Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 9
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)^{2n}+(n^2+2n)^n}{(4n^2-3n)^n-(n^2-n\log(n))^n}.$$

Abbiamo che per $n\to+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)^{2n}+(n^2+2n)^n}{(4n^2-3n)^n-(n^2-n\log(n))^n} &= \frac{4^n n^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}+n^{2n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{4^n n^{2n}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^n-n^{2n}\left(1-\frac{\log(n)}{n}\right)^n}\\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{4n}\right)^n-\left(\frac{1}{4}-\frac{\log(n)}{4n}\right)^n}\\ &\to \frac{e+0}{e^{-3/4}+0}=e^{7/4}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cosh(x)-1}+\frac{2}{\log(x^2+\cos(2x))}\right).$$

Abbiamo che per $x\to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh(x)-1}+\frac{2}{\log(x^2+\cos(2x))} &= \frac{1}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}+\frac{2}{\log(1-x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4))}\\ &= \frac{1}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}+\frac{2}{-x^2+\frac{2x^4}{3}-\frac{1}{2}\left(-x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^4)}\\ &= \frac{1}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}+\frac{2}{-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)}\\ &= \frac{-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)+2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(-x^2+o(x^2)\right)}\\ &= \frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\to-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.c. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\log(1+x^2)} \int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt.$$

Sia

$$F(x) = \int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt$$

allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile e $F'(x) = x\sin(2x)e^{3x}$. Inoltre, dato che $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$, il limite è della forma $0/0$ e applicando de L'Hopital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt}{x\log(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x\log(1+x^2)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{(x\log(1+x^2))'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)e^{3x}}{\log(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x+o(x))(1+o(1))}{x^2+o(x^2)+2x^2(1+o(1))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{3x^2+o(x^2)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} \int_x^{2x} \frac{t^8}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\,dt.$$

Sia

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^8}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\,dt$$

allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile e $F'(x) = \frac{x^8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$. Inoltre, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = +\infty$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{t^8}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\,dt = +\infty$$

e dunque il limite è della forma ∞/∞. Applicando de L'Hopital si trova

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} \int_x^{2x} \frac{t^8}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\,dt &= \lim_{x\to+\infty} \frac{F(2x)-F(x)}{x^3} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(2x)\cdot 2 - F'(x)}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2(2x)^8}{(2x+1)^2((2x)^2+1)^2} - \frac{x^8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2^9x^2}{(2+1/x)^2((2^2+1/x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+1/x)^2(1+1/x^2)^2}}{3x^2} \\
&= \frac{\frac{2^9}{2^2\cdot 2^4}-1}{3} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2\log(x^2 - 2x + 2) - |x|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Dato che $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$, il dominio è $D = \mathbb{R}$. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = -|x| + 4\log|x| + o(1)$$

e quindi non ci sono asintoti a $\pm\infty$.
Per $x \neq 0$ la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{4(x-1)}{x^2-2x+2} \mp 1 = \begin{cases} -\dfrac{x^2-6x+6}{x^2-2x+2} & \text{se } x \in (0,+\infty), \\ \\ \dfrac{x^2+2x-2}{x^2-2x+2} & \text{se } x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1-\sqrt{3}]$ e in $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$ mentre è decrescente in $[-1-\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}]$ e in $[3+\sqrt{3}, +\infty)$. La funzione non è derivabile in 0 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = -3.$$

Il punto $x = -1-\sqrt{3} \simeq -2.73$ è di massimo assoluto e $x = 3+\sqrt{3} \simeq 4.73$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 3-\sqrt{3} \simeq 1.27$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo assoluto.
Per $x \neq 0$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{4x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}.$$

La funzione è convessa in $[0,2]$ ed è concava in $(-\infty,0]$ e in $[2,+\infty)$. Il punto $x = 2$ è un flesso.

