos(2t)$.

Esercizio 3.b. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Iniziamo integrando per parti e poi poniamo $t = \sqrt{x}$, così $dx = 2tdt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_0^1 \log(x+3)\,d(\sqrt{x}) \\
&= 2\Big[\sqrt{x}\log(x+3)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+3}\,dx \\
&= 2\log(4) - 4\int_0^1 \frac{t^2\pm 3}{t^2+3}\,dt \\
&= 2\log(4) - 4\int_0^1 dt + 12\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} \\
&= 4\log(2) - 4 + 12\Big[\frac{\arctan(t/\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\Big]_0^1 \\
&= 4\log(2) - 4 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x+5}{x^3-7x-6}\,dx.$$

Abbiamo che

$$\frac{x+5}{x^3-7x-6} = \frac{x+5}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

dove

$$A = \frac{-1+5}{(-1+2)(-1-3)} = -1\ ,\ B = \frac{-2+5}{(-2+1)(-2-3)} = \frac{3}{5}\ ,\ C = \frac{3+5}{(3+1)(3+2)} = \frac{2}{5}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+5}{x^3-7x-6}\,dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3/5}{x+2} + \frac{2/5}{x-3}\right) \\
&= \Big[-\log|x+1| + \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{2}{5}\log|x-3|\Big]_0^1 \\
&= \frac{\log(3) - 6\log(2)}{5}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, allora $t^2 = x$, $2tdt = dx$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+t^4}\,(2tdt) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Ora $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ e

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right).$$

Inoltre se $s = t - 1/2$ allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt &= \int \frac{s-3/2}{s^2+3/4}\,ds \\
&= \int \frac{s}{s^2+3/4}\,ds - \frac{3}{2}\int \frac{1}{s^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\log(s^2+3/4) - \sqrt{3}\arctan(2s/\sqrt{3}) + c \\
&= \frac{1}{2}\log(t^2-t+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\Big[\log(t+1) - \frac{1}{2}\log(t^2-t+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3}\Big[\log\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\sin(3x)\,dx.$$

Ricordando che
$$\cos(3x \pm 2x) = \cos(3x)\cos(2x) \mp \sin(3x)\sin(2x)$$
abbiamo
$$\cos(3x+2x) - \cos(3x-2x) = -2\sin(3x)\sin(2x)$$
da cui
$$\sin(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \cos(5x)\right).$$

Quindi
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\sin(3x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{1} \left(\cos(x) - \cos(5x)\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(x) - \frac{\sin(5x)}{5}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1-1/5}{2} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.f. Calcolare
$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\tan(2x)\,dx.$$

Notiamo che la funzione integranda è non-negativa sull'intervallo di integrazione. Inoltre per $x \to (\pi/4)^-$, $t = \pi/4 - x \to 0^+$,
$$\tan(x)\tan(2x) = \tan(\pi/4 - t)\tan(\pi/2 - 2t) = \frac{\tan(\pi/4 - t)}{\tan(2t)} \sim \frac{1}{2t}.$$

e dato che l'integrale di $1/t$ in un intorno destro di 0 è divergente a $+\infty$ possiamo concludere, senza determinare una primitiva di $\tan(x)\tan(2x)$, che anche l'integrale improprio in questione diverge,
$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\tan(2x)\,dx = +\infty.$$

Esercizio 3.g. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\, dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{e^{4x}-1}$, allora $x = \frac{1}{4}\log(1+t^2)$, $dx = \frac{tdt}{2(1+t^2)}$ e

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{tdt}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi/2-0}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.h. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}}\, dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \int_0^1 \arccos(x) d(-2\sqrt{1-x}) \\ &= -2\Big[\arccos(x)\sqrt{1-x}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x}\, d(\arccos(x)) \\ &= \pi - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx \\ &= \pi - 2\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = \pi + 4 - 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^\alpha}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^\alpha}.$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^\alpha}.$$

e dunque la convergenza si ha per $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{1/\sqrt[1/3]{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha+1/3}}.$$

e dunque la convergenza si ha per $\alpha + 1/3 > 1$, ossia $\alpha > 2/3$.
Possiamo così concludere l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $2/3 < \alpha < 1$.