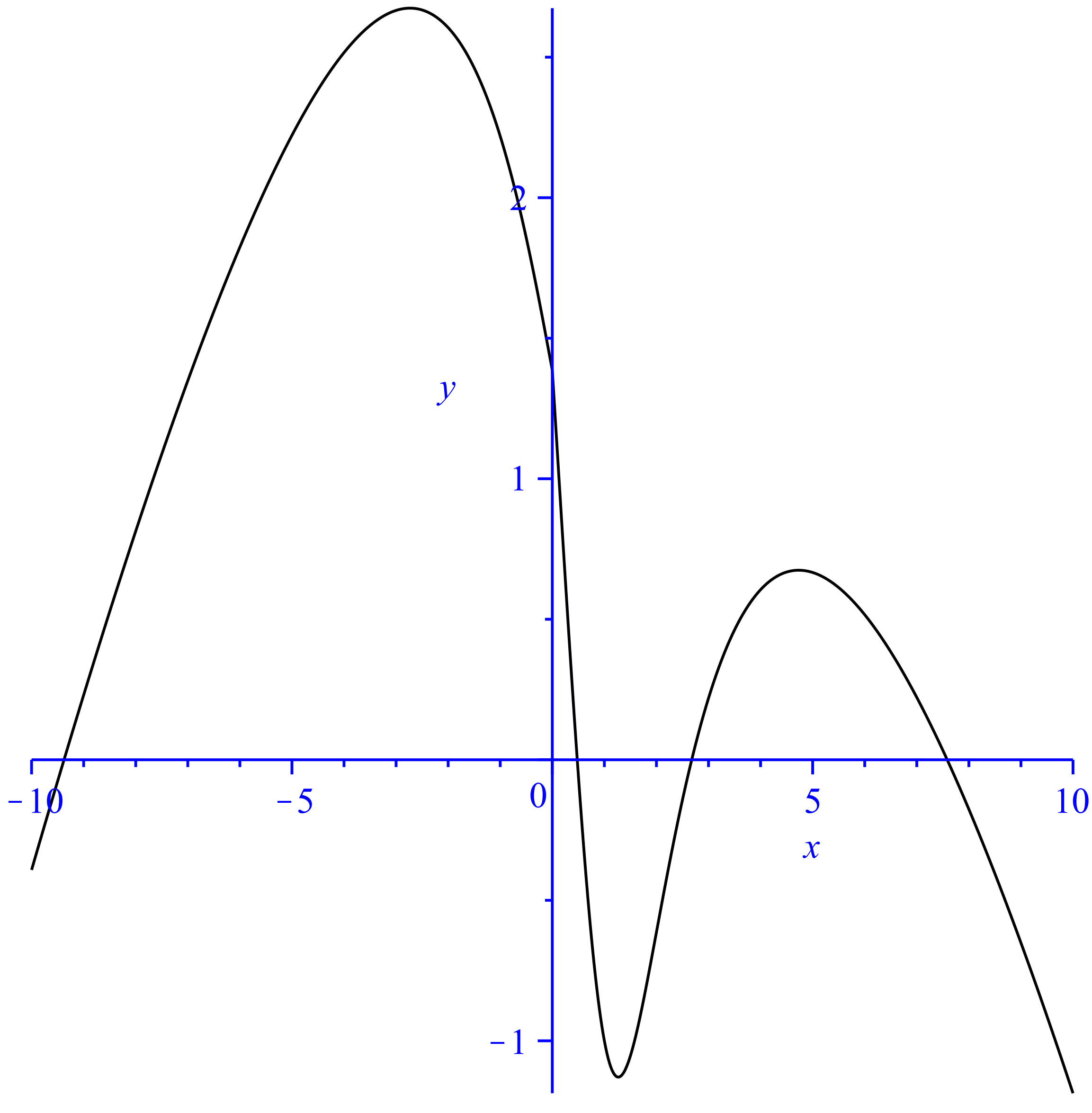

Grafico di $f(x) = 2\log(x^2 - 2x + 2) - |x|$

Esercizio 2.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}\right) = 0$$

e quindi $y = 0$ è l'asintoto a $\pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Per $x \neq 0$, la derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \pm \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \dfrac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (0,+\infty), \\[2ex] \dfrac{2(x^2-2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty,-\sqrt{2}]$ e in $(0,1/\sqrt{2}]$ mentre è decrescente in $[-\sqrt{2},0)$ e in $[1/\sqrt{2},+\infty)$. Il punto $x = 1/\sqrt{2}$ è di massimo assoluto e $x = -\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di minimo relativo.
Per $x \neq 0$, la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8x(x^2-2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (0,+\infty), \\[2ex] \dfrac{4x(5-x^2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

La funzione è convessa in $(-\infty,-\sqrt{5}]$ e in $[\sqrt{2},+\infty)$, mentre è concava in $[-\sqrt{5},0)$ e in $(0,\sqrt{2}]$. Il punti $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{2}$ sono dei flessi.

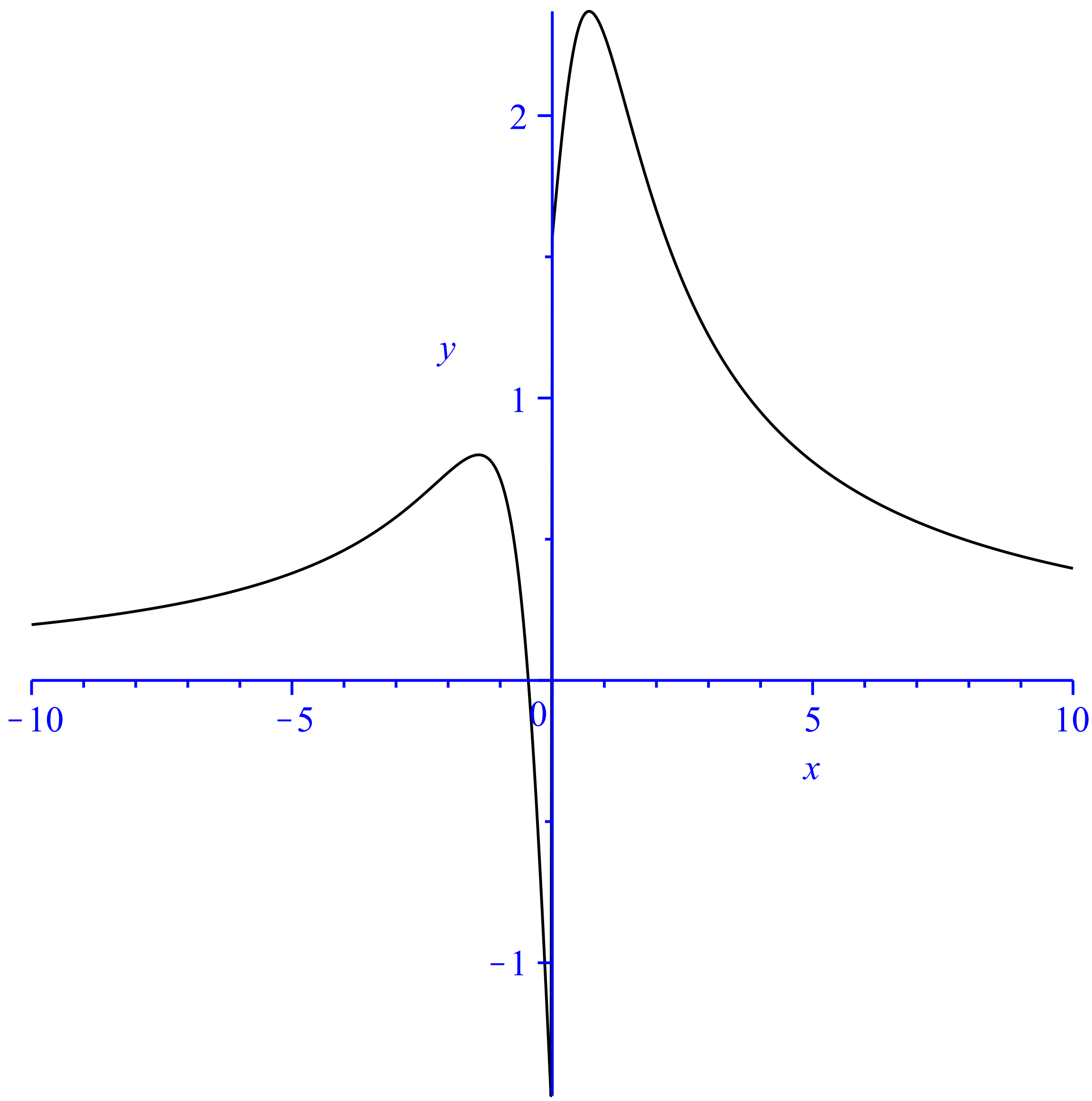

Grafico di $f(x) = \arctan(1/x) + \dfrac{3|x|}{1+x^2}$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$$