Esercizio 4.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^\alpha}{\sinh(x)}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^\alpha}{\sinh(x)}$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Quindi, per la convergenza, $1 - \alpha < 1$ ossia $\alpha > 0$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{e^{\alpha x}}{e^x/2} = 2e^{(\alpha-1)x}.$$

Così, per la convergenza, $\alpha - 1 < 0$ ossia $\alpha < 1$.
Possiamo concludere che l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Esercizio 4.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-|x+1|})|x-1|^2}{|x^4 - 1|^\alpha}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(1 - e^{-|x+1|})|x-1|^2}{|x^4 - 1|^\alpha}.$$

Si noti che $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ e quindi il dominio della funzione da integrare è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dunque i punti da indagare sono quattro: -1, 1, $-\infty$ e $+\infty$.
Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{(1 - e^{-2})|x-1|^2}{4^\alpha |x-1|^\alpha} = \frac{C}{|x-1|^{\alpha-2}}.$$

Quindi, per la convergenza è necessario che $\alpha - 2 < 1$ ossia $\alpha < 3$.
Per $x \to -1$,

$$f(x) \sim \frac{|x+1|2^2}{4^\alpha |x+1|^\alpha} \sim \frac{C}{|x+1|^{\alpha-1}}.$$

Per la convergenza, $\alpha - 1 < 1$ ossia $\alpha < 2$.
Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim \frac{|x|^2}{|x|^{4\alpha}} = \frac{1}{|x|^{4\alpha-2}}$$

Così, per la convergenza, $4\alpha - 2 > 1$ ossia $\alpha > \frac{3}{4}$.
Imponendo tutte e tre le condizioni abbiamo che l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\frac{3}{4} < \alpha < 2$.

Esercizio 4.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^\alpha}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^a}.$$

Il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ e dunque dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-1}}{x^{1/3}\,|\log(x)|^\alpha}.$$

Dato che $1/3 < 1$, la condizione di convergenza in un intorno destro di 0 è soddisfatta per qualunque α.

Per $x \to 1$,
$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(1 + (x-1))|^\alpha} \sim \frac{1 - e^{-1/2}}{|x-1|^\alpha}.$$
Così la condizione di convergenza in un intorno di 1 è soddisfatta per $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$,
$$f(x) \sim \frac{1/(x^2+1)}{x^{1/3}\,|\log(x)|^\alpha} = \frac{1}{x^{7/3}|\log(x)|^\alpha}.$$
Dato che $7/3 > 1$ la condizione di convergenza è soddisfatta per qualunque α.
Quindi l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 4.e. Discutere la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)(1 - \sin(x))}}{\tan^\alpha(x)\cos^2(x)}\,dx$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia
$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)(1 - \sin(x))}}{\tan^\alpha(x)\cos^2(x)}.$$
Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$,
$$f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}.$$
Per la convergenza, $\alpha - 1/2 < 1$ ossia $\alpha < 3/2$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, si ha che $t = \pi/2 - x \to 0^+$, $\sin(x) = \cos(t)$, $\cos(x) = \sin(t)$, $\tan(x) = 1/\tan(t)$ e
$$f(x) \sim \frac{(1 - \cos(t))^{1/2}}{\tan^{-\alpha}(t)\sin^2(t)} \sim \frac{(t^2/2)^{1/2}}{t^{2-\alpha}} = \frac{2^{-1/2}}{t^{1-\alpha}}.$$
Per la convergenza, $1 - \alpha < 1$ ossia $\alpha > 0$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 3/2$.

Esercizio 4.f. Discutere la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x) - 1)^\alpha}\,dx$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia
$$f(x) = \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x) - 1)^\alpha} = \frac{\tan(x)}{(\tan(x) + 1)^\alpha(\tan(x) - 1)^\alpha}.$$
Nell'intervallo $(\pi/4, \pi/2)$ i punti da indagare sono due: $(\pi/4)^+$ e $(\pi/2)^-$.