Effettuando la divisione otteniamo

$$\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)} = x+1+\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Inoltre la funzione razionale rimanente può essere scritta come combinazione lineare di funzioni razionali semplici:
$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$
Moltiplicando a sinistra e a destra per $(x-1)^2$ e calcolando il limite per $x \to 1$ otteniamo

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2}{(x+1)} = 1.$$

Analogamente moltiplicando a sinistra e a destra per $(x+1)$ e calcolando il limite per $x \to -1$ otteniamo
$$C = \lim_{x\to -1}\frac{2x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}.$$
Così
$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1/2}{x+1}$$
e sostituendo ad esempio $x=0$ otteniamo che $A = 3/2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx &= \int \left(x+1+\frac{3/2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1/2}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\log|x+1|+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\int \frac{x-2}{x^2(x^2-2x+4)}\,dx.$$

La funzione integranda è razionale e dunque può essere scritta come combinazione lineare di funzioni razionali semplici:

$$\frac{x-2}{x^2(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}.$$

Si noti che $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3$ è irriducibile. Intanto troviamo B:

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{x-2}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{2}.$$

Per le costanti rimanenti A, C e D, svolgendo i calcoli otteniamo un sistema lineare di tre equazioni da risolvere. In alternativa

$$\frac{x-2}{x^2(x^2-2x+4)} + \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-4+x^2-2x+4}{2x^2(x^2-2x+4)} = \frac{1/2}{x^2-2x+4}$$

da cui $D = 1/2$ e $A = C = 0$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2(x^2-2x+4)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2-2x+4}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Posto $t = e^x$, allora $x = \log(t)$ e $dx = dt/t$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\,dt &= \int \left(\frac{t+1}{t(t^2+1)}\right) dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt \\
&= \ln|t| + \arctan(t) - \frac{\log(1+t^2)}{2} + c \\
&= x + \arctan(e^x) - \frac{\log(1+e^{2x})}{2} + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)}\,dx.$$

Poniamo $t=\sqrt{x}$, allora $t^2=x$, $2tdt=dx$ e
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)}\,dx &= \int \frac{2t}{t(t^2-9)}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt\\ &= \frac{1}{3}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+c\\ &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}+3}\right)+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare
$$\frac{2x+5x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Poniamo $t=\sqrt{x-1}$, allora $t^2=x-1$, $2tdt=dx$ e
$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{2(t^2+1)+5(t^2+1)^2}{t}\cdot(2tdt)\\ &= 2\int(5t^4+12t^2+7)\,dt\\ &= 2(t^5+4t^3+7t)+c\\ &= 2\sqrt{x-1}((x-1)^2+4(x-1)+7)+c\\ &= 2\sqrt{x-1}(x^2+2x+4)+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.f. Calcolare
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{x-4}$, allora $t^2 = x - 4$, $2tdt = dx$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,dx &= \int \frac{1}{t(t^2+4)} \cdot (2tdt) \\
&= 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1+(t/2)^2}\,d(t/2) \\
&= \arctan(t/2) + c \\
&= \arctan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right) + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.g. Calcolare
$$\int \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx.$$

Poniamo $t = \tan(x/2)$ allora $x = 2\arctan(t)$,

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{dt}{1+t+t^2} \\
&= \int \frac{dt}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.h. Calcolare

$$\int \tan^4(x)\,dx.$$

Poniamo $t = \tan(x)$. Così $x = \arctan(t)$, $dx = dt/(1+t^2)$ e

$$\begin{aligned}\int \tan^4(x)\,dx &= \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt \\ &= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \arctan(t) + c \\ &= \frac{\tan^3(x)}{3} - \tan(x) + x + c.\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Calcolare
$$\int_{-1}^{1}(x+1)e^{\sqrt{|x|}}\,dx.$$

Notiamo che funzione $xe^{\sqrt{|x|}}$ è dispari mentre $e^{\sqrt{|x|}}$ è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre posto $t=\sqrt{x}$, si ha che $t^2=x$ e $2tdt=dx$. Quindi

$$\int_{-1}^{1}(x+1)e^{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}\,dx = 4\int_{0}^{1}e^{t}t\,dt = 4\Big[e^{t}(t-1)\Big]_{0}^{1} = 4.$$

Esercizio 4.b. Calcolare
$$\int_{-1}^{1}(\sqrt{3}x-1)^2\arctan|x|\,dx.$$

Anche qui dopo aver svolto il quadrato notiamo che la parte dispari può essere tolta

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(\sqrt{3}x-1)^2\arctan|x|\,dx &= \int_{-1}^{1}(3x^2-2\sqrt{3}x+1)\arctan|x|\,dx\\ &= 2\int_{0}^{1}(3x^2+1)\arctan(x)\,dx\\ &= 2\int_{0}^{1}\arctan(x)\,d(x^3+x)\\ &= 2\Big[\arctan(x)(x^3+x)\Big]_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1}\frac{x^3+x}{1+x^2}\,dx\\ &= \pi - 2\int_{0}^{1}x\,dx = \pi - \Big[x^2\Big]_{0}^{1} = \pi - 1.\end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Calcolare
$$\int_1^8 \min(3-|x-3|, 2)\, dx$$

Risolviamo prima la disuguaglianza $3-|x-3| \geq 2$:

$$3-|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow |x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \min(3-|x-3|, 2)\, dx &= \int_1^2 (3-|x-3|)\, dx + \int_2^4 2\, dx + \int_4^8 (3-|x-3|)\, dx \\
&= \int_1^2 (3-(3-x))\, dx + 2\cdot 2 + \int_4^8 (3-(x-3))\, dx \\
&= \int_1^2 x\, dx + 4 + \int_4^8 (6-x)\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_4^8 \\
&= \frac{3}{2} + 4 + 0 = \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Calcolare
$$\int_0^1 \log(x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(x+\sqrt{1+x^2})\, dx &= \left[x\log(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 \\
&\qquad - \int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\
&= \log(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\
&= \log(1+\sqrt{2}) - \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.e. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\log(1+e^x)\,dx.$$

Sia $t = e^x$, allora $\log(t) = x$, $dt/t = dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\log(1+e^x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}\log(1+e^x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\log(1+e^x)\,dx \\
&= \int_0^1 \log(1+t)\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\log(1+t)}{t^2}\,dt \\
&= [(1+t)\log(1+t) - t]_0^1 + \int_1^{+\infty} \log(1+t)\,d(-1/t) \\
&= 2\log(2) - 1 + \Big[-\frac{\log(1+t)}{t}\Big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,dt \\
&= 3\log(2) - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt \\
&= 3\log(2) - 1 + \left[\log\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^{+\infty} = 4\log(2) - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.f. Calcolare
$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$$

Sia $t = \sqrt{e^{2x}-1}$, allora $\log(1+t^2) = 2x$, $2tdt/(1+t^2) = 2dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx &= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\arctan(t)\Big]_{\sqrt{3}}^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.g. Calcolare

$$\int_0^1 x\log\left(\frac{x}{2-x}\right)\,dx.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\log\left(\frac{x}{2-x}\right)dx &= \int_0^1 \log\left(\frac{x}{2-x}\right)d\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2-x}{x}\cdot\frac{2}{(2-x)^2}\,dx\\
&= -\int_0^1 \frac{x}{2-x}\,dx = \int_0^1\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx\\
&= \Big[x+2\log|x-2|\Big]_0^1 = 1-2\log(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 4.h. Calcolare

$$\int_0^{\pi/3}\frac{\tan(x)}{2+\log(\cos^2(x))}\,dx.$$

Sia $t=\cos(x)$, allora $dt=-\sin(x)dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3}\frac{\tan(x)}{2+\log(\cos^2(x))}\,dx &= -\int_1^{1/2}\frac{1}{t(2+\log(t^2))}\,dt = \frac{1}{2}\int_{1/2}^1\frac{1}{t(1+\log(t))}\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1\frac{1}{1+\log(t)}\,d(1+\log(t))\\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|1+\log(t)|\Big]_{1/2}^1 = -\frac{\log(1-\log(2))}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione f integrabile in $[-1,1]$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ ha un punto angoloso in 0