Per $x \to (\pi/4)^+$, si ha che $t = x - \pi/4 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{1}{2^\alpha (2t)^\alpha} = \frac{1}{4^\alpha t^\alpha}$$

dove si è usato lo sviluppo di $\tan(x)$ in $x = \pi/4$

$$\tan(x) = \tan(\pi/4) + \tan'(\pi/4)(x - \pi/4) + o(x - \pi/4) = 1 + 2t + o(t).$$

Quindi, per la convergenza, $\alpha < 1$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, si ha che $t = \pi/2 - x \to 0^+$, $\tan(x) = 1/\tan(t) \sim 1/t$ e

$$f(x) \sim \frac{t^{-1}}{(t^{-2} - 1)^\alpha} = \frac{t^{-1}}{t^{-2\alpha}(1 - t^2)^\alpha} \sim \frac{1}{t^{1-2\alpha}}.$$

Per la convergenza, $1 - 2\alpha < 1$ ossia $\alpha > 0$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Esercizio 4.g. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-2}^{3} \frac{\sqrt{x+2}\,\log(x+2)}{(6 + x - x^2)^\alpha}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}\,\log(x+2)}{(6 + x - x^2)^\alpha} = \frac{\log(x+2)}{(3-x)^\alpha (x+2)^{\alpha - 1/2}}.$$

Nell'intervallo $(-2, 3)$ i punti da indagare sono due: $(-2)^+$ e 3^-.
Per $x \to (-2)^+$, si ha che $t = x + 2 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\log(t)}{5^\alpha t^{\alpha - \frac{1}{2}}}$$

e quindi l'integrale di f su $(-5, 0]$ converge se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$ ossia se $\alpha < \frac{3}{2}$.
Inoltre per $x \to 3^-$, si ha che $t = 3 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\log(5)}{t^\alpha 5^{\alpha - 1/2}}$$

e quindi l'integrale di f su $[0, 3)$ converge se e solo se $\alpha < 1$.
Pertanto l'integrale di f su $(-2, 3)$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 4.h. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|\sin(\alpha x) - \log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-2)}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{|\sin(\alpha x) - \log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-2)}$$

Nell'intervallo $(0,1)$ è necessario indagare solo in 0^+.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{|\alpha x - 2x + 2x^2 + o(x^2)|}{x^2(\frac{x}{4} + o(x) + x^{1/2})} = \frac{|(\alpha-2)x + 2x^2 + o(x^2)|}{x^{5/2}(1+o(1))}.$$

Quindi se $\alpha \neq 2$,

$$f(x) \sim \frac{|\alpha-2|x}{x^{5/2}} = \frac{|\alpha-2|}{x^{3/2}}$$

e l'integrale non è convergente. Invece se $\alpha = 2$ allora

$$f(x) \sim \frac{2x^2}{x^{5/2}} = \frac{2}{x^{1/2}}$$

e l'integrale è convergente.
Quindi la convergenza si ha solo per $\alpha = 2$.

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione f derivabile in $(-1,1)$ tale che $f((-1,1)) = \mathbb{R}$ e $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

Basta considerare una funzione derivabile, dispari e non limitata tale che il suo integrale improprio su $(-1,1)$ sia convergente. Ad esempio

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Allora dato che

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

si ha, per il teorema dei valori intermedi, che $f((-1,1)) = \mathbb{R}$. Inoltre

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di una funzione f derivabile in $(0,+\infty)$ tale che $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$ e $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$$

con $0 < a < 1 < b$, ha le proprietà richieste (si veda anche l'esercizio 3.d).
Tale funzione è derivabile in $(0,+\infty)$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Quindi, per il teorema dei valori intermedi, $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$. Inoltre l'integrale improprio di f su $(0,1)$ è convergente perché per

$$\text{per } x \to 0^+,\ f(x) = \frac{1}{x^a} \text{ con } a < 1 \quad \text{e} \quad \text{per } x \to +\infty,\ f(x) = \frac{1}{x^b} \text{ con } b > 1.$$