Basta prendere una funzione integrabile che abbia un punto di discontinuità di salto in $x = 0$. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ha le proprietà richieste. Infatti f è integrabile in $[-1,1]$ e per $x \in [-1,0)$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} 0\,dt = 0$$

e per $x \in [0,1]$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + [t]_0^x = x.$$

Dunque

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0), \\ x & \text{se } x \in [0,1], \end{cases}$$

che ha un punto angoloso in 0: $F'_+(0) = 1$ e $F'_-(0) = 0$.

Esercizio 5.b. Fare un esempio di una funzione f continua in $\mathbb{R}$ tale che $x = 0$ è punto di minimo assoluto e f non è crescente in ogni intervallo $(0, r)$ per ogni $r > 0$.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x \sin(1/x)| & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ha le proprietà richieste.
Infatti f è continua in $\mathbb{R}$, in particolare la verifica della continuità in $x = 0$ è

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x \sin(1/x)| = 0 = f(0).$$

Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto perché per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 = f(0)$.
Inoltre, per ogni $r > 0$, f non è crescente in $(0, r)$ perché tale intervallo contiene infiniti punti delle successioni

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Infatti per $n > 1/r$,

$$0 < y_n < x_n < r \quad \text{ma} \quad f(y_n) = \left| \frac{\sin(2\pi n + \pi/2)}{2\pi n + \pi/2} \right| = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} > 0 = \left| \frac{\sin(2\pi n)}{2\pi n} \right| = f(x_n).$$

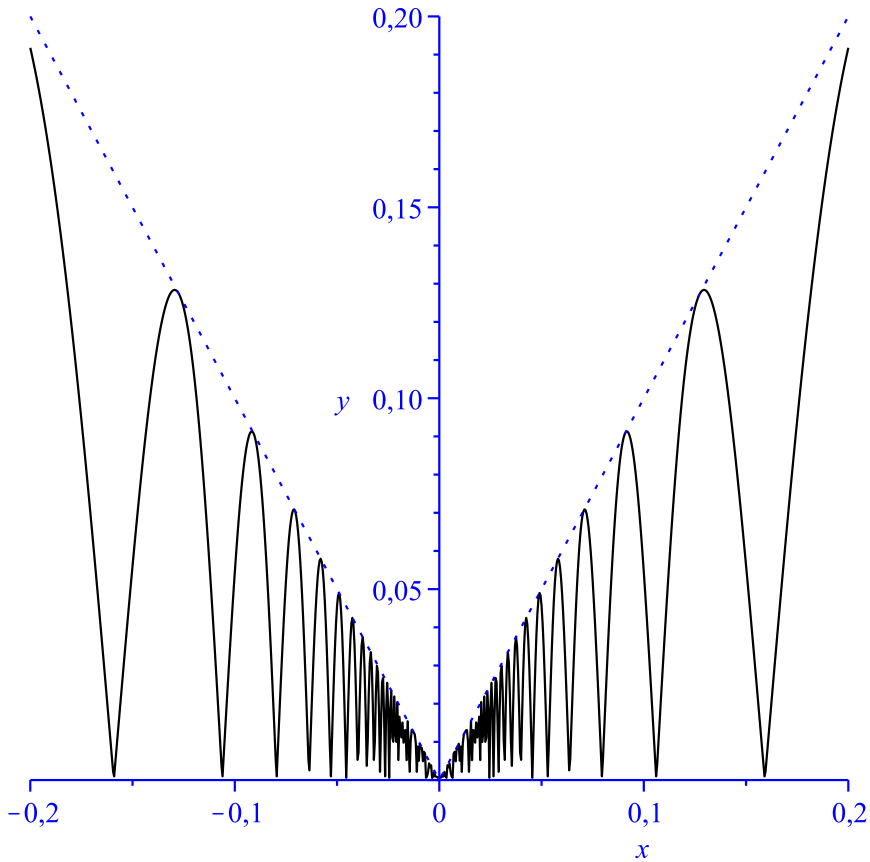

Grafico di $f(x) = |x \sin(1/x)|$